

Harmonik Yük Etkisindeki İkiz Oyuk İçeren Yarım Uzayda Zorlanmış Titreşimler

Aydın ÖZMUTLU*, Hasan ENGİN** ve İrfan COŞKUN***

*İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Maslak, İstanbul.

**İTÜ, İnşaat Fakültesi, Mekanik Anabilim Dalı, Maslak, İstanbul.

***YTÜ, İnşaat Fakültesi, Mekanik Anabilim Dalı, Esenler, İstanbul.

Eposta: ozmutlu@itu.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, harmonik yük etkisindeki ikiz dairesel silindirik oyuk içeren elastik yarım uzayın davranışı incelenmiştir. Oyuklar tünel veya boru hattı olarak düşünülmüştür ve zorlama oyuklara yapılmaktadır. Her iki oyukta, merkezinden kendi yerel eksen takımı ile tariflenmiştir. Oyuk yerel eksen takımları arasındaki koordinat dönüşümünde Graf toplama teoremi kullanılmıştır. Çözüm sonunda, zorlama frekansının değişimine, oyuk merkezlerinin serbest yüzeye olan derinliğine ve oyuklar arasındaki mesafenin değişimine göre elde edilen sonuçlar grafikler yardımıyla verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Yarım uzay, İkiz oyuk, Graf toplama teoremi

1. Giriş

Modern şehirler altyapı sistemlerine oldukça bağımlıdır. Yolların ve demiryolları ağının genişlemesini ve gelişmesini sağlayan tüneller, isale, su, petrol, gaz, enerji ve iletişim hatları gibi yeraltı hat sistemleri, sıvı ya da katı yakıtlar için büyük yeraltı depolama yapıları, insanları veya duyarlı donanımları nükleer silahlardan koruyan sığınaklar ve enerji santralleri gibi yeraltı yapıları ülkelerin gelişmesinde çok önemli bir rol oynamaktadır. Bu önemine binaen yeraltı yapılarının iç veya dış dinamik zorlamalar veya deprem yükleri altında güvenli olarak tasarlanması gerekmektedir.

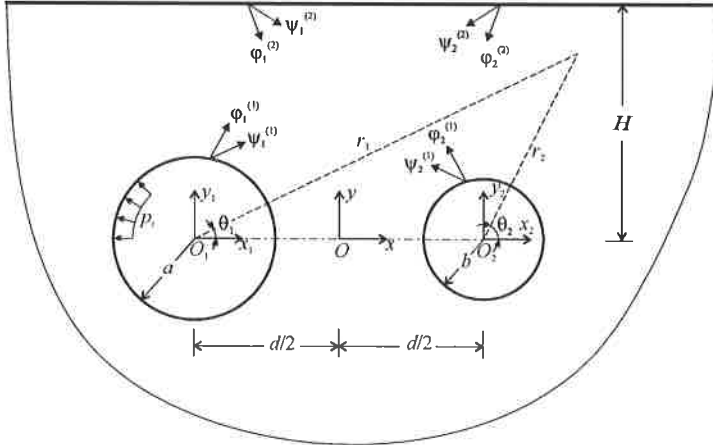
Yapılan çalışmalara bakıldığında, boşluk veya farklı tipten bir malzeme içeren elastik bir ortamın dinamik etkiler altındaki davranışı, geçmişte Eringen ve Şuhubi [1] ve Graff [2] tarafından etraflıca incelenmiştir. İkiz oyuk içeren yarım uzayda, dalga probleminin ilk çözümlerinden biri Balendra ve diğ. [3] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada düzlem harmonik SH dalgası etkisinde dairesel enkesitli paralel ikiz tünel içeren yarım uzayın kararlı çözümleri elde edilmiştir. Serbest yüzeydeki sınır koşullarının sağlatılmasında yansıma tekniği kullanılmıştır. İkiz oyuk içeren bir ortamın üç eksenli dinamik davranışını Guan ve Moore [4,5]

ardışık yansımalar tekniğini kullanarak incelemiştir. Liang ve diğ. [6,7] düzlem SV ve P dalgaları etkisindeki ikiz yer altı tüneline için Fourier-Bessel seri açılım tekniği kullanarak bir seri çözüm önermişlerdir.

