

Anizotropik bir plakadaki elastik dalganın modellenmesi
ve simülasyonları

Demet ERSOY^{a,1} & Valery G.YAKHNO^b

^a *Matematik Bölümü, İzmir Ekonomi Üniversitesi, BALÇOVA, 35330, İzmir*

^b *Mühendislik Fakültesi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Kaynaklar Kampüsü, BUCA, 35160, İzmir*

Abstract

A plane wave drops on one side of the plate with a given thickness. The polarization of this plane wave is perpendicular to the surface of the plate. The material of the plate is homogeneous and anisotropic with a general triclinic structure of the anisotropy. A problem of the construction of the time-dependent displacement field arising inside of this anisotropic plate is a object of this paper. The linear system of anisotropic elasticity with special boundary and initial conditions is taken as a mathematical model describing this physical process. An initial boundary value problem (IBVP) is stated in terms of the anisotropic elasticity system and a new method of solving this problem is suggested in the paper. The results of our paper are explicit formulae for the displacement field which are constructed by the suggested method. Using these formulae, we obtain the simulation of the elastic waves arising inside this anisotropic plate. The simulation is presented by graphs.

Keywords: Elastic wave, time-dependent system of anisotropic elasticity, initial boundary value problem (IBVP), simulation.

¹İlgili yazar, telefon: 02324888307 email: demet.ersoy@ieu.edu.tr

Özet

Kalınlığı verilen bir plakanın belirli bir yüzeyine bir düzlem dalgası isabet ettirilmiş ve bu düzlem dalgasının polarizasyonu, plakanın yüzeyine dik olacak bir şekilde oluşturulmuştur. Plaka, homojen ve genel triklinik (üç eksenli) bir yapıya sahip, anizotropik bir malzeme olarak düşünülmüştür. Bu çalışmanın temel amacı anizotropik bir plaka içerisinde meydana gelen zamana bağlı yer değiştirme alanının oluşturulması problemi. Bu fiziksel olayı modelleyebilmek için başlangıç ve özel sınır koşullarını içeren doğrusal bir anizotropik elastisite sistemi ele alınmıştır. Çalışmadaki başlangıç ve sınır değer problemi (BSDP), anizotropik elastisite sistemi ile belirtilmiş ve çözümü için yeni bir yöntem önerilmiştir. Çalışmadan alınan sonuç, yer değiştirme alanı için önerilen yeni yöntemle oluşturulmuş açık formüllerdir. Bu formüller kullanılarak anizotropik plaka içerisinde meydana gelen elastik dalgaların simülasyonları elde edilmiş ve bu simülasyonlar grafiksel olarak verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Elastik dalga, zamana bağlı anizotropik elastisite sistemi, başlangıç sınır değer problemi (BSDP), simülasyonu.

1.1 Anizotropik Elastisite

Anizotropik elastisite kavramı, günümüzde araştırmacıların üzerinde yoğun olarak durduğu ve birçok mühendislik dalında, malzeme biliminde vs. uygulanan bir çalışma alanıdır [13].

Fiziksel bir bakış açısıyla elastisite, belirli kuvvetlerin tesiri altındaki maddede oluşan şekil değişikliği (deformasyon) ile kuvvetlerin ortadan kalkması halinde maddenin ilk haline dönme eğilimini göstermesi özelliğidir [9; 12]. Matematiksel olarak da, kuvvet ile şekil değiştirme arasındaki doğrusal ilişkiye karşılık gelir ve deformasyonların son derece az kabul edilmesi ile doğrusal olmayan elastisite teorisinin daha basitleştirilmiş halidir.

İzotropik bir maddede, kuvvet ile deformasyon arasındaki doğrusal bağıntı, iki bağımsız sabiti olan elastisite modülü ile verilebilir. İzotropi, bir maddede fiziksel özelliklerin yöne bağlı olmasıdır. Başka bir deyişle, maddenin her yönde aynı fiziksel özelliğe sahip olmasıdır. Sıvı ve gazlar izotropik maddelerdir. Buna karşılık, anizotropik maddede fiziksel özellikler, yöne göre değişir ve elastisite modülü $\{C_{jklm}\}_{j,k,l,m=1}^3$, dördüncü dereceden olup 21 bağımsız sabit içerir. Kristaller, anizotropik maddelere örnek oluşturur.

