

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KARBON NANOTÜPLERİN
BURKULMA YÜKLERİNİN HESABI İÇİN
YAKLAŞIK YÖNTEM**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ali ŞAHİN**

Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği

Programı : Yapı Mühendisliği

OCAK 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KARBON NANOTÜPLERİN
BURKULMA YÜKLERİNİN HESABI İÇİN
YAKLAŞIK YÖNTEM**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ali ŞAHİN
(501071010)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 23 Aralık 2009
Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Ocak 2010**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Reha ARTAN (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Ünal ALDEMİR (İTÜ)
Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ (İTÜ)**

OCAK 2010

ÖNSÖZ

Öncelikle bu çalışmanın her safhasında engin bilgi ve birikimlerini benden eksik etmeyen değerli hocam ve danışmanım sayın Prof. Dr. Reha ARTAN'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca gerek bu çalışma gerekse tüm öğrenim hayatım boyunca her zaman yanımda olan ve hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen annem Kadriye ŞAHİN ve babam Mehmet ŞAHİN'e teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca her alanda beraber çalıştığım değerli arkadaşım İnş. Müh. Seyit İsmail ULUSOY'a çok teşekkür ederim.

Aralık 2009

Ali ŞAHİN
İnşaat Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER	v
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
SEMBOL LİSTESİ	xi
ÖZET.....	xiii
SUMMARY	xv
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı	2
2. NANOTEKNOLOJİ VE KARBON NANOTÜPLER	3
2.1 Nanoteknoloji	3
2.2 Karbon Nanotüpler	4
2.2.1 Tek duvarlı karbon nanotüp	5
2.2.2 Çok duvarlı karbon nanotüp.....	6
3. BURKULMA VE KRİTİK BURKULMA YÜKÜ	9
3.1 Burkulma	9
3.2 Eksenel Kuvvet Altında Çubuk Elemanların Diferansiyel Denklem Sistemi....	9
3.3 İki Ucu Basit Mesnetli Çubuk Elemanının Kritik Burkulma Yüğü Hesabı.....	10
4. BAŞLANGIÇ DEĞERLER METODU VE YAKLAŞIK TAŞIMA MATRİSİ	13
4.1 Başlangıç Değerler Metodu.....	13
4.2 Kesin Taşıma Matrisi	14
4.3 Yaklaşık Taşıma Matrisi	15
4.3.1 İki Terimli Yaklaşık Taşıma Matrisi.....	21
4.3.2 Dört Terimli Yaklaşık Taşıma Matrisi.....	22
5. ÇUBUK ELEMAN BURKULMA YÜKLERİNİN YAKLAŞIK TAŞIMA MATRİSİ KULLANILARAK HESAPLANMASI	25
5.1 Sabit Kesitli Çubuk Elemanlarının Kritik Burkulma Yüğü	32
5.1.1 İki ucu basit mesnetli çubuk.....	33
5.1.2 Bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest çubuk.....	34
5.1.3 İki ucu ankastre mesnetli çubuk.....	35
5.1.4 Bir ucu basit diğer ucu ankastre mesnetli çubuk.....	36
5.2 Değişken Kesitli Çubuk Elemanlarının Kritik Burkulma Yüğü	37
5.2.1 İki ucu basit mesnetli çubuk.....	38
5.2.2 Bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest çubuk.....	39
5.2.3 İki ucu ankastre mesnetli çubuk.....	40
5.2.4 Bir ucu basit diğer ucu ankastre mesnetli çubuk.....	41
6. ÇİFT DUVARLI KARBON NANOTÜP İÇİN KRİTİK BURKULMA YÜKÜNÜN HESAPLANMASI	43
7. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	51

KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ.....	55

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 : “ y_1 ” ve “ y_2 ” kesin ve yaklaşık sonuçları.	19
Çizelge 5.1 : İki ucu basit mesnetli çubuk elemanı için kritik burkulma yükleri.....	34
Çizelge 5.2 : Bir ucu ankastre, bir ucu serbest çubuk için kritik burkulma yükleri. .	35
Çizelge 5.3 : İki ucu ankastre mesnetli çubukta kritik burkulma yükleri.....	36
Çizelge 5.4 : Bir ucu basit, bir ucu ankastre mesnetli çubuk için burkulma yükleri.	37
Çizelge 5.5 : İki ucu basit mesnetli, değişken kesitli çubuk için burkulma yükleri. .	39
Çizelge 5.6 : Bir ucu ankastre mesnetli, bir ucu serbest çubukta burkulma yükleri..	40
Çizelge 5.7 : İki ucu ankastre mesnetli çubuk için kritik burkulma yükleri.....	40
Çizelge 5.8 : Bir ucu basit, bir ucu ankastre mesnetli çubuk için burkulma yükleri.	41
Çizelge 6.1 : İki ucu basit mesnetli çift duvarlı nanotüp için burkulma yükleri.	49

