XVII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
5-9 Eylül 2011, Fırat Üniversitesi, Elazığ

İÇİ AKIŞKAN DOLU ELASTİK TÜPLERDE NONLİNEER DALGA YAYILIMI

Hilmi Demiray*
Işık Üniversitesi, Şile-Istanbul

ÖZET

Bu çalışmada, arteriyi içerisinde stenosis (tümsek) bulunan ince duvarlı elastik bir tüp ve kanı da viskozitesi ihmal edilebilen ve sıkıştırılamayan bir akışkan olarak işleme sokarak ve indirgeyici pertürbasyon metodunu kullanarak böyle bir ortamda zayıf nonlineer dalgaların yayılı problemi incelenmiştir. Çeşitli işlemlerin sonunda evolusyon denklemi olarak değişken katsayılı KdV denklemi elde edilmiştir.

GİRİŞ

Arteri mekaniğindeki önemli uygulamaları nedeniyle, içi akışkan ile dolu elastik tüplerde dalga yayılımı problemi üzerindeki çalışmalar artarak devam etmektedir[1, 2]. Bu çalışmaların büyük çoğunluğunda nonlineer etkiler ihmal edilmiş ve daha çok dalgaların dispersif etkileri üzerinde yoğunlaşmıştır[3, 4]. Bubunla birlikte, bünyesel veya kinematiksel nonlineeriteler ortaya çıktığında, nonlineeritenin mertebesine bağlı olarak, sonlu genlikli veya küçük fakat sonlu genlikli dalgaların incelenmesi gerekebilir.

İçerisinde akışkan bulunan elastik veya viskoelastik tüplerde sonlu genlikli dalgaların yayılımı problemi, karakteristikler yöntemi kullanılarak bir çok araştırıcı tarafından incelenmiş (örneğin, Rudinger[5], Tait and Moodie [6]) ve şok dalgası oluşumu koşulları araştırılmıştır. Diğer yandan, küçük fakat sonlu genlikli dalgaların yayılımı problemi Johnson [7], Hashizume [8], Yomosa [9] ve başkaları tarafından incelenmiştir. Ön şekil değiştirmenin dalga karakteristiklerine etkileri Demiray [10, 11] tarafından etraflı bir biçimde incelenmiştir.

Bundan önceki bütün çalışmalarda araştırmacılar arteriyi sabit yarıçaplı silindir olarak işleme sokmuşlardır. Halbuki, gerçekte arterilerin yarıçapları eksen boyunca değişmektedir ve bunun bir sonucu olarak da evolusyon denklemleri klasik (sabit katsayılı) KdV denklemi yerine değişken katsayılı KdV denklemi olmaktadır(Demiray [12, 13]).

Bu çalışmada, problemi bir başlangıç değer problemi olarak varsayarak ve indirgeyici pertürbasyon yöntemini kullanarak, içi akışkanla dolu, öngerilmeli ve değişken yarıçaplı zayıf nonlineer dalgaların yayılımı problemi incelenmiş ve evolüsyon denklemi olarak da değişken katsayılı pertürbe KdV denklemi elde edilmiştir.

*Prof. Dr., Matematik Böl. E-Posta: demiray@isikun.edu.tr

TEMEL DENKLEMLER

Tüp Denklemleri

Genel olarak büyük damarlar kalın duvarlı ve malzeme yönünden de skıkşmaz, inhomojen, viskoelastik ve anizotropturlar. Matematiksel basitliği nedeniyle bu çalışmada malzeme sıkışmaz, elastik, homojen ve izotrop kabul edilecek, duvar kalınlığı yönünden de ince olduğu varsayılacak; dolayısıyla, büyük şekil değiştirmeye maruz tüp denklemleri kullanılacaktır. Ayrıca, fizyolojik koşullara uygun olarak yarıçapın tüp ekseni boyunca değiştiği varsayılacaktır.