Bu çalışmada, oyukların eksenı boyunca geometri, ortamın malzeme özellikleri ve zorlama değişmediğinden problem bir düzlem şekildeğıştirme problemi olarak ele alınmıştır. Navier's hareket denkleminde Helmholtz ayrışımı yapılarak, hareket denkleminin kutupsal koordinatlarda iki ayrı dalga denkleminde indirgenmiştir. İndirgenmiş dalda denklemlerinin çözümü, iki yerel eksen takımında Fourier-Bessel serisi şeklinde elde edilmiştir. Oyuk yerel eksen takımları arasındaki dönüşümde Graf toplama teoremi kullanılmıştır. Böylece oyuk yüzeylerindeki sınır koşulları tam olarak sağlatılmıştır. Serbest yüzeydeki sınır koşulları En küçük kareler yöntemi kullanılarak yaklaşık olarak sağlatılmıştır.

2. Model ve Çözüm Yöntemi

Problemın geometrisi Şekil 1'de görölmektedir. Elastik bir yarım uzayda, yarıçapları a_1 ve a_2 , oyuk merkezleri arasındaki mesafe d ve merkezlerinden serbest yüzeye H kadar derinlikte olan iki dairesel silindirik oyuk bulunmaktadır. 1. oyuk $p_1 = p_0 e^{-i\omega t}$ şeklinde bir harmonik yükü yüklenmiş ve 2. oyuk yüksüzdür. Oyukların eksenı boyunca geometri, ortamın malzeme özellikleri ve zorlama değışmektedir Bu durumda problem düzlem şekildeğıştirme hali olarak ele alınır.



Şekil 1 Problemin geometrisi

Navier denkleminin kutupsal koordinatlarda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\vec{U} + \mu\nabla^2\vec{U} = \rho\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2} \quad (1)$$

Burada $\vec{U}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2, t)$ yerdeğıştirme vektörünü, ρ kütle yoğunluğunu, λ ve μ Lamé değışmezlerini, 1 ve 2 indisleri oyukları tariflemektedir. Zorlama harmonik olduğı için ortamın davranışı da harmonik olacaktır. Böylece yerdeğıştirme vektörü $\vec{U}(r_1, \theta_1, t) = \vec{u}(r_1, \theta_1)e^{-i\omega t}$ şeklinde yazılabilir ve (1.1) denkleminde yerine koyulursa zaman çarpanı düşer. Bu durumda hareket denkleminin aşağıdaki gibi yazılır.

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\bar{u} + \mu\nabla^2\bar{u} + \rho\omega^2\bar{u} = 0 \quad (2)$$

Yerdeğiştirme vektörü Helmholtz potansiyelleri φ ve ψ cinsinden yazılabilir. Lineer teori kullanılırsa, her iki oyuktaki toplam dalga potansiyelleri φ_1 ve ψ_1 için

$$\varphi_i(r_i, \theta_i) = \varphi_i^{(1)}(r_i, \theta_i) + \varphi_i^{(2)}(r_i, \theta_i), \quad i = 1, 2 \quad (3a)$$

$$\psi_i(r_i, \theta_i) = \psi_i^{(1)}(r_i, \theta_i) + \psi_i^{(2)}(r_i, \theta_i), \quad i = 1, 2 \quad (3b)$$

yazılabilir. Böylece yerdeğiştirme vektörü potansiyel fonksiyonlar cinsinden

$$\bar{u} = \bar{\nabla}[\varphi_1(r_1, \theta_1) + \varphi_2(r_2, \theta_2)] + \text{Rot}\{[\psi_1(r_1, \theta_1) + \psi_2(r_2, \theta_2)]\bar{e}_z\} \quad (4)$$

şeklinde yazılır. (4) ifadesi (2) bağıntısında yerine koyulursa aşağıdaki iki adet ayrık dalga denkleminde ulaşılır.

$$\nabla^2\varphi_i + k_i^2\varphi_i = 0, \quad \nabla^2\psi_i + k_i^2\psi_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