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Tek duvarlı karbon nanotüp (yan görünüş).	5
Şekil 2.2 : Tek duvarlı karbon nanotüp (Perspektif).	6
Şekil 2.3 : Çok duvarlı karbon nanotüp (Perspektif).	6
Şekil 2.4 : Çok duvarlı karbon nanotüp (Perspektif).	7
Şekil 3.1 : Eksenel kuvvet altında çubuk elemanında oluşan kesit tesirleri.	9
Şekil 3.2 : Eksenel yük altında basit mesnetli çubuk.	10
Şekil 5.1 : İki ucu basit mesnetli çubuk elemanı.	26
Şekil 5.2 : Bir ucu ankastre, diğer ucu serbest çubuk elemanı.	28
Şekil 5.3 : İki ucu ankastre mesnetli çubuk elemanı.	29
Şekil 5.4 : Bir ucu basit mesnetli, diğer ucu ankastre mesnetli çubuk elemanı.	31
Şekil 5.5 : Sabit kesitli çubuk elemanı.	33
Şekil 5.6 : N eksenel yükü altında iki ucu basit mesnetli çubuk.	33
Şekil 5.7 : N Eksenel yükü altında bir ucu ankastre, diğer ucu serbest çubuk.	34
Şekil 5.8 : N eksenel yükü altında iki ucu ankastre mesnetli çubuk.	35
Şekil 5.9 : N eksenel yükü altında bir ucu sabit, diğer ucu ankastre mesnetli çubuk.	36
Şekil 5.10 : Değişken kesitli çubuk elemanı.	37
Şekil 5.11 : N eksenel yükü altında iki ucu basit mesnetli, değişken kesitli çubuk. .	38
Şekil 5.12 : N eksenel yükü altında bir ucu ankastre, diğer ucu serbest çubuk.	39
Şekil 5.13 : Eksenel yük altında iki ucu ankastre mesnetli, değişken kesitli çubuk. .	40
Şekil 5.14 : Eksenel yük altında bir ucu basit, diğer ucu ankastre mesnetli çubuk. .	41
Şekil 6.1 : Çift duvarlı karbon nanotüp.	43
Şekil 6.2 : “N” eksenel yükü altında iki ucu basit mesnetli çift duvarlı nanotüp. ...	44

SEMBOL LİSTESİ

N	: Eksenel yük
L	: Eksenel yüke maruz kalmış elemanın boyu
M	: Eksenel yük nedeniyle oluşan moment
T	: Eksenel yük nedeniyle oluşan kesme kuvveti
E	: Eleman elastisite modülü
I	: Atalet momenti
v	: Elemanda meydana gelen düşey deplasman
φ	: Elemanda meydana gelen açısal deplasman
I	: Birim matris
X_n	: Eleman sayısı k'ya kadar ilerletilmiş yaklaşık taşıma matrisi
y₀	: Denklem başlangıç değeri
I_z	: Değişken atalet momenti
I₀	: Başlangıç atalet momenti
A₁	: Dış karbon nanotüpte tüpün kesit alanı
A₂	: İç karbon tüpün kesit alanı
N₁	: Dış karbon nanotüpe etkiyen eksenel yük
N₂	: İç karbon nanotüpe etkiyen eksenel yük
v₁	: Dış karbon nanotüpte meydana gelen düşey deplasman
v₂	: İç karbon nanotüpte meydana gelen düşey deplasman
φ₁	: Dış karbon nanotüpte meydana gelen açısal deplasman
φ₂	: İç karbon nanotüpte meydana gelen açısal deplasman
d	: Karbon nanotüplerin hacimlerinin aritmetik ortalaması
d₁	: Dıştaki karbon nanotüpün hacmi
d₂	: İçteki karbon nanotüpün hacmi
c	: Van Der Waals katsayısı
I₁	: Dıştaki karbon nanotüpün atalet momenti
I₂	: İçteki karbon nanotüpün atalet momenti

KARBON NANOTÜPLERİN BURKULMA YÜKLERİNİN HESABI İÇİN YAKLAŞIK YÖNTEM

ÖZET

Stabilite, yapı elemanının tasarımını etkileyen önemli kriterlerden birisidir. Burkulma ise en çok araştırılan ve incelenen stabilite problemlerindedir. Burkulma, aksenal yük nedeniyle çubuk elemanında meydana gelen yer değiştirme olarak tanımlanabilir. Burkulma gerçekleşmeden önce, çubuk elemanı sadece aksenal basınçla yüklenmiştir, ancak çubuk elemanı burkulmaya başladıktan sonra ikinci merteye etkileri ortaya çıkar. Bu noktada, ikinci merteye etkileri çubuk elemanında ciddi kalıcı hasara neden olabilir. Bu nedenle bir yapı elemanı tasarımı yaparken, elemanın burkulmasına neden olabilecek aksenal yük değeri bilinmelidir ve tasarım buna uygun yapılmalıdır. Burkulma yükü değeri, çubuk elemanının mesnetlenme biçimine ve rijitliğine göre değişiklik gösterir. Örneğin, “ L ” boyunda ve “ EI ” rijitliğindeki çubuk elemanı için, eğer iki ucu basit mesnetli ise burkulma yükü değeri $9.86EI/L^2$ 'dir, ancak iki ucu ankastre mesnetli aynı çubuk elemanı için bu değer dört katı elde edilir.

