



AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLERİN KÜRESEL GÖRÜNTÜLERİ ÜZERİNE

Vahide Bulut¹ ve Ali Çalışkan²

Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü, 35100 Bornova, İzmir, Türkiye

ABSTRACT

Developable surfaces are used widely in CAGD. In this paper, the spherical image of developable surfaces via SLERP is formed. Also, the advantage of working on the spherical curves instead of developable surfaces is expressed. In addition to them, required reminders about properties of developable surfaces and SLERP are given.

Key words- Developable surfaces, Gauss map, quaternion, SLERP.

ÖZET

Açılabilir yüzeyler CAGD de yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu makalede, açılabilir yüzeylerin küresel görüntüsü SLERP vasıtasıyla oluşturulmuş, açılabilir yüzeyler yerine küresel eğriler üzerinde çalışmanın avantajı ifade edilmiştir. Ayrıca açılabilir yüzeylerin özellikleri ile SLERP hakkında gerekli hatırlatmalar yapılmıştır.

Anahtar kelimeler- Açılabilir yüzeyler, kuaterniyon, SLERP, Gauss map.

1. GİRİŞ

Açılabilir yüzeyler, gerilmeden ve yırtılmadan düzleme serilebilen yüzeylerdir. Bu özelliğinden dolayı sheet- metal ve plate-metal temelli endüstrilerde [1, 2], deniz araçları yüzeyinde ve uçak yüzeylerinde [3] ve mimari yapılarda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Gemi, uçak ve mobil vasıtaların tasarımında çok kullanılan açılabilir yüzeylerin kesişimi literatürde önemli bir yer tutmaktadır.

Diferansiyel geometriden bilindiği gibi, bir açılabilir yüzey düzlem, konik, silindirik yüzey ya da bir eğrinin teğetlerinin doğurduğu yüzey olabilir [4]. Üreteçleri asal eğrilerdir ve yüzeyin tüm noktalarında Gauss eğriliği sıfırdır.

Kuaterniyonlar ilk olarak 19. y.y da Sir William Rowan Hamilton tarafından bulunmuştur. Kuaterniyonlar ve özellikle birim kuaterniyonlar robotik, animasyon ve bilgisayar grafikleri gibi birçok alanda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Birim kuaterniyon, dönme matrisinin diğer bir gösterimidir.

¹ vahidebulut@mail.ege.edu.tr

² ali.caliskan@ege.edu.tr

Spherical Linear Interpolation (SLERP), bilgisayar grafiklerinde 3D dönmenin yapılabilmesi amacıyla Ken Shoemake tarafından sunulmuştur. SLERP, her bir kuaterniyon arasındaki açının sabit olması, yani sabit hızın sağlanmasından dolayı lineer interpolasyondan farklıdır.

Bu çalışmada, açılabilir yüzeylerin özellikleri üzerinde durulmuştur. Açılabilir yüzeyin küresel görüntüsü SLERP kullanılarak oluşturulmuş ve son olarak bir örnek verilmiştir.

2. REGLE VE AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLER

Regle yüzey, bir parametrelili doğru ailesini içeren bir yüzeydir [5]. Regle yüzey,

$$y(u, v) = x(v) + ua(v). \quad (1)$$

şeklinde gösterilir, burada $x(v)$, yüzeyin dayanak eğrisi ya da doğrultmanı, $a(v)$ ise üretici olarak isimlendirilir. Bir regle yüzey, doğrunun uzayda sürekli hareket ettirilmesiyle oluşan yüzeydir. (1) ifadesi $v=sbt$ için bir doğru belirtir. Bu doğru, yüzeyin üretici olarak isimlendirilir. Bu denklemden,

$$y_u = a(v), \quad y_v = \frac{dx}{dv} + u \frac{da}{dv} \quad (2)$$

bulunur.

Açılabilir regle yüzey, verilen bir ureteç boyunca tüm noktalarda teğet düzlemi sabit olan bir regle yüzeydir [5]. Bir noktadaki teğet düzlem, bu noktadaki yüzey normaliyle ifade edilebileceğinden açılabilir regle yüzey, verilen bir ureteç boyunca tüm noktalardaki yüzey normali sabit olan yüzey olarak da tanımlanabilir [6].

Bir regle yüzeyin açılabilir olması için,

$$\left(a(v), \frac{dx}{dv}, \frac{da}{dv} \right) = 0 \quad (3)$$

koşulu sağlanmalıdır [5].