Öngerilmesiz yarıçapı R_0 olan dairesel silindirik bir tüpün değişken $P_0(z^*)$ iç basıncına ve λ_z eksenel germesine maruz kaldığını varsayalım. Bu durumda tüpün jenerik bir noktasının $\mathbf{r}_0$ konum vektörü

$$\mathbf{r}_0 = [r_0 + f^*(z^*)]e_r + z^* e_z, \quad z^* = \lambda_z Z^*, \tag{1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{e}_r, e_\theta, e_z$ silindirik koordinatlardaki baz vektörlerini, r_0 koordinat merkezindeki deforme olmuş yarıçapı, Z^* şekil değiştirmeden önceki eksenel koordinatı, z^* statik şekil değiştirmeden sonraki eksenel koordinatı, $f^*(z^*)$ de eksen boyunca yarıçap değişim fonksiyonunu göstermektedir. Teğetsel ve yanal doğrultulardaki statik germeler

$$\lambda^0{}_1 = \lambda_z[1 + (f^{*'})^2]^{1/2}, \quad \lambda^0{}_2 = \lambda_\theta + f^* / R_0, \tag{2}$$

şeklinde verilebilir. Burada $\lambda_\theta = r_0 / R_0$ koordinat merkezinde yanal doğrultudaki germeyi göstermektedir. Kalbin periyodik hareketi sırasında bu statik ön şekil değiştirme üzerine $u^*(z^*, t^*)$ şeklinde radyal dinamik yer değiştirmenin eklendiği ve yataklama koşulları nedeniyle eksenel yer değiştirmenin ihmal edilebileceği varsayılacaktır. Bu durumda jenerik noktanın konum vektörü

$$\mathbf{r} = [\mathbf{r}_0 + f^*(z^*) + u^*]\mathbf{e}_r + z^* \mathbf{e}_z \tag{3}$$

ve ilgili germeler de

$$\lambda_1 = \lambda_z[1 + (f^{*'} + \partial u^* / \partial z^*)^2]^{1/2}, \quad \lambda_2 = \lambda^0{}_2 + u^* / R_0, \tag{4}$$

şeklinde verilebilir. Burada ()' ifadesi, ilgili büyüklüğün z^*'a göre türevini göstermektedir. Buna göre adyal doğrultudaki hareket denklemi

$$-\frac{\mu}{\lambda_z}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} + \lambda_z \mu R_0 \frac{\partial}{\partial z^*}[(f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}] + \frac{P^*}{H}(r_0 + f^{*'} + u^*) - \rho_0 \frac{R_0}{\lambda_z}\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}} = 0, \tag{5}$$

şeklinde verilebilir. Burada μ kayma modülünü, Σ şekil değiştirme enerji yoğunluğu fonksiyonunu, ρ_0 tüpün kütle yoğunluğunu, H tüpün başlangıç kalınlığını ve P^* tüp üzerindeki akışkan basıncını göstermektedir.

Akışkan Denklemleri

Genel olarak kan sıkıştırılamayan ve Newtoniyen olmayan bir akışkandır. Kanın bu şekilde davranmasında en büyük etken kandaki hücre yoğunluğu (hematokrit oranı) ve hücrelerin deforme olabilme özelliğidir. Damarlarda kan akımı sırasında alyuvarlar merkez bölgeye doğru hareket ederler ve kayma hızının yüksek olduğu damar çeperinde hücre yoğunluğu azalır. Deneysel çalışmalar, düşük hematokrit oranı ve yüksek kayma hızlarında viskozitenin çok düşük olduğunu göstermektedir [1, 5]. Bu gözlemlerin ışığı altında, silindirik borularda akım sırasında kan, sıkıştırılamayan bir akışkan olarak işleme sokulabilir. Bununla birlikte, ilk yaklaşım olarak kanın viskoz etkileri ihmal edilecektir. Bu durumda eksenel simetrik hareket denklemleri aşağıdaki biçimde verilebilir

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial t^*}+V_r^*\frac{\partial V_r^*}{\partial r}+V_z^*\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}+\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial \overline{P}}{\partial r}=0\ ,\qquad \frac{\partial V_z^*}{\partial t^*}+V_r^*\frac{\partial V_z^*}{\partial r}+V_z^*\frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}+\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial \overline{P}}{\partial z^*},=0$$

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial r}+\frac{V_r^*}{r}+\frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}=0 \text{ (sıkışmazlık)} \ . \tag{6}$$

Burada V^*_r, V^*_z, sırasıyla , radyal ve eksenel doğrultulardaki hız bileşenlerini, $\overline{P}$ akışan basınç fonksiyonunu ve ρ_f de akışkanın kütle yoğunluğunu göstermektedir.