Burada $k_1 = \omega\sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}$ boyuna dalga sayısı ve, $k_2 = \omega\sqrt{\rho/\mu}$ enine dalga sayısıdır. İndirgenmiş dalda denklemleri çarpanlara ayırma yöntemi kullanılarak çözümlerse iki yerel eksen takımı için Fourier-Bessel serisi şeklinde elde edilir. 1. oyuktaki dalga denkleminin çözümü,

$$\varphi_1^{(1)}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_1 r_1) [A_{1n} \cos n\theta_1 + B_{1n} \sin n\theta_1] \quad (6a)$$

$$\psi_1^{(1)}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_2 r_1) [C_{1n} \sin n\theta_1 + D_{1n} \cos n\theta_1] \quad (6b)$$

ve 2. oyuktaki dalga denkleminin çözümü de,

$$\varphi_2^{(1)}(r_2, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_1 r_2) [E_{2n} \cos n\theta_2 + F_{2n} \sin n\theta_2] \quad (7a)$$

$$\psi_2^{(1)}(r_2, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_2 r_2) [G_{1n} \sin n\theta_2 + H_{1n} \cos n\theta_2] \quad (7b)$$

olarak elde edilir. Burada $H_n^{(1)}(\cdot)$ birinci nevi Hankel fonksiyonudur. Elde edilen bu Fourier-Bessel serisi sonsuzda Sommerfeld ışınma koşulunu sağlamaktadır. Modelimiz tam uzay modelinden farklı olarak, serbest yüzeyinden sınırlı yarım uzay modeli olduğundan, ortamda yayılan dalgaların serbest yüzey sınırından yansımaları da söz konusudur. Bu nedenle harmonik iç zorlamadan dolayı 1. ve 2. silindirik oyukta meydana gelen titreşimlerden doğan dalgaların serbest yüzeyden yansımaları sonucu oluşan yeni dalga potansiyelleri $\varphi_i^{(2)}$ ve $\psi_i^{(2)}$ sırası ile 1. Oyukta

$$\varphi_1^{(2)}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_1 r_1) [A_{2n} \cos n\theta_1 + B_{2n} \sin n\theta_1] \quad (8a)$$

$$\psi_1^{(2)}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_2 r_1) [C_{2n} \sin n\theta_1 + D_{2n} \cos n\theta_1] \quad (8b)$$

ve 2. Oyukta

$$\varphi_2^{(2)}(r_2, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_1 r_2) [E_{2n} \cos n\theta_2 + F_{2n} \sin n\theta_2] \quad (9a)$$

$$\psi_2^{(2)}(r_2, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_2 r_2) [G_{2n} \sin n\theta_2 + H_{2n} \cos n\theta_2] \quad (9b)$$

olacaktır. Bu ifadelerdeki $J_n(\cdot)$ birinci nevi Bessel fonksiyonudur. Aşağıda Bessel

fonksiyonları ile Hankel fonksiyonları arasındaki bağıntı kullanılıp potansiyeller yeniden düzenlenirse 1. Oyukta

$$\varphi_1(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [A_{1n} J_n(k_1 r_1) + A_{2n} Y_n(k_1 r_1)] \cos n\theta_1 + [B_{1n} J_n(k_1 r_1) + B_{2n} Y_n(k_1 r_1)] \sin n\theta_1 \right\} \quad (10a)$$

$$\psi_1(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [C_{1n} J_n(k_2 r_1) + C_{2n} Y_n(k_2 r_1)] \sin n\theta_1 + [D_{1n} J_n(k_2 r_1) + D_{2n} Y_n(k_2 r_1)] \cos n\theta_1 \right\} \quad (10b)$$

ve 2. oyukta,

$$\varphi_2(r_2, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [E_{1n} J_n(k_1 r_2) + E_{2n} Y_n(k_1 r_2)] \cos n\theta_2 + [F_{1n} J_n(k_1 r_2) + F_{2n} Y_n(k_1 r_2)] \sin n\theta_2 \right\} \quad (11a)$$

$$\psi_2(r_2, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [G_{1n} J_n(k_2 r_2) + G_{2n} Y_n(k_2 r_2)] \sin n\theta_2 + [H_{1n} J_n(k_2 r_2) + H_{2n} Y_n(k_2 r_2)] \cos n\theta_2 \right\} \quad (11b)$$

dir. Burada $J_n(\cdot)$ ve $Y_n(\cdot)$ sırası ile 1. ve 2. tip Bessel fonksiyonlarıdır. Bilinmeyen katsayılar ($A_{in}, B_{in}, C_{in}, D_{in}, E_{in}, F_{in}, G_{in}$ ve H_{in}) sınır koşulları sağlatılarak elde edilecektir.