Bu çalışmanın esas amacı iki ucu basit mesnetli, çift duvarlı karbon nanotüpün burkulma yükünü hesaplamaktır. Bu nedenle ilk olarak nanoteknoloji ve karbon nanotüpler hakkında bilgiler verilmiştir. Ardından tek ve çift duvarlı karbon nanotüpler, şekiller ile anlatılmıştır. Burkulma problemi anlatıldıktan sonra, burkulma problemini çözmek için kullanılan yöntemlerden biri olan başlangıç değerler metodu açıklanmıştır. Başlangıç değerler metodu, diferansiyel denklemin bilinmeyen sınır koşullarını başlangıçta bilinen sınır koşulları ile ifade eder. Böylece problemdeki bilinmeyen terimler azaltılır ve çözüm yapmak kolaylaşır. Başlangıç değerler metodunun ardından kesin taşıma matrisi ve yaklaşık taşıma matrisi ile çözüm yöntemi anlatılmıştır. Kesin taşıma matrisi ile çözüm kesin sonuçlar verirken, yaklaşık taşıma matrisi ile çözüm yaklaşık sonuçlar verir fakat hesaplama aşamaları daha basittir. Bu iki yöntem ile dört farklı şekilde mesnetlenmiş sabit kesitli çubuklar için elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Böylece yaklaşık taşıma matrisi ile hesap yapmanın efektifliği gösterilmiştir. Daha sonra ise, yaklaşık taşıma matrisi ile dört farklı şekilde mesnetlenmiş değişken kesitli çubuklar için burkulma yükü değerleri elde edilmiştir. Çalışmanın son safhasında iki ucu basit mesnetli, çift duvarlı karbon nanotüp için burkulma yükü yaklaşık taşıma matrisi ile hesaplanmıştır.

APPROXIMATE METHOD FOR THE BUCKLING LOAD CALCULATION OF CARBON NANOTUBES

SUMMARY

Stability is one of the important criterias that affects structural member's design. And buckling is one of the most researched and reviewed stability problems. Buckling can be defined as a displacement occurred on a frame element due to axial load. Before the buckling occurs, the frame element is only loaded with axial compression; however, second order effects occur right after the frame element started to buckle. At this point, second order effects may cause a serious permanent damage on the frame element. Because of this, meanwhile designing a structural member; axial load value, that may cause the member buckle, must be known and an appropriate design to this must be done. Buckling load value differs according to the support form and rigidity of the frame element. For example, for a frame element with the length of " L " and rigidity of " EI ", if it's simply supported at both ends, the buckling load value is " $9.86EI / L^2$ "; however, for the same frame element with fixed support at both ends, four times of this value is obtained.

The main aim of this study is to calculate the buckling load of a double walled carbon nanotube, which is simply supported at both ends. Because of this, first of all informations about nanotechnology and carbon nanotubes are given; and single, double walled carbon nanotubes are described with figures. After the buckling problem is described, initial values method, which is one of the methods used for solution, is explained to solve buckling problem. Initial values method expresses the unknown boundary conditions of the differential equation with the known boundary conditions at the beginning. By this way, the unknown terms in the problem are reduced and solution becomes easier. Solution method with the principal matrix and the approximate transfer matrix is described right after the initial values method. As the solutions with the principal matrix give certain results, the solutions with the approximate transfer matrix give approximate results, but the calculation phases are more easier. Results obtained for the frame elements, which are supported in four different forms, with this two methods are compared. By this way, effectiveness of calculation with the approximate transfer matrix is shown. Afterwards, buckling load values are obtained for the inconstant sectioned frame elements, which are supported in four different forms, with the approximate transfer matrix. In the final phase of the study, buckling load for a double walled carbon nanotube, which is simply supported at both ends, is calculated with the approximate transfer matrix.

1. GİRİŞ

Mühendislikte, hatanın önceden tahmin edilmesi, yapıların güvenliği açısından önemli yer tutar. Bu nedenle yapı elemanlarının güvenliğinde etkin bir rol oynayan stabilite konusu, geçmişten günümüze geniş ilgi odağı olmuş ve çeşitli uygulamalarda kullanılmıştır. Bir stabilite problem olarak “burkulma” ilgi odağı olan bu konuların başında gelmektedir.