Denklemlerin çözümüne geçmeden önce çeşitli büyüklükleri boyutsuz hale getirmekte yarar vardır. Bu amaçla aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır

$$t^*=(\frac{R_0}{c_0})t,\quad r=R_0x,\quad z^*=R_0z,\quad u^*=R_0u,\quad V_r^*=c_0v,\quad V^*_z=c_0w,$$

$$x_f=\lambda_\theta+u,\quad f^*=R_0f,\quad m=\frac{\rho_0H}{\rho_fR_0},\quad c_0^2=\frac{\mu H}{\rho_fR_0},\quad P^*=\rho_fc_0{}^2p,\quad \overline{P}=\rho_fc_0{}^2\overline{p}\ . \tag{7}$$

Burada c_0 Moens-Korteweg dalga hızı olarak bilinir. (7) de tanımlanan boyutsuz büyüklükler (5)-(6) denklemlerinde yerlerine konulursa aşağıdaki boyutsuz alan denklemleri elde edilir

$$,\quad \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial t}+v\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{v}{x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\quad (\textit{sıkışmazlık koşulu}), \tag{8}$$

$$p=\frac{1}{\lambda_z(\lambda_\theta+u)}[m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_2}-\lambda_z\frac{\partial}{\partial z}\{\frac{(f'+\partial u/\partial z)}{[1+(f'+\partial u/\partial z)^2]^{1/2}}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_1}\} \tag{9}$$

ve sınır koşulları

$$[v-(f'+\frac{\partial u}{\partial z})w]_{|x=x_f}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad \overline{p}\,|_{x=x_f}=p. \tag{10}$$

Prensip olarak, elde edilen bu denklemler yardımıyla u, v, w ve $\overline{p}$ bilinmeyenlerini çözmek mümkündür. Ancak denklemlerin ileri derecede nonlineer olmaları nedeniyle bunlara analitik çözüm vermek mümkün görünmemektedir. Bu nedenle aşağıda yaklaşık bir çözüm elde edilmeye çalışılacaktır.

UZUN DALGA YAKLAŞIKLIĞI

Bu kısımda , yönetici denklemleri (8)-(9) ve sınır koşulları da (10) ile verilen içi akışkan ile dolu, öngerilmeli ince elastik tüplerde küçük fakat sonlu genlikli dalgaların yayılımı problemi incelenecektir. Bu amaçla uzun dalga yaklaşıklığı ve indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılacaktır. Bu tip problemlerin incelenmesinde aşağıdaki şekilde tanımlanan gerdirilmiş koordinatlar kullanılacaktır

$$\xi=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\frac{ds}{c(s)}-\varepsilon^{1/2}t,\quad \tau=\varepsilon^{3/2}z, \tag{11}$$

Burada ε nonlineerite ve dispersiyonun zayıflık meretebesini tanımlayan küçük bir parametre, $c(s)$ ise daha sonra belirlenmesi gerekli bir ölçüt parametresidir.

Uzun dalga limitinde alan değişkenlerinin de aşağıdaki şekilde asimptotik seriye açılacakları varsayılacaktır

$$\begin{aligned} &u=\varepsilon u_1+\varepsilon^2u_2+......,\quad v=\varepsilon^{1/2}(\varepsilon v_1+\varepsilon^2v_2+......),\\ &w=\varepsilon w_1+\varepsilon^2w_2+......,\quad \overline{p}=\overline{p}_0+\varepsilon\overline{p}_1+\varepsilon^2\overline{p}_2+.... \end{aligned} \tag{12}$$

(11) dönüşümü ve (12) açılımı (8)-(9) alan denklemlerinde ve (10) sınır koşullarında yerlerine konur ve ε 'nun benzer kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki diferansiyel denklemler takımı elde edilir:

$O(\varepsilon)$ *denklemleri*:

$$\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial x}=0,\quad -\frac{\partial w_1}{\partial\xi}+\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial\xi}=0,\quad \frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{v_1}{x}+\frac{1}{c}\frac{\partial w_1}{\partial\xi}=0, \tag{13}$$

ve sınır koşulları

$$v_{|x=\lambda^0_2} = -\frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \quad \bar{p}_{|x=\lambda^0_2} = \beta_1(\tau)u_1, \quad \lambda^0_2 = \lambda_\theta + f(\tau). \tag{14}$$