Kutupsal koordinatlarda ortamdaki yerdeğiştirme ve gerilmelerin potansiyel fonksiyonlar cinsinden ifadesi aşağıda verilmiştir.

$$u_r = \frac{\partial \varphi_i}{\partial r_i} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_i}, \quad u_\theta = \frac{1}{r_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \psi_i}{\partial r_i}, \quad i=1, 2 \quad (12)$$

$$t_{rr} = \lambda \nabla^2 \varphi_i + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r_i^2} + \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{1}{r_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_i} \right) \right], \quad i=1, 2 \quad (13a)$$

$$t_{\theta\theta} = \lambda \nabla^2 \varphi_i + \frac{2\mu}{r_i} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r_i} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \theta_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta_i} - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial r_i \partial \theta_i} \right), \quad i=1, 2 \quad (13b)$$

$$t_{r\theta} = \mu \left\{ 2 \left(\frac{1}{r_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r_i \partial \theta_i} - \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta_i} \right) + \left[\frac{1}{r_i^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \theta_i^2} - r_i \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{1}{r_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial r_i} \right) \right] \right\}, \quad i=1, 2 \quad (13c)$$

2.1. Sınır Koşulları

Seri çözümlerinde alınabilecek terim sayısı sınırlıdır bu yüzden belli bir (N) sayısında kesilmesi gerekir. Bu durumda (10) ve (11) çözümlerine bakacak olursak, $16N+16$ adet bilinmeyen ortaya çıkmaktadır. Bu bilinmeyenler oyuk yüzeylerinde ve serbest yüzey üzerinde yazılan sınır koşulları sağlatılarak elde edilecektir.

2.1.1 1. Oyuktaki sınır koşulları

$$t_{\eta\eta} \Big|_{\eta=a_1} = -p_1, \quad t_{\eta\theta} \Big|_{\eta=a_1} = 0 \quad (14)$$

Oyukların üzerindeki sınır koşullarının kapalı sağlatılabilmesi için (r_1, θ_1) ve (r_2, θ_2) yerel eksen takımların arasında dönüşüme ihtiyaç vardır. Bu dönüşüm için aşağıda verilen Graf toplama teoremi kullanılmıştır.

$$C_n(k, r_2) \begin{cases} \cos n\theta_2 \\ \sin n\theta_2 \end{cases} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} [C_{m-n}(k, d) \pm (-1)^n C_{m+n}(k, d)] J_m(k, r_1) \begin{cases} \cos m\theta_1 \\ \sin m\theta_1 \end{cases}, \quad i=1, 2 \quad (15)$$

Burada $C_n(\cdot)$ ile Bessel $J_n(\cdot)$ veya $Y_n(\cdot)$ karşı gelmekte olup ayrıca ε_m aşağıdaki gibidir.

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (16)$$

Dönüşüm bağıntısı kullanılarak elde edilecek potansiyellerden türetilen gerilmelerden, gerilme sınır koşullarının sağlatılması ile $4N+4$ adet bağıntı elde edilir.

2.1.2.2. Oyuktaki sınır koşulları

$$t_{r_2 r_2} \Big|_{r_2=a_2} = 0, \quad t_{r_2 \theta_2} \Big|_{r_2=a_2} = 0 \quad (17)$$

Benzer şekilde 2. oyuk üzerindeki sınır koşullarının kapalı sağlatılabilmesi için (r_1, θ_1) yerel eksen takımında (r_2, θ_2) yerel eksen takımına dönüşüm yapılmalıdır. Bu dönüşüm için ise aşağıda verilen Graf toplama teoremi kullanılmıştır.

$$C_n(k, r_1) \begin{cases} \cos n\theta_1 \\ \sin n\theta_1 \end{cases} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} [C_{n-m}(k, d) \pm (-1)^m C_{m+n}(k, d)] J_m(k, r_2) \begin{cases} \cos m\theta_2 \\ \sin m\theta_2 \end{cases}, \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

Dönüşüm bağıntısı kullanılarak elde edilecek potansiyellerden türetilen gerilmelerden, 2. oyuk üzerindeki gerilme sınır koşullarının sağlatılması ile $4N+4$ adet bağıntı elde edilir. Böylece oyuklar üzerinde yazılan sınır koşullarından toplam $8N+8$ adet bağıntı elde edilir. Geri kalan bilinmeyenler serbest yüzeyde yazılan sınır koşullarının sağlatılması ile elde edilecektir.