Geçmişten günümüze, anizotropik elastisite sisteminin çözümünde birçok analitik ve nümerik yöntemler uygulandı. 1950 yılında Lekhnitskii, 'Lekhnitskii formalizmi' adında bir formalizm geliştirdi. 1956 yılında Stroh, bu formalizmden çıkan sonuçlarla, 'Stroh formalizmi' adıyla bilinen alternatif bir formalizm önerdi [12]. Son yıllarda kullanılan diğer yöntemler ise: 'Sonlu eleman yöntemi'[2], 'Green fonksiyonları yöntemi' [17], 'Polinomsal çözüm yöntemi'[15; 16].

Bu çalışmada, zamana bağlı yer değiştirme alanı oluşturmak için anizotropik elastisite sistemi ile belirtilen başlangıç sınır değer problemi ele alındı. 1.Bölümde, anizotropik elastisite sistemi tanımlandı ve fiziksel yorumu yapıldı. 2.Bölümde, sistem bazı varsayımlar altında dalga denklemlerinin başlangıç sınır değer problemine indirildi. 3.Bölümde indirgenen problemin çözümü için yeni bir yöntem önerildi. Kısmi diferensiyel denklemler ve matris teorilerini de kullanarak problemin çözümü 4.bölümde elde edildi. Açık bir şekilde ifade edilen çözümün ve MATLAB kodlarının yardımıyla, elastik dalga yayılımlarının simülasyonları alındı ve analizleri yapıldı.

1.2 Problemin kurulumu

Bu çalışmada, üç boyutlu bir uzaydaki yer değiştirme değişkeni olarak $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$; zaman değişkeni olarak da t düşünülmüştür. İki sonsuz düzlemden birisi

$$P_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, x_3 = 0\};$$

diğeri de

$$P_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, x_3 = \ell\}$$

olsun. C_{jklm} elastisite modülü ve ρ yoğunluğu ile nitelendirilen bir homojen anizotropik malzeme, yukarıdaki iki düzlemin arasına yerleştirilmiş ve P_1 düzlemindeki her nokta, $t = 0$ zamanında, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ vektörü ile özdeş bir kutuplaşmaya sahip olan bir düzlem dalgasına maruz kalmıştır. Buna karşılık, malzemenin P_2 düzlemine karşılık gelen yüzeyinde herhangi bir içsel-dışsal kuvvet veya kaynak bulunmamaktadır. Anizotropik elastisitenin fiziksel süreci, sistemin başlangıç ve sınır değer problemi ile aşağıdaki gibi modellenmiştir:

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3, t > 0, j = 1, 2, 3, \quad (1.2.1)$$

$$\begin{aligned} u_j(\mathbf{x}, t)|_{t=0} &= 0, \quad j = 1, 2, 3, \\ \sum_{\ell, m=1}^3 C_{j\ell m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \Big|_{x_3=+0} &= -\delta_{3j} \cdot \delta'(t), \quad \sum_{\ell, m=1}^3 C_{j\ell m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \Big|_{x_3=\ell-0} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Denklemler (1.2.1) deki σ_{jk} notasyonu her bir $j, k = 1, 2, 3$ alt indisi için $\sigma_{jk} = \sum_{\ell, m=1}^3 C_{jklm} \frac{\partial u_j}{\partial x_m}$ ile ifade edilir. Zaman değişkenini belirleyen T pozitif sayısı, denklem (1.2.1) deki ρ sabiti ve her j, k, ℓ, m indisi için $\{C_{jklm}\}_{j, k, \ell, m=1}^3$ sabiti bilinmekte olup; başlangıç ve sınır koşullarındaki zaman değişkenine bağlı fonksiyon $\delta(t)$, bir Dirac delta fonksiyonu; δ_{3j} ise Kronecker deltası olarak kullanılmıştır.

Dış kuvvete maruz kalan bir maddede oluşan deformasyon (şekil değişikliği), her bir noktanın yer değiştirmesiyle meydana gelir ve bu yer değiştirme hareketi $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ vektörüyle ifade edilmektedir. Yer değiştirme vektörünün her j 'nci $u_j(\mathbf{x}, t)$ bileşeni, \mathbf{x} ve t değişkenlerine bağlı birer fonksiyondur.

BDSP'nin temel amacı, (1.2.1) – (1.2.2) eşitliklerini sağlayan, konum ve zaman değişkenlerine bağlı bilinmeyen $u_j(\mathbf{x}, t)$ fonksiyonunu bulmaktır [16].