Burkulma, yapısal bir elemanda basınç gerilmeleri altında meydana gelen şekil değiştirme olarak özetlenebilir [1]. Bir kesitin burkulmasına neden olan basınç gerilmesine ise o kesitin “kritik burkulma yükü” denir [1,2]. Yapısal elemanda burkulma meydana gelmeden önce, eleman sadece eksenel yük altındadır, ancak elemanda burkulma gerçekleşmeye başladıktan sonra, meydana gelen yer değiştirmelerden dolayı eksenel yüke ek olarak, yine eksenel yükten dolayı oluşan bir moment etkisi ortaya çıkar. Bu nedenle yapısal elemanda istenmeye zaafiyetler baş gösterebilir [1,2]. Yapısal eleman tasarımı yapılırken, elemanın burkulma davranışında göz önünde bulundurulmalıdır, bu sebeptendir ki burkulma problem üzerinde çok çalışılan bir konu haline almıştır.

Burkulma problemini ilk olarak 1700’lü yılların ortalarında Leonhard Euler, dört farklı mesnetlenme koşulu için çözmüştür [2]. Günümüze kadar geçen süreçte de burkulma problemlerini çözümlenmesinde çeşitli yöntemler geliştirilmiştir ve günümüzün gelişen teknolojisi sayesinde burkulma problemleri bilgisayar programları yardımı ile çözülebilmektedir.

Burkulma problemi diferansiyel denkleminin kesin çözümünü el ile hesaplamak bazı koşullarda çok zor olabilir. Bu diferansiyel denklemin çözümünde kullanılan yöntemlerden bir tanesinde, problemi başlangıç değerler metodu ve yaklaşık taşıma matrisi kullanarak yaklaşık olarak çözmektir. Bu çalışmaya da konu olan burkulma problemlerinin başlangıç değerler metodu ve yaklaşık taşıma matrisi ile çözümü, etkin bir biçimde uygunlandığı takdirde, hem kolaylık sağlamakta hem de kesin çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

1.1 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı, çeşitli mesnetlenme koşullarında, sabit ve değişken kesitlere sahip karbon nanotüplerin kritik burkulma yüklerinin, öncelikle kesin sonuçlarının hesaplanması, ardından ise kesitlerin kritik burkulma yüklerinin başlangıç değerler metodu ve yaklaşık taşıma matrisi kullanılarak hesaplanmasıdır.

Ayrıca yaklaşık taşıma matrisi kullanılarak hesaplanan burkulma yüklerinin, taşıma matrisi serisi genişletildikçe ve çözümün istendiği aralık daha küçük parçalara bölünerek hesaplamalar yapıldıkça, ortaya çıkan sonuçların karşılaştırılması ve kesin sonuca ne kadar yaklaşıldığının gösterilmesidir.

Bu doğrultuda, bu çalışmada;

- a) Nanoteknoloji ve karbon nanotüpler hakkında bilgiler verilecek.
- b) Burkulma problemi ve kritik burkulma yükü anlatılacak.
- c) Çalışmada kullanılacak yöntemler olan başlangıç değerler metodu ve yaklaşık taşıma matrisi gösterilecek.
- d) Anlatılan yöntemler ışığında çeşitli örnekler çözülerek, sonuçlar gözlemlenecektir.
- e) İki ucu basit mesnetli, çift duvarlı karbon nanotüp için burkulma yükü hesaplanacaktır.

2. NANOTEKNOLOJİ VE KARBON NANOTÜPLER

2.1 Nanoteknoloji

Nanoteknoloji, aygıt fiziği, malzeme bilimi, elektronik, kimya, biyoloji gibi birçok alanda faaliyet gösteren, maddeyi atomik ve moleküler seviyede kontrol etme bilimi olarak tanımlanabilir [3].

Nanoteknoloji, maddeyi nano boyut olarak tabir edilen ve birimi nanometre olan bir boyutta inceler. Bir nanometre ise metrenin milyarda birine denk gelen bir ölçü birimidir [3]. Nanoteknoloji, genel itibariyle 100 nanometre ve daha küçük boyutta malzeme ve aygıt geliştirmekle ilgilenen bir bilim dalıdır [3].

Bilimin, maddeyi nano boyutlarda incelemesinin ve aygıtlar geliştirmek istemesinin temel nedenlerinden birisi, maddelerin nano boyutta, normal boyutlarındaki hallerine göre hem fiziksel hem de kimyasal olarak çok farklı özellikler sergilemesidir [3]. Örneğin külçe şeklindeki altın başka maddeler ile reaksiyona girmek istemezken, nano boyutta bu durumun tam tersi gözlenmektedir [3]. Maddelerin, normal ve nano boyutlardaki halleri arasında fiziksel ve kimyasal farklılıklar oluşmasına sebep olarak kuantum etkileri gösterilmektedir [3]. Bu ve benzeri sebeplerden dolayı, maddeler nano boyutta iken, bilinen fiziki teoremlerin ötesinde daha özel fiziki teoremler ile incelenmelidir.