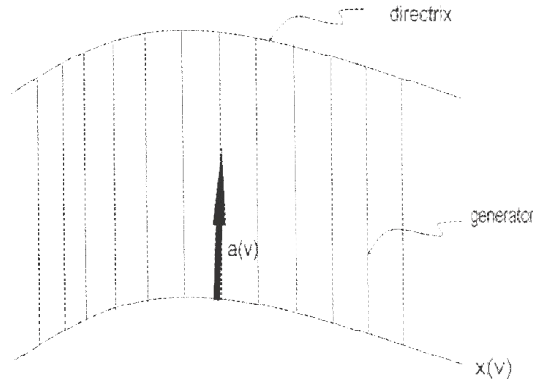
3. AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLERİN ÖZELLİKLERİ

Yüzeyin bir kısmının açılabilir olması için yalnız ve yalnız bu kısmın her yerinde $K=0$ olmalıdır. Açılabilir regle yüzeyler düzleme izometrik olarak eşlenebilir [5]. Bu yüzden, sadece açılabilir regle yüzeyler izometrik olarak düzleme dönüştürülebilir.

Gauss dönüşümü, R^3 deki bir yüzeyin her noktasını birim küre üzerindeki noktalara dönüştüren bir fonksiyondur. Bir yüzeyin Gauss dönüşümü diğer bir yüzeydir. Açılabilir regle yüzeyler, Gauss dönüşümü ile bir eğri ya da eğri ağına dönüşür. Böylece iki açılabilir yüzeyin kesişimi de iki küresel eğrinin kesişimi durumuna indirgenebilir [7]. Çünkü, açılabilir regle yüzeylerde ureteç boyunca tüm noktalarda yüzey normalleri eğrinin binormalleri olup paralel kalırlar. Gauss dönüşümü tek bir eğri olduğundan, yüzeyin doğrultmanı da tek bir sürekli eğri olur. Bu yüzeyler açılabilir regle yüzeyler ya da torsal regle açılabilir yüzeyler olarak isimlendirilir [6].

4. KUATERNİYON

R^4 de bir element tanımlayan bir kuaterniyon dört değişkenlidir. Bu yüzden bir kuaterniyon, a, b, c, d reel sayılar ve i, j, k sanal sayılar olmak üzere,



Şekil 1: Açılabilir regle yüzey

$$q = a + bi + cj + dk$$

şeklinde yazılabilir. Burada i, j, k \mathbb{R}^3 de standart ortonormal baz ve $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ dir.

$q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ ve $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ iki kuaterniyon olmak üzere toplamları;

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \text{ olur.}$$

Eğer kuaterniyonlar, $q_1 = a_1 + u$ ve $q_2 = a_2 + v$ biçiminde yazılırsa kuaterniyon çarpımı,

$$q_1 * q_2 = a_1a_2 - u \cdot v + a_1v + a_2u + u \times v \text{ .}$$

biçiminde ya da,

$$q_1 * q_2 = \begin{bmatrix} [q_1 * q_2]_0 \\ [q_1 * q_2]_1 \\ [q_1 * q_2]_2 \\ [q_1 * q_2]_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 + c_1d_2 - d_1c_2 \\ c_1a_2 + a_1c_2 + d_1b_2 - b_1d_2 \\ d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir [8].

Kuaterniyonun eşleniği, $\bar{q} = a_1 - v = a_1 - b_1i - c_1j - d_1k$ dir.

Kuaterniyonun normu, $N(q) = \sqrt{\bar{q}q}$ dir, burada q skaleri $N(q)$ ile ifade edilmiştir.

Birim kuaterniyon, $|q| = |\bar{q}| = 1$ şeklinde tanımlanır.

Kuaterniyonun tersi,

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2} \cdot \bar{q} \text{ dir .}$$

Eğer bir n vektörü etrafında θ kadar dönen bir kuaterniyon varsa bu,

$$q = \left(n \sin \left(\frac{\theta}{2} \right), \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$$

biçiminde gösterilir [9] .