$O(\varepsilon^2)$ *denklemleri* :

$$-\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial x} = 0, \quad -\frac{\partial w_2}{\partial \xi} + v_1\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{c}w_1\frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{v_2}{x} + \frac{1}{c}\frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \frac{\partial w_1}{\partial \tau} = 0, \tag{15}$$

ve sınır koşulları

$$[v_2 + u_1\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{df}{d\tau}w_1 - \frac{1}{c}w_1\frac{\partial u_1}{\partial \xi}]|_{x=\lambda^0_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial \xi}, \quad [\bar{p}_2 + u_1\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x}]|_{x=\lambda^0_2} = \beta_1(\tau)u_2 + \beta_2(\tau)u_1^2 + \alpha_0(\tau)\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2}. \tag{16}$$

Burada $\alpha_0(\tau), \beta_1(\tau), \beta_2(\tau)$ katsayı fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır

$$\alpha_0(\tau) = \frac{1}{\lambda^0_2}(\frac{m}{\lambda_z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_z}), \quad \beta_1(\tau) = \frac{1}{\lambda_z\lambda^0_2}[\frac{\partial^2\Sigma}{\partial(\lambda^0_2)^2} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda^0_2}], \quad \beta_2(\tau) = \frac{1}{2\lambda_z\lambda^0_2}\frac{\partial^3\Sigma}{\partial(\lambda^0_2)^3} - \frac{\beta_1(\tau)}{\lambda^0_2}, \tag{17}$$

Bu katsayı fonksiyonları (9) ile verilen p basınç fonksiyonunun ε cinsinden seriye açılması sonucu elde edilmiştir. Rahatlıkla görüleceği gibi bu katsayı fonksiyonları $f(\tau)$ profil fonksiyonu cinsinden ifade edilebilir.

Alan Denklemlerinin Çözümü

(13) ve (14) denklem takımlarının çözümünden

$$u_1 = U(\xi,\tau), \quad \bar{p}_1 = \beta_1(\tau)U, \quad w_1 = \frac{\beta_1(\tau)}{c(\tau)}[U + \bar{w}_1(\tau)], \quad v_1 = -\frac{\beta_1(\tau)}{2c^2(\tau)}\frac{\partial U}{\partial \xi}x, \tag{18}$$

elde edilir. Burada $U(\xi,\tau)$ bilinmeyen bir fonksiyon olup yönetici diferansiyel denklem daha sonra elde edilecek, $\bar{w}_1(\tau)$ ise yarıçap değişimi sonucu oluşan daimi akımı karakterize etmektedir. U 'nun sıfırdan farklı bir çözüme sahibolabilmesi için aşağıdaki koşulun sağlanması gerekir

$$c^2(\tau) = \beta_1(\tau)\lambda^0_2(\tau)/2. \tag{19}$$

Böylece, koordinat dönüşümünde bilinmeyen olarak yer alan $c(\tau)$ fonksiyonu belirlenmiş oldu.
(18) denkleminde verilen çözüm (15) ve (16) denklemlerinde yerine konursa

$$\begin{gathered}\frac{1}{\lambda^0_2}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}x + \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \xi} - \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \frac{2\beta_1}{\lambda^0_2 c}(U + \bar{w}_1)\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{d}{d\tau}(\beta_1 U) = 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{v_2}{x} + \frac{1}{c}\frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \frac{d}{d\tau}[\frac{\beta_1}{c}(U + \bar{w}_1)] = 0,\end{gathered} \tag{20}$$

ve sınır koşulları

$$v_2|_{x=\lambda^0_2} - \frac{3}{\lambda^0_2}U\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{2}{\lambda^0_2}\bar{w}_1\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\beta_1}{c}\frac{d}{d\tau}(U + \bar{w}_1) + \frac{\partial u_2}{\partial \xi} = 0, \quad \bar{p}_2|_{x=\lambda^0_2} = \beta_1 u_2 + \beta_2 U^2 + \alpha_0\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}. \tag{21}$$

elde edilir. Bu kuple denklemlerin çözümünden

$$\bar{p}_2 = -\frac{1}{2\lambda^0_2}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}x^2 + \pi_2(\xi,\tau), \tag{22}$$