Daha önce de belirtildiği gibi nano boyutta, malzemeler bilinen özelliklerinden farklı özelliklere geçiş yapabilmektedir. Malzemeler, bilinen hallerinden daha iletken, esnek ya da mukavemetli olabilmektedirler [4]. Bu sebeple klasik elastisite teorisi, nano boyuttaki olguları açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Yerel olmayan elastisite teorisi, klasik teorisinin yetersiz kaldığı bu nokta da devreye girmektedir. Örneğin bir cismin içyapısında oluşan gerilmeler arasında mesafenin atomik boyutlarda olması, içyapının önemi azalacağından klasik elastisite teorisi çerçevesinde incelenmesi uygundur [4].

Ancak cisme uygulanan dış etkilerin büyük olması durumunda cismin içyapısı da önem kazanır, bu nedenle gerilme hesabı yapılırken yerel olmayan elastisite

teorisinden yararlanılır. Klasik elastisite teorisi ile yerel olmayan elastisite teorisi arasındaki tek fark; bünye denklemleridir [4].

Bahsedilen bu sebeplerden dolayı nanoteknolojide malzeme en önemli unsurdur ve bu alanda en çok kullanılan malzeme karbondur. Karbon altı elektrona sahiptir ve karbon atomunun elektronlarından ilk ikisinin hiç etkisinin olmaması, ayrıca ilk iki elektron ile diğer elektronlar arasındaki enerji farkının büyük olması karbonun farklı yapılar oluşturabilmesini sağlamaktadır [4]. Bu sebeplerden dolayı karbon, nanoteknolojinin en önemli malzemesidir. Nanoteknolojinin en önemli çalışma alanlarından birini de karbon nano yapılar teşkil etmektedir. Bunlar genellikle toplar, tüpler, çubuklar ve halkalar şeklinde sınıflandırılabilen kafesimsi yapılardır.

2.2 Karbon Nanotüpler

Karbon nanotüpler, önemli yapısal, mekaniksel ve elektronik özellikler gösteren yeni nano-materyallerdir [4]. Yüksek elektrokimyasal aktiviteleri, biyosensor ve elektrokimyasal uygulamalar için çok önemlidir [4]. Karbon nanotüplerin, elektronik malzeme olarak manyetik ve optik nano aygıt yapımında; ayrıca hafıza elemanı, kapasitör, transistör, diyot, mantık devresi ve elektronik anahtar yapımında kullanım alanları bulunmaktadır. Bunların yanında karbon nanotüpler, bilinen en sağlam malzeme olma özelliğine sahiptir [4]. Hasarsız bir karbon nanotüp, kendi ağırlığının 300 milyon katı bir ağırlığa dayanabilecek sağlamlıktadır.

Karbonun tüp şeklinde yapı oluşturabileceği, ilk defa 1991 yılında, Lijima tarafından, deneysel olarak farkedildi [5]. Grafitten "arc-discharge" buharlaştırma yöntemiyle elde edilen tüpler, Grafit plakasının kıvrılarak silindirik şekline gelmesiyle içi boş boru halini alıyor [5].

Karbon nanotüpler, geometrilerine bağlı olarak yarı-iletken ve metalik özellik gösterirler. Hiç bir katkı maddesi olmaksızın, nanotüpün, geometrik parametrelerinin değiştirilmesiyle, elektronik özellikleri de değiştirebilir. Tüplerin elektronik uygulamalarda, önemli bir yeri vardır. Çok esnek ve sağlamdırlar [4].

Küçük çaplı tüplerden oluşturulmuş bir demeti, koparabilmek için uygulanan çekme kuvveti, yaklaşık 36 gpa'dır [6]. St37 yapısal çeliğinin çekme emniyet gerilmesinin 141 mpa olduğu göz önüne alındığında bu çok yüksek bir değerdir. Buna göre, nanotüp fiberler, gerilmeye karşı en sağlam malzeme özelliğini taşırlar [6].

Nanotüp yapıda, grafit plakalarında olduğu gibi sadece altıgen şekiller bulunmaktadır. Düzgün karbon nanotüp yapılarında, atomlar, birbirleri ile sp² şeklinde (Grafit plakada olduğu gibi) bağlanmaktadır [7]. Atomlar sadece altıgen geometri oluşturmakta ve her atomun sadece üç komşusu bulunmaktadır. Karbon tüplerin, makro boyutlarda oluşmaları mümkün ise de, bunlar çok kırılığandır. Ancak nano boyutlara sahip tüpler, çok esnek ve sağlamdır [7].

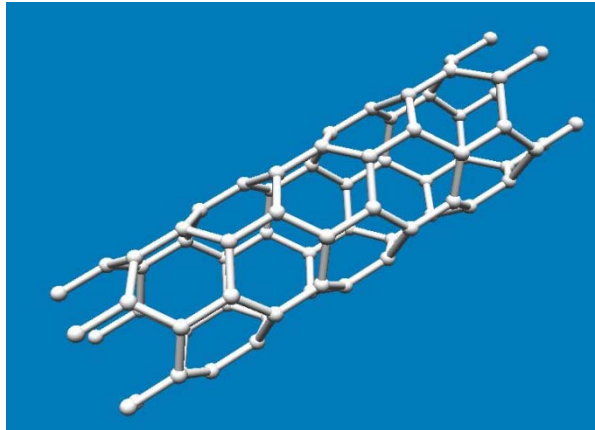
Tek duvarlı ve çok duvarlı olmak üzere iki tür karbon nanotüp vardır.