1.2.1 Varsayımlar

Elastik sistemin varsayımlarından ilki elastisite modülünün sağlaması gereken özellikleridir. C_{jklm} elastisite modülü pozitif tanımlıdır ve tam simetri özelliğini sağlar:

$$C_{jklm} = C_{lmjk} = C_{m\ell jk} = C_{jkm\ell}. \quad (1.2.3)$$

Dördüncü dereceden bir elastisite modülü, indisleriyle ilgili dönüşüm uygulandığında yani, $jklm$ indisleri yerine $\alpha\beta$ indisleri aşağıdaki kurala

$$\alpha = \begin{cases} i, & \text{if } i = j, \\ 9 - i - j, & \text{if } i \neq j; \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} k, & \text{if } k = \ell, \\ 9 - k - \ell, & \text{if } k \neq \ell. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

göre kullanıldığında ve indislerin

$$\begin{aligned} (1, 1) &\rightarrow 1, & (2, 3), (3, 2) &\rightarrow 4 \\ (2, 2) &\rightarrow 2, & (1, 3), (3, 1) &\rightarrow 5 \\ (3, 3) &\rightarrow 3, & (1, 2), (2, 1) &\rightarrow 6 \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

şeklini almasıyla 6×6 reel, simetrik ve pozitif tanımlı bir matris olarak yazılabilir [9; 8; 4; 12]:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} = (C_{\alpha\beta})_{6 \times 6} \quad (1.2.6)$$

1.3 Sistemin indirgenmesi

Konum vektörünün x_1 ve x_2 bileşenlerine bağlı olmayan bir u_j yer değiştirme vektörü bulabiliriz ki [16] deki indirgemeye benzer olarak, bu yer değiştirme vektörü ile (1.2.1) – (1.2.2) nolu denklemler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = A_{33} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_3^2}, \quad x_3 \in [0, \ell], \quad t > 0; \quad j = 1, 2, 3; \quad (1.3.1)$$

$$A_{33} \frac{\partial u_j}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} = -\delta_{3j} \cdot \delta'(t), \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.3.2)$$

$$A_{33} \frac{\partial u_j}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\ell-0} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.3.3)$$

Ayrıca, kısmi diferensiyel denklemdeki A_{33} matrisi

$$A_{33} = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} & C_{35} \\ C_{45} & C_{44} & C_{34} \\ C_{35} & C_{34} & C_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.3.4)$$

şeklinde. A_{33} matrisini incelediğimizde, \mathbf{C} matrisinin bileşenlerinden meydana gelmesi nedeniyle, reel sayılardan oluşan simetrik ve pozitif tanımlı bir matris olduğunu görürüz. Bu nedenle, A_{33} matrisinin sahip olduğu λ_j , $j = 1, 2, 3$ özdeğerlerinin hepsi pozitif birer reel sayıdır. Bu durumda matris teorisine göre A_{33} matrisini, kendi özdeğerlerinden oluşan bir \mathbf{D} köşegen matrisi halinde yazabilmek için dikey bir $\mathbf{T} = (t_{ij})_{3 \times 3}$ matrisi vardır [12]. Öyleki \mathbf{T}^* , \mathbf{T} matrisinin transpozunu (devriğini) simgelerse

$$\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{A}_{33} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{D}, \quad (1.3.5)$$

eşitliğindeki köşegen matris $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_j, j = 1, 2, 3)$ şeklindedir. Ayrıca, yer değiştirme vektörü $\mathbf{u}(x_3, t)$ için dikey \mathbf{T} matrisi ile

$$\mathbf{u}(x_3, t) = \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(x_3, t) \quad (1.3.6)$$

şeklinde yazılabilecek bir $\tilde{\mathbf{u}}(x_3, t)$ vektörü bulunur. Eşitlik (1.3.6) ile problem (1.3.1) – (1.3.3), aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial t^2} = d_j^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_3^2}, \quad x_3 \in (0, \ell), t > 0; j = 1, 2, 3, \quad (1.3.7)$$

$$\tilde{u}_j(x_3, t) \Big|_{t < 0} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.3.8)$$

$$d_j^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=+0} = -\frac{1}{\rho} \cdot t_{3j} \cdot \delta'(t), \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.3.9)$$

$$d_j^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=\ell-0} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.3.10)$$

Diferensiyel denklemdaki katsayı d_j her $j = 1, 2, 3$ için $d_j = \sqrt{\frac{\lambda_j}{\rho}}$ $\rho > 0$, şeklindedir.