$$\begin{gathered}v_2 = \frac{1}{8\lambda^0_2 c^2}\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}x^3 - \frac{1}{2}\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial \pi_2}{\partial \xi} + \frac{4}{(\lambda^0_2)^2}U\frac{\partial U}{\partial \xi} + [\frac{d}{d\tau}(\frac{\beta_1}{c}) + \frac{1}{c}\frac{d\beta_1}{d\tau}]U \\ + 2\frac{\beta_1}{c}\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{4}{(\lambda^0_2)^2}\bar{w}_1\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{d}{d\tau}[\frac{\beta_1}{c}\bar{w}_1]\}x,\end{gathered} \tag{23}$$

bulunur. Burada π_2 fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilmiştir

$$\pi_2 = (\frac{\lambda^0{}_2}{2} + \alpha_0)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \beta_1 u_2 + \beta_2 U^2. \tag{24}$$

(16) da verilen sınır koşulları kullanılacak olursa aşağıdaki evolusyon denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1(\tau)U\frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2(\tau)\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3(\tau)U$$
$$+\frac{4c}{\beta_1(\lambda^0{}_2)^2}\bar{w}_1(\tau)\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{d}{d\tau}[\ln(\frac{\lambda^0{}_2\beta_1^{1/2}}{c^{1/2}})]\bar{w}_1(\tau) + \frac{1}{2}\frac{d\bar{w}_1(\tau)}{d\tau} = 0. \tag{25}$$

Burada $\mu_1(\tau), \mu_2(\tau), \mu_3(\tau)$ katsayı fonksiyonları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$\mu_1(\tau) = \frac{1}{c}(\frac{5}{2}\lambda^0{}_2 + \frac{\beta_2}{\beta_1}), \quad \mu_2(\tau) = \frac{1}{2\beta_1 c}(\alpha_0 + \frac{\lambda^0{}_2}{4}), \quad \mu_3(\tau) = \frac{3}{2c}\frac{dc}{d\tau}. \tag{26}$$

(25) evolusyon denklemi $U = 0$ hali için de geçerli olmalıdır. (25) denkleminde $U = 0$ yazılırsa

$$\frac{d}{d\tau}[\ln(\frac{\beta_1^{1/2}\lambda^0{}_2}{c^{1/2}})]\bar{w}_1 + \frac{1}{2}\frac{d\bar{w}_1}{d\tau} = 0. \tag{27}$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümünden

$$\bar{w}_1(\tau) = \frac{c}{\beta_1(\lambda^0{}_2)^2}. \tag{28}$$

bulunur. Böylece (25) evolüsyon denklemi aşağıdaki şekli alır

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1(\tau)U\frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2(\tau)\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3(\tau)U + \frac{2}{\beta_1(\lambda^0{}_2)^3}\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \tag{29}$$

Aşağıdaki şekilde tanımlanan yeni bağımsız değişkenler yardımıyla

$$\xi' = \xi - \int_0^\tau \frac{2ds}{\beta_1(s)(\lambda^0{}_2(s))^3}, \quad \tau' = \tau, \tag{30}$$

(29) evolüsyon denklemi aşağıdaki şekli alır

$$\frac{\partial U}{\partial \tau'} + \mu_1(\tau')U\frac{\partial U}{\partial \xi'} + \mu_2(\tau')\frac{\partial^3 U}{\partial \xi'^3} + \mu_3(\tau')U = 0. \tag{31}$$

Bu evolüsyon denklemi deişken katsayılı pertürbe Korteweg-deVries denklemi olarak bilinir. Bu denklemlerde $f(\tau) = 0$ yazılırsa sabit katsayılı klasik KdV denklemi elde edilir.

İlerleyen Dalga Çözümü

Bu kısımda, (31) ile verilen değişken katsayılı pertürbe KdV denklemine ilerleyen dalga çözümü verilmeye çalışılacaktır. Sabit katsayılı pertürbe KdV denklemi için henüz klasik anlamda kesin analitik çözüm verilememiş, ancak diferansiyel denkleme ortalama anlamda (integral anlamında) bir çözüm verilebilmiştir (Engelbrecht [14], Demiray [15]). Bu çalışmada aynı yöntem değişken katsayılı pertürbe KdV denklemine genişletilecektir. Bunun için aşağıdaki biçimde bir çözüm önerilecektir

$$U = a(\tau')V(\zeta), \quad \zeta = \alpha(\tau')[\xi' - \varphi(\tau')]. \tag{32}$$