5. KUATERNİYON İNTERPOLASYONU

S^3 üzerindeki jeodezik yay, bilgisayar grafiğinde ayrıca SLERP olarak isimlendirilir (ilk kullanımı, kuaterniyonu bilgisayar grafikleri topluluğuna tanıtan Shomake tarafından [10]) [11]. SLERP, bir birim vektörü diğerine döndürürken interpolate edilmiş vektörün birim uzunluğunu korur ve küre üzerinde kalmasını sağlar. Ayrıca SLERP, dönmenin yanında düzgünlük durumunu ve sabit açısal hızı da sağlar [12]. q_1 ve q_2 kuaterniyonları baz olarak küre üzerinde seçildiğinde, küresel jeodezik eğrinin denklemi,

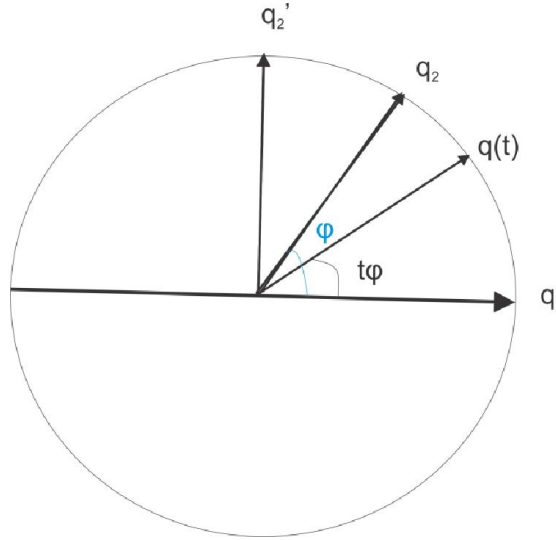
$$q(t) = q_1 \frac{\sin(1-t)\varphi}{\sin\varphi} + q_2 \frac{\sin t\varphi}{\sin\varphi} \quad (4)$$

olarak bulunur, burada $t \in [0,1]$ ve φ , q_1 ve q_2 arasındaki açıdır ve,

$$\varphi = \cos^{-1}(q_1 \cdot q_2) \quad (5)$$

biçiminde hesaplanır.

Bu yüzden denklem (4), kürenin jeodeziklerine karşılık gelen büyük çemberleri verir.



Şekil 2: Kuaterniyon interpolasyonu

6. AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLERİN KÜRESEL GÖRÜNTÜSÜ

s yay parametresi olmak üzere verilen bir $x(s)$ eğrisinin S.Frenet çattısı ,

$$x'(s) = t(s) ,$$

$$\frac{t'(s)}{\|t'(s)\|} = n(s), \quad (6)$$

$$txn = b(s),$$

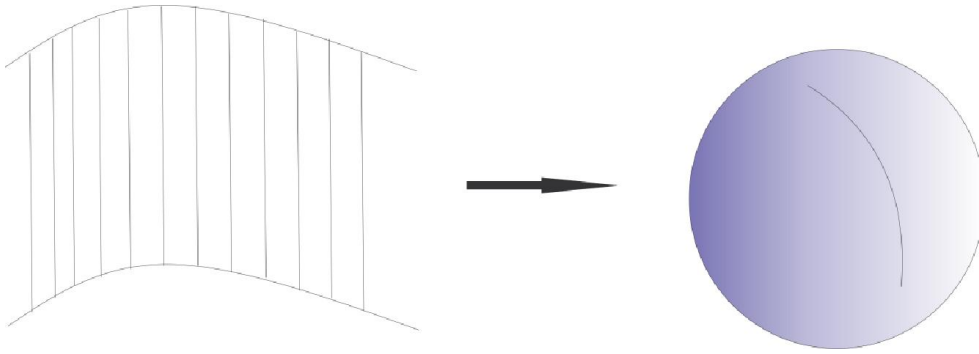
dir. Burada $t(s)$, $x(s)$ eğrisinin teğet birim vektörü; $n(s)$, asal normal birim vektörü ve $b(s)$ ise binormal birim vektörüdür [13].

Açılabilir regle yüzeyler, Gauss dönüşümünün uygulanması ile $b(s)$ binormal vektörünün birim küre üzerinde, binormallerin küresel göstergesi olan bir eğriye dönüşür.

$b(s)$ yerine $q = a + bi + cj + dk$ reel birim kuaterniyonu alınabilir. Bu durumda açılabilir regle yüzeyin küresel görüntüsü SLERP kullanılarak,

$$q(t) = q_1 \frac{\sin(1-t)\varphi}{\sin\varphi} + q_2 \frac{\sin t\varphi}{\sin\varphi}, \quad t \in [0,1]$$

nin çizdiği eğriye dönüşür.



Şekil 3: Açılabilir regle yüzeyin küresel görüntüsü

SLERP ile çizilen eğri, birim kürenin jeodeziklerine yani kürenin büyük çemberlerine karşılık geldiğinden, açılabilir yüzeyler de birim küre üzerinde büyük çember yaylarına karşılık gelir.