2.2.1 Tek duvarlı karbon nanotüp

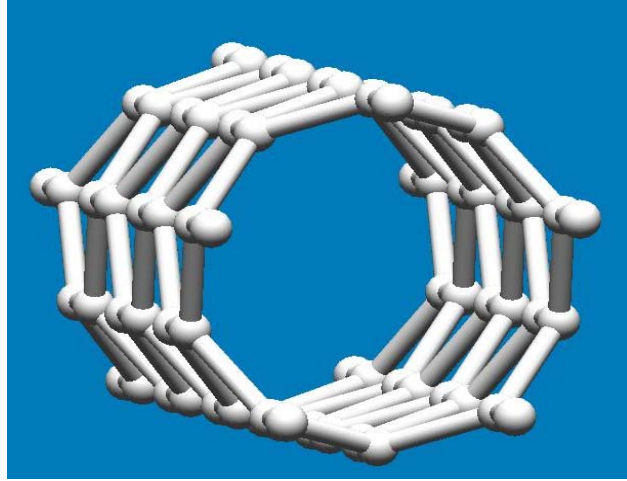
Tek duvarlı karbon nanotüplerin büyük çoğunluğu yaklaşık olarak 1 nanometre çapa sahiptir ve uzunlukları da milyonlarca nanometre olabilir [7]. Tek duvarlı karbon nanotüpün yapısı konsept olarak grafit plakasının kıvrılarak silindir şekline gelmesiyle içi boş bir boru halini alması olarak tanımlanabilir [7].

Tek duvarlı karbon nanotüpler çaplarına, boylarına ve geometrik yapılarına bağlı olarak yüksek esneklik ve dayanıklılığa sahip, eksenleri boyunca yüksek gerinimler altında yapısal kararlılıklarını koruyan malzemelerdir [6]. Tek duvarlı karbon nanotüplerin elektronik özellikleri de geometrik yapılarıyla çok yakından ilgilidir [6].

Bir grafin tabakası enerji band aralıksız bir yarı-iletken olmasına karşın bunun bir silindir şeklinde katlanması ile oluşan tek duvarlı karbon nanotüpler metal veya değişik genişlikte enerji band aralığına sahip yarı-iletkenler olabilmektedir [6]. Bir tek duvarlı karbon nanotüpün metal veya yarı-iletken özellik gösterebilmesi çapı ve geometrik yapısına bağlıdır [6]. Şekil 2.1 ve Şekil 2.2’de tek duvarlı karbon nanotüplere ait resimler görülmektedir [8].



Şekil 2.1 : Tek duvarlı karbon nanotüp (yan görünüş).

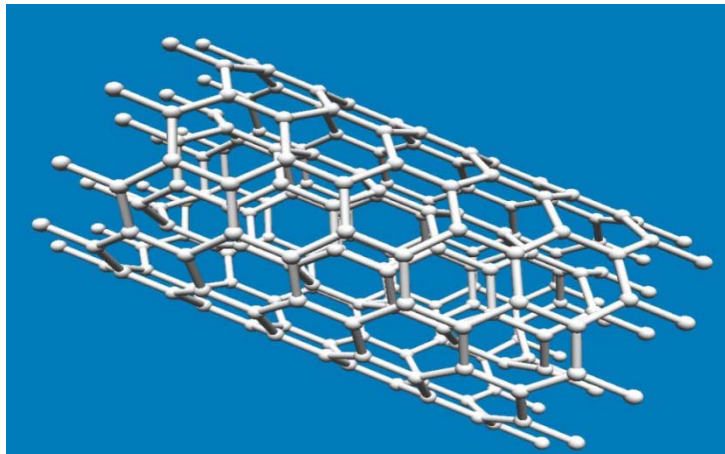


Şekil 2.2 : Tek duvarlı karbon nanotüp (Perspektif).