1.4 Çözüm bulma yöntemi

Bu bölümde, problemin çözümünü bulmak için daha önceden de bahsedilen teknik tanıtılacaktır. İşlemlerin daha kolay olması için aşağıdaki dönüşüm [10], x_3 konum değişkenine uygulanacaktır:

$$z_1 = \begin{cases} \frac{x_3}{d_1}, & x_3 \in (0, \frac{\ell}{d_1}), x_3 = d_1 z_1; \end{cases} \quad (1.4.1)$$

$$z_2 = \begin{cases} \frac{x_3}{d_2}, & x_3 \in (0, \frac{\ell}{d_2}), x_3 = d_2 z_2; \end{cases} \quad (1.4.2)$$

$$z_3 = \begin{cases} \frac{x_3}{d_3}, & x_3 \in (0, \frac{\ell}{d_3}), x_3 = d_3 z_3. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Dönüşümden sonra elde edilen z_1, z_2, z_3 yeni konum değişkenleri ile her değişkene ayrı ayrı bağlı olan

$$v_j(z_j, t) = \tilde{u}_j(x_3(z_j), t), \quad j = 1, 2, 3.$$

yer değiştirme vektörleri ele alınacaktır. Bu yeni vektörlerin problemde yerleştirilmesiyle aşağıdaki başlangıç ve sınır değer problemi elde edilecektir:

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_j}{\partial z_j^2}, \quad z_j \in (0, \frac{\ell}{d_j}), \quad t \in \mathbf{R}; j = 1, 2, 3, \quad (1.4.4)$$

$$v_j(z_j, t) \Big|_{t < 0} = 0, \quad z_j \in (0, \frac{\ell}{d_j}); j = 1, 2, 3, \quad (1.4.5)$$

$$d_j \frac{\partial v_j}{\partial z_j} \Big|_{z_j = +0} = -\frac{1}{\rho} \cdot t_{3j} \cdot \delta'(t), \quad t \in \mathbf{R}; j = 1, 2, 3, \quad (1.4.6)$$

$$d_j \frac{\partial v_j}{\partial z_j} \Big|_{z_j = -0} = 0, \quad t \in \mathbf{R}; j = 1, 2, 3. \quad (1.4.7)$$

Yine $j = 1, 2, 3$ için katsayılar $d_j = \sqrt{\frac{\lambda_j}{\rho}}$, $\rho > 0$ şeklinde dir.

Bu durumda, daha önceden anizotropik malzemede ki noktaların $x_3 = 0$ ve $x_3 = \ell$ düzlemleri ile ifade edilebilen yüzeyleri arasındaki yer değiştirme problemi, dönüşümün uygulanması ile birlikte her $j = 1, 2, 3$ için $z_j = 0$ ve $z_j = \frac{\ell}{d_j}$ düzlemleri ile ifade edilebilen yüzeyleri arasındaki yer değiştirme problemine karşılık gelecektir. Bu problemin çözümü karakteristik doğrular üzerinde incelenecektir ama karakteristikler üzerinde bulunan süreksizlik noktalarından dolayı problemin çözümü

$$v_j(z_j, t) = v_j^*(z_j, t) + w(z_j, t) \quad (1.4.8)$$

şeklinde, iki özel fonksiyonun toplamı olarak belirtilecektir. Bu iki fonksiyondan ilki olan $v_j^*(z_j, t)$, $j = 1, 2, 3$, BSDP (1.4.4) – (1.4.7) nin çözümündeki ve çözümün birinci ve ikinci türevlerindeki süreksizlik noktalarını içerir, geriye kalan $w(z_j, t)$, $j = 1, 2, 3$ fonksiyonu en az ikinci dereceye kadar türevlenebilen bir fonksiyondur.