2.1.2 Serbest yüzeydeki sınır koşulları

$$t_{yy} \Big|_{y=H} = 0, \quad t_{xy} \Big|_{y=H} = 0 \quad (19)$$

Serbest yüzey üzerinde hem normal gerilme hem de kayma gerilmesi sıfırdır. Bu sınır koşulları serbest yüzeyin her noktasında sağlatılmalıdır. Başka bir deyişle, serbest yüzeyde sonsuz sayıda var demektir. Oysa çözüm serilerinde alınacak terimler sonlu sayıda olduğundan, bilinmeyenlerin bulunması için sonlu sayıda bağıntıya ihtiyacımız vardır. Sonlu sayıda koşulla gerilme sınır koşulları her noktada sağlatılamayacağına göre gerilmelerin bileşkesinin en küçük yapılmasına çalışılabilir. Bu amaçla aşağıdaki en küçük kareler yöntemi kullanılmıştır.

$$\Pi = \sum_{k=1}^S \left[\left(t_{yy}^{(s)} - \hat{t}_{yy}^{(s)} \right)^2 + \left(t_{xy}^{(s)} - \hat{t}_{xy}^{(s)} \right)^2 \right] \quad (20)$$

Burada S serbest yüzeyde alınan nokta sayısını, $t_{yy}^{(s)}$ ve $t_{xy}^{(s)}$ yüzey üzerindeki herhangi bir s noktasında hesaplanan gerilme bileşenlerini, $\hat{t}_{yy}^{(s)}$ ve $\hat{t}_{xy}^{(s)}$ yüzey üzerindeki herhangi bir s noktasına dışarıdan etkileyen gerilme bileşenlerini göstermektedir. Bizim problemimizde serbest yüzeye dışarıdan bir gerilme etkilediği için $\hat{t}_{yy}^{(s)}$ ve $\hat{t}_{xy}^{(s)}$ sıfırdır. Oyukların yüzeyinde yazılan sınır koşullarından bilinmeyenlerin yarısı diğer yarısı cinsinden elde edilmişti. Serbest yüzeydeki (20) toplamını en küçük için geri kalan serbest bilinmeyenlere görev türev alınırsa $8N+8$ adet bağıntı elde edilir. Elde edilen bu lineer denklem takımı çözülerek katsayılar hesaplanır.

Kaynaklar

- [1] Eringen, A.C. and Şuhubi, E.S., *Elastodynamics*, (1975) Vol II, Academic Press, New York.
- [2] Graff, K.F., *Wave motion in elastic solids*, (1991) Dover Publications, New York.
- [3] Balendra, T., Thambiratnam, D.P., Koh, C.G. and Lee, S.L., “Dynamic response of twin circular tunnels due to incident SH-waves”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **12**, (1984), 181-201.
- [4] Guan, F. and Moore, I.D., “Three-dimensional dynamic response of twin cavities due to traveling loads”, *Journal of Engineering Mechanics*, **120**, (1994), 637-651.
- [5] Guan, F. and Moore, I.D., “Three-dimensional dynamic response of lined tunnels due to incident seismic waves”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **25**, (1996), 357-369.
- [6] Liang, J.W., Zhang, H. and Lee, V.W., “A series solution for surface motion amplification due to underground twin tunnels: Incident SV waves”, *International Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, **2**, (2003), 289-298.
- [7] Liang, J.W., Zhang, H. and Lee, V.W., “A series solution for surface motion amplification due to underground group cavities: Incident P waves”, *ACTA Seismologica Sinica*, **17**, (2004), 296-307.
- [8] Watson, G.N., 1958. *A treatise of the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, London.