Burada $a(\tau'), \alpha(\tau')$ ve $\varphi(\tau')$ bilinmeyen fonksiyonlar olup çözüm sonucu elde edilecektir. (32) ifadesi (31) denkleminde yerleştirilecek olursa

$$\{[\frac{a'}{a} + \mu_3(\tau')]V + \frac{\alpha'}{\alpha}\zeta\frac{dV}{d\zeta}\} + [-\alpha\varphi'\frac{dV}{d\zeta} + \mu_1(\tau')\alpha V\frac{dV}{d\zeta} + \alpha^3\mu_2(\tau')\frac{d^3V}{d\zeta^3}] = 0. \quad (33)$$

bulunur. Burada $()'$, ilgili büyüklüğün ζ 'ya göre türevini göstermektedir. $U(\xi',\tau')$ değişkeni yerine $a(\tau')$ ve $V(\zeta)$ fonksiyonlarını takdim edildiğinden, çözümü basitleştirecek şekilde ek bir kısıtlama getirilebilir. Sabit katsayılı KdV denklemi için geçerli olan $\sec h^2$ tipi çözümden yararlanarak köşeli ve büyük parantez içerisindeki ifadeler ayrı ayrı sıfıra eşit yazılabilir

$$-\alpha\varphi'\frac{dV}{d\zeta} + \mu_1(\tau')\alpha V\frac{dV}{d\zeta} + \alpha^3\mu_2(\tau')\frac{d^3V}{d\zeta^3} = 0. \quad (34)$$

$$[\frac{a'}{a} + \mu_3(\tau')]V + \frac{\alpha'}{\alpha}\zeta\frac{dV}{d\zeta} = 0. \quad (35)$$

Önce (34) no'lu denklemin çözümü araştırılacaktır. Bunun için (34) denklemi ζ 'ya göre integre edilir ve $\zeta \to \pm\infty$ da V nin sıfır olması koşulu (yöresellik koşulu) kullanılırsa

$$-\varphi'V + \frac{1}{2}\mu_1(\tau')V^2 + \alpha^2\mu_2(\tau')\frac{d^2V}{d\zeta^2} = 0. \quad (36)$$

Denklemi elde edilir. Klasik KdV denkleminin çözümü olan $\sec h^2\zeta$ tipi çözümden yararlanarak V için $V = \sec h^2\zeta$ şeklinde bir çözüm aranacaktır. Bu çözüm (36) denkleminde yerine konursa $\alpha(\tau')$ ve $\varphi(\tau')$ için aşağıdaki bağıntılar bulunur

$$\alpha^2 = \frac{\mu_1(\tau')a(\tau')}{12\mu_2(\tau')}, \quad \varphi' = \frac{\mu_1(\tau')a(\tau')}{3}. \quad (37)$$

Çözümü tamamlayabilmek için $a(\tau')$ fonksiyonunun tayin edilmesi gerekmektedir. Bunun için (35) denklemi V ile çarpılır ve ζ 'ya göre $-\infty, +\infty$ arası integre edilirse

$$[\frac{a'}{a} + \mu_3(\tau') - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}] < V^2 >= 0, \quad < V^2 >= \int_{-\infty}^{\infty} V^2 d\zeta, \quad (38)$$

bulunur. Bu çalışmada lokalize dalgalar ile ilgilenildiğinden V karesi integre edilebilir bir fonksiyondur, dolayısıyla $< V^2 >$ sınırlıdır. O halde (38) denkleminin sağlanabilmesi için

$$\frac{a'}{a} + \mu_3(\tau') - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha} = 0, \quad (39)$$

olmalıdır. (37) ilişkisi (39) da kullanılırsa

$$3\frac{a'}{a} + 10\frac{c'}{c} - 2\frac{(\lambda^0{}_2)'}{\lambda^0{}_2} - \frac{\mu_1{}'}{\mu_1} + \frac{\mu_2{}'}{\mu_2} = 0, \quad (40)$$