Belirli bir T zamanına kadar, herbir j^i inci bileřen olan $v_j^*(z_j, t)$ fonksiyonunun formu $z_j \in (0, \ell_j)$ için

$$v_j^*(z_j, t) = \theta_0(t) \sum_{i \geq 1} \left[\alpha_i(z_j) \delta_0(t + \chi z_j - \tau_i^j) + \beta_i(z_j) \theta_0(t + \chi z_j - \tau_i^j) + \gamma_i(z_j) \theta_1(t + \chi z_j - \tau_i^j) \right], \quad (1.4.9)$$

şeklinde dir. Eşitlikteki $i = (i_1, \dots, i_s)$ indeksi birden fazla bileşene sahip bir indekstir. Katsayılar üzerindeki j alt indeksi $v^*(z, t)$ fonksiyonunun j . bileşenine olan $v_j^*(z_j, t)$ fonksiyonuna karşılık gelmesi ile ilgili olarak kullanılan bir notasyondur. $\delta(t)$ fonksiyonu 'Dirac delta fonksiyonu' nu; δ_{3j} notasyonu herbir $j = 1, 2, 3$ için Kronecker sembolünü belirtirken $\Theta_0(t)$ Heaviside Basamak fonksiyonunu ifade eder. Ayrıca $\Theta_k(t) = \frac{1}{k!} t^k \Theta_0(t)'$ dir. Her bir $v_j^*(z_j, t)$, $j = 1, 2, 3$ fonksiyonunu bulmak için bilinmeyen $\alpha_i(z_j), \beta_i(z_j), \gamma_i(z_j)$ katsayıları belirlenmelidir [10].

Fonksiyonların içinde ki ifadeler, sıfıra eşit olma durumunda karakteristik doğrularını verir [10]. Fonksiyonların içerisinde yer alan $t + \chi z_j - \tau_i^j$ ifadeleri sıfıra eşit olduğunda karakteristik eğrilerin denklemini ifade eder. Buna göre her bir $j = 1, 2, 3$ için τ_j ve χ parametreleri

$$\tau_i^j = \begin{cases} 0, & i=1, \\ 2\ell_j, & \text{if } i=(1,0) \end{cases} \quad \text{and} \quad \chi = \begin{cases} -1, & i=1, \\ +1, & \text{if } i=(1,0) \end{cases}$$

$$\tau_{i_1, \dots, i_s}^j = \begin{cases} s \cdot \ell_j, & \text{if } i_s = 0, \\ (s-1) \cdot \ell_j, & \text{if } i_s = 1, \end{cases} \text{ and } \chi = \begin{cases} +1, & \text{if } i_s = 0, \\ -1, & \text{if } i_s = 1, \end{cases}$$

Ayrıca eşitlikteki $i = (i_1, \dots, i_s)$ indeksi $i = 1, i = (1, 0), i = (1, 0, 1), \dots, i = (1, 0, \dots, 0, 1)$ şeklinde değerler alabilir ve dalga yayılımının izlediği yolu temsil eder. Mesela $i = 1$ olduğunda elastik dalga, $z_j = 0$ kaynağından çıkmış $z_j = \frac{\ell}{d_j}$ sınırına doğru ilerlemektedir. Ve bu fiziksel süreç şöyle devam eder: $i = (1, 0)$ olduğunda elastik dalga $z_j = \frac{\ell}{d_j}$ sınırına geçmiş $z_j = 0$ sınırına doğru ilerlemekte iken devamında yani $i = (1, 0, 1)$ olduğunda, $z_j = 0$ sınırına geldikten sonra tekrar $z_j = \frac{\ell}{d_j}$ sınırına doğru ilerlemektedir [10].

BSDP (1.4.4) – (1.4.7) nin çözümünün bulunması bilinmeyen $v_j^*(z_j, t)$ ve $w_j(z_j, t)$ fonksiyonlarının bulunmasıyla gerçekleşir. Yukarıda (1.4.8) – (1.4.9) eşitlikleri ile verilen $v_j(z_j, t)$ fonksiyonunu problemdeki (1.4.4) nolu kısmi diferensiyel denklemde yerine koyarsak aşağıdaki adi diferensiyel denklemler ile kısmi diferensiyel denklem elde edilir.

$$\alpha'_{ij}(z_j) = 0 \quad \beta'_{ij}(z_j) = 0 \quad \beta'_{ij}(z_j) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.4.10)$$

$$\frac{\partial w_j^2}{\partial t^2} - \frac{\partial w_j^2}{\partial z_j^2} = 0, \quad 0 < z_j < \frac{\ell}{d_j}, \quad t > 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.4.11)$$