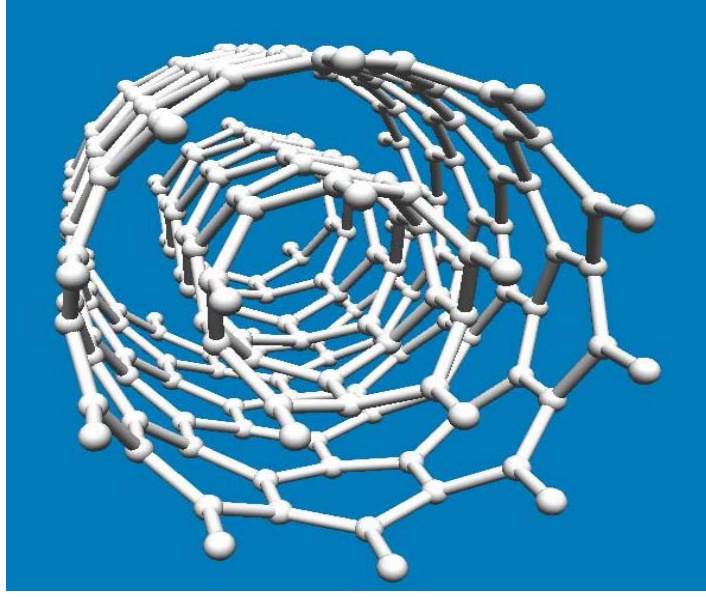
2.2.2 Çok duvarlı karbon nanotüp

Çok duvarlı karbon nanotüpler, birden çok grafit silindirin bir araya gelmesiyle oluşmaktadır [7]. Çok duvarlı karbon nanotüpler'in yapısı iki tip model ile tanımlanmaktadır. İlk model, eş merkezli, çapları farklı tek duvarlı karbon nanotüplerin bir araya gelmesi şeklindedir [7]. İkinci model ise bir grafit tabakasının kendi etrafında dönerek meydana getirdiği çok duvarlı karbon nanotüptür [7].

Çift duvarlı karbon nanotüplere ayrıca değinmek gereklidir. Bu nanotüpler, biçim ve özellikler bakımından tek duvarlı karbon nanotüplere benzese de kimyasal olaylara karşı direnci oldukça gelişmiştir [7]. Bu durum karbon nanotüplere yeni özellikler tanımlarken oldukça önemlidir. Şekil 2.3 ve Şekil 2.4'te çift duvarlı karbon nanotüplere örnek şekiller gösterilmiştir [8].



Şekil 2.3 : Çok duvarlı karbon nanotüp (Perspektif).



Şekil 2.4 : Çok duvarlı karbon nanotüp (Perspektif).

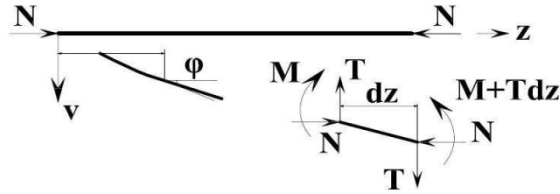
3. BURKULMA VE KRİTİK BURKULMA YÜKÜ

3.1 Burkulma

Stabilite, yapı elemanlarının boyutlandırılmasında temel karakteristiklerden bir tanesidir. Burkulma ise, bir stabilite problemidir. Bir basınç elemanına yavaşça artan bir aksenal basınç kuvveti etkilirse, yük belirli bir değere ulaştığında, eleman stabilitesini yitirir ve bir şekil değiştirme gerçekleşir [1]. Basınç elemanının yaptığı şekil değiştirmeye “burkulma” ve elemanın şekil değiştirmesine neden olan bu kuvvete “kritik burkulma yükü” denir [1,9]. Elemanların mesnetlenme koşullarına bağlı olarak, kritik burkulma yükünün değeri değişiklik gösterir. Bölüm 3.2’de iki ucu basit mesnetli bir çubuk elemanının kritik burkulma yükü hesaplanacaktır.

3.2 Aksenal Kuvvet Altında Çubuk Elemanların Diferansiyel Denklem Sistemi

Klasik elastisite kuralları çerçevesinde, Şekil 3.1’deki gibi aksenal kuvvete maruz olan bir çubuk elemanını inceleyelim.



Şekil 3.1 : Aksenal kuvvet altında çubuk elemanında oluşan kesit tesirleri.

Aksenal kuvvet altında çubuk elemanında meydana gelen kesit tesirleri Şekil 3.1’de gösterilmiştir. Bu kesit tesirleri incelenerek, çubuğa ait denge denklemlerini oluşturalım.

“ v ” kesitte meydana gelen düşey deplasman olmak üzere, (3.1) kesitte meydana gelen açısals deplasmanı,

$$\frac{dv}{dz} = \phi \quad (3.1)$$

“ ϕ ” açısals deplasmanının türevi olan (3.2), kesitteki eğilme momentini,

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{-M}{EI} \quad (3.2)$$

“ M ” eğilme momentinin türevi olan (3.3) kesitteki kesme kuvvetini,

$$\frac{dM}{dz} = T + N\varphi \quad (3.3)$$

ve son olarak (3.4) kesitteki “ T ” kesme kuvvetinin türevini göstermektedir.

$$\frac{dT}{dz} = 0 \quad (3.4)$$

Yukarıda gösterilmiş olan dört denklem aksenal kuvvet altındaki çubuklar için klasik elastisite teoremleri çerçevesinde temel bünye bağıntılarıdır. Bu bünye bağıntıları matris formda yazılırsa, bünye bağıntıları (3.5)’teki formu alacaktır.