7. UYGULAMA

$b(s) = (\sin^2 s, \sin s \cos s, \cos s)$ eğrisi, bir açılabilir yüzeyin küresel görüntüsü olan küresel bir eğri olsun.

q_1 ve q_2 , bu ikisi arasında interpolate edilecek iki kuaterniyon, t , 0.0 (q_1 de) ve 1.0 (q_2 de) arasında bir skaler ve φ , q_1 ve q_2 arasındaki açı olsun. Değerler aşağıdaki şekilde alınmıştır,

$$q_1 = 0i + 0j + 1k, \quad \|q_1\| = 1$$

$$q_2 = \frac{1}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}j + \frac{\sqrt{3}}{2}k, \quad \|q_2\| = 1$$

$$\varphi = 30^\circ, \quad t = 0.5$$

(7) denkleminde ve 6. Bölümden $q(t)$, $b(s)$ yerine alınarak aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$q(t) = \frac{(0i+0j+k) \cdot \sin 15^\circ + (\frac{1}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}j + \frac{\sqrt{3}}{2}k) \cdot \sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$q(t) = \frac{(0i+0j+k) \cdot 0.2598 + (\frac{1}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}j + \frac{\sqrt{3}}{2}k) \cdot 0.2598}{0.5}$$

$$q(t) = \frac{0.2588k + \left(\frac{1}{4} \cdot 0.2588\right)i + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 0.2588\right)j + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.2588\right)k}{0.5}$$

$$q(t) = \frac{(i0.0647 + 0.0647\sqrt{3}j + (0.2588 + 0.1294\sqrt{3})k)}{0.5}$$

$$q(t) = 0.1294i + 0.224127j + 0.965855k. \quad \|q(t)\| \cong 1$$

8. SONUÇ

Bu çalışmada, açılabilir regle yüzeylerin küresel görüntüsü kuarterniyon interpolasyon ile ifade edilmiştir. Bu amaçla, regle ve açılabilir regle yüzeylerle ilgili gerekli hatırlatmalar yapılmış ve açılabilir regle yüzeylerin genel özellikleri verilmiştir. Diğer taraftan SLERP tanıtılmış ve bir açılabilir regle yüzeyin küresel görüntüsü SLERP ile ifade edilmiş ve bunun için bir örnek verilmiştir.

Ayrıca iki açılabilir yüzeyin kesişimi, birim küre üzerindeki jeodeziklerin kesişimine karşılık gelir. Böylece CAD/CAM de yaygın olarak kullanılan açılabilir regle yüzeyler, birim küre üzerindeki eğrilere ve SLERP'in uygulanmasıyla da büyük çember yaylarına indirgenmiştir.

9. REFERANSLAR

1. Boersma, J. and J. Molenaar, "Geometry of the shoulder of a packaging machine", SIAM Review, 37 (3), 406-422, 1995.
2. Frey, W. H. and M. J. Mancewicz, "Developable Surfaces: Properties, Representations and Methods of Design", Technical Report, GM Research Publication GMR-7637, 1992.
3. Pegna, J. and E-E. Wolter, "Geometrical criteria to guarantee curvature continuity of blend surfaces", ASME Journal of Mechanical Design, 114, 201-210, 1992.
4. Kruppa, E., "Analytische und konstruktive Differentialgeometrie", Springer Verlag-Wien-1957.
5. Kreyszig, Erwin, "Differential Geometry", Dover Publications- 1991.
6. Pottmann, Helmut and Johannes Wallner, "Computational Line Geometry", Springer Verlag- 2001.
7. Choi, J-J., "Local canonical cubic curve tracing along surface/surface intersections", Ph.D. thesis, Dept. of Computer Science, POSTECH, February, 1997.
8. Kuipers, Jack B., "Quaternions and Rotation Sequences", Proceedings of the First International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, Varna, Bulgaria, September 1-10, 1999.
9. Hast, Anders, "Shading by Quaternion Interpolation", The 13th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision (WSCG'2005), January 31-February 4, pp 53-56, 2005.
10. Shomake, K., "Animating rotation with quaternion curves", Comput. Graph. Vol 19, No 3, pp 245-254, 1985.
11. Kim, Myung-Soo and Kee-Won Nam, "Interpolating solid orientations with circular blending quaternion curves", Computer-Aided Design, Vol 27, No 5, pp 385-398, 1995.

12. Hanson, Andrew J., “Visualizing Quaternions” , The Morgan Kaufmann Series in interactive 3D Technology- 2006.
13. Guggenheimer, Heinrich, “Diffrential Geometry”, McGraw-Hill Book Company-1963.