Bu da demektir ki, $v_j^*(z_j, t)$ eşitliğindeki katsayılar birer sabittir. Benzer bir şekilde başlangıç ve sınır koşullarında yerine koyarsak

$$\begin{aligned} \alpha_{1j} &= \alpha_{1j} = \frac{1}{d_j \rho} t_{3j} \theta_0(z_j) \left(\frac{\ell}{d_j} - z_j \right), & \beta_{1j} &= 0, & \gamma_{1j} &= 0, \\ \alpha_{(1,0)_j} &= \alpha_{1j}, & \beta_{(1,0)_j} &= \beta_{1j}, & \gamma_{(1,0)_j} &= \gamma_{1j}, \\ \alpha_{(1,0,1)_j} &= \alpha_{(1,0)_j}, & \beta_{(1,0,1)_j} &= \beta_{(1,0)_j}, & \gamma_{(1,0,1)_j} &= \gamma_{(1,0)_j}, \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{(1,0,1, \dots, 1,0)_j} &= \alpha_{(1,0,1, \dots, 1)_j}, & \beta_{(1,0,1, \dots, 1,0)_j} &= \beta_{(1,0,1, \dots, 1)_j}, & \gamma_{(1,0,1, \dots, 1,0)_j} &= \gamma_{(1,0,1, \dots, 1)_j}, \\ \alpha_{(1,0,1, \dots, 1,0,1)_j} &= \alpha_{(1,0,1, \dots, 1,0)_j}, & \beta_{(1,0,1, \dots, 1,0,1)_j} &= \beta_{(1,0,1, \dots, 1,0)_j}, & \gamma_{(1,0,1, \dots, 1,0,1)_j} &= \gamma_{(1,0,1, \dots, 1,0)_j}, \end{aligned}$$

ve

$$w_j(z_j, t) \Big|_{z_j=0} = 0, \quad z_j \in \left(0, \frac{\ell}{d_j}\right); \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.4.12)$$

$$d_j \frac{\partial w_j}{\partial z_j} \Big|_{z_j=\frac{\ell}{d_j}} = 0, \quad d_j \frac{\partial w_j}{\partial z_j} \Big|_{z_j=\frac{\ell}{d_j}-0} = 0 \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.4.13)$$

elde ederiz ki (1.4.11), (1.4.12) ve (1.4.13) nolarıyla verilen problemin tek çözümü, her $j = 1, 2, 3$ için $w_j(z_j, t) = 0$ dir. Dolayısıyla baştaki (1.4.1), (1.4.2) ve (1.4.3) nolu dönüşümlere geri dönecek olursak ve belirttiğimiz varsayımlar altında, (1.2.1) – (1.2.3) nolu anizotropik sistemin başlangıç sınır değer probleminin çözümünü aşağıdaki gibi bulmuş oluruz:

$$u_1(x_3, t) = t_{11} \bar{u}_1(x_3, t) + t_{12} \bar{u}_2(x_3, t) + t_{13} \bar{u}_3(x_3, t) \quad (1.4.14)$$

$$u_2(x_3, t) = t_{21} \bar{u}_1(x_3, t) + t_{22} \bar{u}_2(x_3, t) + t_{23} \bar{u}_3(x_3, t) \quad (1.4.15)$$

$$u_3(x_3, t) = t_{31} \bar{u}_1(x_3, t) + t_{32} \bar{u}_2(x_3, t) + t_{33} \bar{u}_3(x_3, t) \quad (1.4.16)$$

ve

$$\bar{u}_1(x_3, t) = \Theta_0(t) \left[\alpha_{1,1} \delta\left(t - \frac{x_3}{d_1}\right) + \alpha_{(1,0)_1} \delta\left(t + \frac{x_3}{d_1} - \frac{2\ell}{d_1}\right) + \alpha_{(1,0,1)_1} \delta\left(t - \frac{x_3}{d_1} - \frac{2\ell}{d_1}\right) \right], \quad (1.4.17)$$

$$\bar{u}_2(x_3, t) = \Theta_0(t) \left[\alpha_{1,2} \delta\left(t - \frac{x_3}{d_2}\right) + \alpha_{(1,0)_2} \delta\left(t + \frac{x_3}{d_2} - \frac{2\ell}{d_2}\right) + \alpha_{(1,0,1)_2} \delta\left(t - \frac{x_3}{d_2} - \frac{2\ell}{d_2}\right) \right], \quad (1.4.18)$$

$$\bar{u}_3(x_3, t) = \Theta_0(t) \left[\alpha_{1,3} \delta\left(t - \frac{x_3}{d_3}\right) + \alpha_{(1,0)_3} \delta\left(t + \frac{x_3}{d_3} - \frac{2\ell}{d_3}\right) + \alpha_{(1,0,1)_3} \delta\left(t - \frac{x_3}{d_3} - \frac{2\ell}{d_3}\right) \right]. \quad (1.4.19)$$