bulunur. (37) ve (40) ifadelerinin integrasyonundan

$$a(\tau') = a_0\frac{(\mu_1)^{1/3}(\lambda^0{}_2)^{2/3}}{(c)^{10/3}(\mu_2)^{1/3}}, \quad \varphi(\tau') = \frac{a_0}{3}\int_0^{\tau'}\frac{\mu_1^{4/3}(s)[\lambda^0{}_2(s)]^{2/3}}{c^{10/3}(s)\mu_2{}^{1/3}(s)}ds, \quad (41)$$

elde edilir. Burada a_0 bir integrasyon sabitidir. Sonuç olarak nihai çözüm

$$U = a(\tau)\sec h^2\zeta, \quad \zeta = (\frac{a_0}{12})^{1/2}\frac{(\mu_1)^{2/3}(\tau)[\lambda^0{}_2(\tau)]^{1/3}}{c^{5/3}(\tau)(\mu_2)^{2/3}(\tau)}\{\xi - \int_0^{\tau}[\frac{a_0}{3}\frac{\mu_1{}^{4/3}(s)[\lambda^0{}_2(s)]^{2/3}}{c^{10/3}(s)\mu_2{}^{1/3}(s)} + \frac{2}{\beta_1(s)(\lambda^0{}_2)^3(s)}]ds.\} \quad (42)$$

şeklinde verilir. Burada dikkat edilmesi gerekli nokta, (42) ifadesinin klasik anlamda bir çözüm olmayıp ortalama (integral) anlamında bir çözüm olduğudur.

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

İçi viskoz olmayan akışkan ile dolu, öngerilmeli ve yarıçapı eksen boyunca değişen elastik tüplerde küçük fakat sonlu genlikli dalgaların yayılımı problemi indirgeyici perturbasyon yöntemi kullanılarak incelenmiş ve evolusyon denklemi olarak değişken katsayılı KdV denklemi elde edilmiştir. Bu evolusyon denklemine ortalama anlamda sağlanan ilerleyen tipte dalga çözümü verilmiş verilmiş ve, sabit katsayılı KdV denkleminin aksine, dalga genliğinin ve dalga hızının eksen boyunca değiştiği gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Pedley, T.J., Fluid Mechanics of Large Blood Vessels, Cambridge, Cambridge University Press, 1980.

[2] Fung, Y.C., Biodynamics: Circulation, New York, Springer; 1981.

[3] Rachev, A.J., Effects of transmural pressure and muscular activity on pulse waves in arteries, *J Biomech. Eng., ASME*, **102**, 119-123, 1980.

[4] Demiray, H., Wave propagation through a viscos fluid contained in a prestressed thin elastic tube, *Int. J.Eng. Sci.*, **30**, 1607-1620, 1992.

[5] Rudinger, G., Shock waves in a nmathematical model of aorta, *J. Appl. Mech.*, **37**, 34-37,1970.

[6] Tait, R.J. and Moodie, T.B., Waves in nonlinear fluid-filled tubes, *Wave Motion*, **6** ,197-203, 1984.

[7] Johnson R.S., A nonlinear equation incorporating damping and dispersion, *J. Fluid Mech.*, **42,** 49-60, 1970.

[8] Hashizume, Y., Nonlinear pressure waves in a fluid-filled elastic tube, J. Phys. Soc. Japan, 54, 3305-3312, 1985.

[9] Yomosa, S., Solitary waves in large blood vessels, *J. Phys. Soc. Japan,* **56**, 506-520, 1987.

[10] Demiray, H., Solitary waves in a prestressed elastic tube, *Bull. Math. Biology*, **58**, 939-955, 1996.

[11] Antar, N. and Demiray, H., Weakly nonlinear waves in a prestressed thin elastic tube containing a viscous fluid, *Int. J. Engr. Sci.,* **37**, 1859-1876, 1993.

[12] Demiray, H., Weakly nonlinear waves in a fluid of variable viscosity contained in a prestressed elastic tube. *Chaos, Solitons and Fractals*, **36,** 196-202, 2008.

[13] Demiray, H., Nonlinear waves in elastic tube with variable prestretch filled with a fluid of variable viscosity, *Int. J. Nonlinear Mech.*, **46** , 949-957, 2008.

[14] Engelbrecht, J., Solution to the perturbed KdV equation, *Wave Motion*, **14**, 725-732, 1991.

[15] Demiray, H., A note on the solution of perturbed Korteweg-deVries equation, Applied *Mathematics and Computation*, **132**, 643-647, 2002.