Formüllerdeki katsayılar her $j = 1, 2, 3$ indisi için $\alpha_{(1,0,1)_j} = \alpha_{(1,0)_j} = \alpha_{1j} = \frac{1}{d_j \rho} t_{3j} \theta_0(x_3) \theta_0(\ell - x_3)$ olarak bulunmuştur.

1.5 Örnek

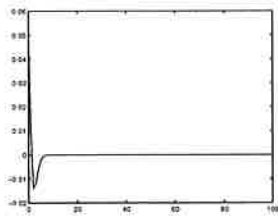
Anizotropinin en genel hali olan Triklinik yapıda bir A_{33}

$$A_{33} = \begin{bmatrix} 3.2222 & 0.4444 & -2.4444 \\ 0.4444 & 5.8889 & -2.8889 \\ -2.4444 & -2.8889 & 4.8889 \end{bmatrix}$$

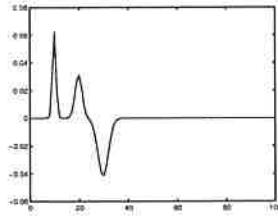
matrisi alalım [5]. A_{33} matrisinin $\mathbf{D} = \text{diag}(1, 4, 9)$ köşegen matrisi halinde yazılabilmesi için bir

$$\mathbf{T} = (t_{ij})_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0.6667 & -0.3333 \\ 0.3333 & -0.6667 & -0.6667 \\ 0.6667 & -0.3333 & 0.6667 \end{bmatrix}$$

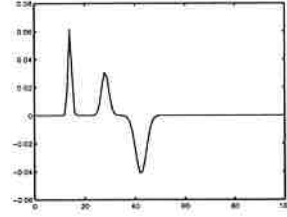
dikey matrisi vardır. Bu durumda anizotropik elastisite sisteminin BSDP için bulduğumuz $u_1(x_3, t)$, $u_2(x_3, t)$, $u_3(x_3, t)$ çözüm fonksiyonlarını belirten (1.4.14), (1.4.19) formüllerini kullanarak elde ettiğimiz simülasyonlar aşağıdaki gibidir.



(a) $t = 0$

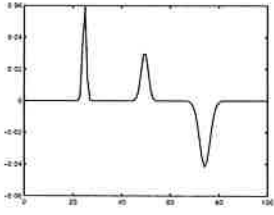


(b) $t = 14$

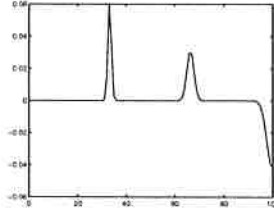


(c) $t = 20$

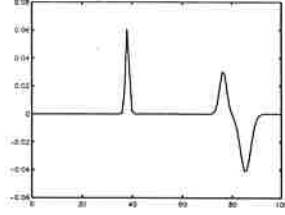
Grafiklerin açık ve anlaşılır olması için, $\mathbf{u}(x_3, t)$ yer değiştirme vektörünün sadece ikinci bileşeni için simülasyonlarını göstermekteyiz. Diğer bileşenler de benzer simülasyonlara sahip



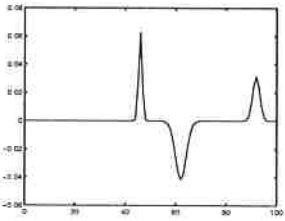
(d) $t = 35$



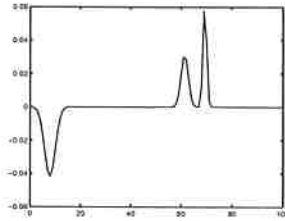
(e) $t = 47$



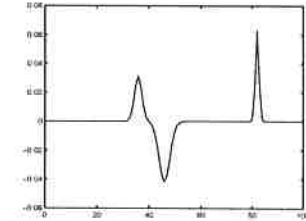
(f) $t = 54$



(g) $t = 65$



(h) $t = 98$



(i) $t = 116$

olacaktır. Malzemenin triklinik yapıda alınmasından dolayı her bir grafik, farklı hızlara sahip üç ayrı dalgalanım içeriyor. Yoğunluğu $\rho = 2$ alırsak dalgalanımın hızları $d_1 = \sqrt{0.5}$, $d_2 = \sqrt{2}$, $d_3 = \sqrt{4.5}$ olacaktır. Şekil(a)'da, $x_3 = 0$ kaynağından elastik dalga yükseliyor. Yükselen elastik dalga şekil(b),(c) ve (d)'de karakteristikler üzerinde yol almaya başlıyor ki bu şekilde farklı hızla sahip dalgalanım biribirinden açık bir şekilde ayrılmaya başlıyor. Şekil(e)'de elastik dalganın en çok hızla sahip olan dalgalanımı, $\ell = 100$ sınırına çarpıp şekil(f)'de geri dönüyor ve bu dalgalanım şekil(g)'de $x_3 = 0$ sınırına doğru ilerlerken fiziksel süreç diğer hızla sahip dalgalanım için de benzer bir şekilde devam ediyor. Şekil(h)ve(i)'de en hızlı dalgalanım, bu sefer $x_3 = 0$ sınırına çarpıyor ve geri dönerek ilk yönünde yol almaya başlıyor.

1.6 Sonuç

Düzlem dalgasının anizotropik bir plaka yüzeyine isabet etmesiyle plaka içerisinde meydana gelen yer değiştirme alanını belirleyebilmek için yeni bir yöntem kullanılmıştır. Bu yöntem, başlangıç ve özel sınır koşulları içeren anizotropik elastisite sisteminin başlangıç sınır değer problemi(BSDP) için açık ve net formüllerle belirtilen bir çözüm bulmaya dayalıdır. Bu formüllerle MATLAB kodlarını kullanarak elastik dalgaların simülasyonları elde edilmiş ve bu şekilde yöntemin sağlamlığı desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Boyce W.E. and R.C.DiPrima, "Elementary differential equations and boundary value problems." John Wiley and Sons-1992.
- [2] Cohen, G.C., E.Heikkola, P.Joly and P.Neittaan, "Mathematical and numerical aspects of waves propagation" Springer-Verlag-2003.
- [3] Courant R. and D.Hilbert, (1989). "Methods of mathematical physics" John Wiley and Sons-1989.
- [4] Christensen R.M., "Mechanics of Composite materials" Wiley and Sons-1979.
- [5] Dieulesaint E. and D.Royer, "Elastic Waves in Solids I" Springer-2000.
- [6] Duff, G.F., "The Cauchy problem for elastic waves in an anisotropic medium" Philosophical Transactions of the Royal Society of London 252(Series A) 249-273,1960.
- [7] Fedorov F.I., "Theory of elastic waves in crystals" Plenum Press-1968.
- [8] Jones R.M., "Mechanics of Composite materials" McGraw-Hill Book Company-1975.
- [9] Lekhnitski S.G., "Theory of elasticity of an anisotropic elastic body" (P. Ferns Trans.), San Francisco: Holden-Day 1950.
- [10] Romanov V.G., "Determining the parameters of a stratified piecewise constant medium for the unknown shape of an impulse source" Siberian Mathematical Journal 48(6) 1074-1084,2007.
- [11] Ting T.C.T., D.M.Barnett and J.J.Wu, "Modern theory of anisotropic elasticity and applications" SIAM-1990.
- [12] Ting T.C.T., "Anisotropic elasticity: Theory and applications" Oxford University Press-1996.
- [13] Ting T.C.T., "Recent developments in anisotropic elasticity" International Journal of Solids and Structures, 37 401-409,2000.
- [14] Vladimirov V.S., "Equations of Mathematical Physics" Marcel Dekker-1971.
- [15] Yakhno V.G. and H.Akmaz, "Initial Value Problem for the Dynamic System of Anisotropic Elasticity" International Journal of Solids and Structures 42(3-4) 855-876, 2005.
- [16] Yakhno V.G. and H.Akmaz, "Anisotropic elastodynamics in a half space: An analytic method for polynomial data" Journal of Computational and Applied Mathematics 204(2) 268-281, 2007.
- [17] Yang B., E.Pan and V.K.Tewary, "Three-dimensional Greens functions of steady-state motion in anisotropic half-spaces and bimetals" Engineering Analysis with Boundary Elements 28(9) 1069-1082, 2004.