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{EI} & 0 \\ 0 & N & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ T \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

(3.5)’i genel formda yazalım,

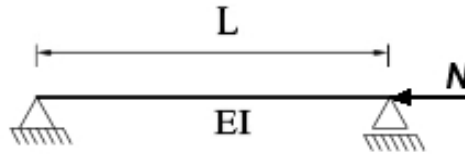
$$\frac{dy}{dz} = A y \quad (3.6)$$

$$y(0) = y_0 \quad (3.7)$$

Böylece bağıntılar yukarıdaki denklemlerde görüldüğü gibi olacaktır.

3.3 İki Ucu Basit Mesnetli Çubuk Elemanın Kritik Burkulma Yükü Hesabı

Şekil 3.2’te görülen iki ucu basit mesnetli çubuğa, aksenal “ N ” basınç kuvveti etkilmiş olup, çubuğun burkulmasına neden olan kritik burkulma yükü hesaplanacaktır.



Şekil 3.2 : Aksenal yük altında basit mesnetli çubuk.

İki ucu basit mesnetli çubuk elemanları için aksenal yük etkisinde kesitte meydana gelen tesirlerin temel bünye bağıntıları (3.8), (3.9) ve (3.10)'da gösterilmiştir.

$$\frac{dv}{dz} = \varphi \quad (3.8)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{-M}{EI} \quad (3.9)$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{-M}{EI} \quad (3.10)$$

Buradaki bağıntılarda geçen, “ φ ” sembolü açısai deplasmanı, “ v ” sembolü düşey deplasmanı ve “ M ” sembolü ise çubuğa etkiyen aksenal basınç kuvvetinden dolayı çubuk şekil değiştirmeye başladıktan sonra, meydana gelen momenti ifade etmektedir.

Meydana gelen momentin denklemleri;

$$M = Nv \quad (3.11)$$

Bu denklem, (3.2)'de yerine konulursa şu şekli alır;

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{-Nv}{EI} \quad (3.12)$$

Bu denklemi çözebilmek için ise iki ucu basit mesnetli çubuğun sınır koşulları yazılmalıdır. İki ucu basit mesnetli çubuğun sınır koşulları şunlardır:

$$v(0) = 0 \quad (3.13)$$

$$v(L) = 0 \quad (3.14)$$

$$M(0) = 0 \quad (3.15)$$

$$M(L) = 0 \quad (3.16)$$

Bu sınır koşullarından yola çıkarak problemin çözümü yazılıp, sınır koşulları yardımı ile burkulma yükü hesaplanır.

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{Nv}{EI} = 0 \quad (3.17)$$

İşlem kolaylığı sağlanması açısından;

$$\frac{N}{EI} = \beta^2 \quad (3.18)$$

Değişken dönüşümü yapılabilir. (3.17)'nin çözümü bir çok bilgisayar programıyla ve elle rahatlıkla yapılabilir. Denklemin sonucu yazılırsa;

$$v(z) = A \sin[\beta z] + B \cos[\beta z] \quad (3.19)$$

(3.19)'daki "A" ve "B" değerleri bilinmeyen katsayılarıdır. Bu bilinmeyenleri hesaplayabilmek için problemin sınır koşullarını faydalanılırsa,

$$B = 0 \quad (3.20)$$

$$A \neq 0 \quad (3.21)$$

"A"nın değeri sınır koşullarıyla bulunamaz ancak "A"nın sıfır olamayacağı sınır koşullarıyla ortaya çıkmıştır.

$$v(z) = A \sin[\beta z] \quad (3.22)$$

$$v(L) = A \sin[\beta L] = 0 \quad (3.23)$$

(3.21)'de "A"nın sıfır olamayacağı belirlenmişti. Bu nedenle;

$$\sin[\beta L] = 0 \quad (3.24)$$

ifadesi olmalıdır. Buradan yola çıkarak;

$$[\beta L] = n\pi \quad (3.25)$$

elde edilir. (3.18)'de uygulanan değişken dönüşümü yerine konulur.

$$\sqrt{\frac{N}{EI}} L = n\pi \quad (3.26)$$

$$N = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (3.27)$$

Böylelikle iki ucu basit mesnetli çubukta kritik burkulma yükü hesaplanmış olur.

4. BAŞLANGIÇ DEĞERLER METODU VE YAKLAŞIK TAŞIMA MATRİSİ

Bu bölümde, çeşitli şekillerde mesnetlenmiş sabit ve değişken kesitli çubukların kritik burkulma yüklerinin hesaplanmasında kullanılacak yöntemler; başlangıç değerler metodu ve yaklaşık taşıma matrisi, hakkında bilgi verilecektir.

4.1 Başlangıç Değerler Metodu

Günümüzde mühendislik çalışmalarında incelenen çeşitli problemlerin çözümleri, gerek bilgisayarlar yardımı ile gerekse değişik yöntemler kullanılarak el ile çözülebilmektedir. Bu problemlerin çözümlerinde istenilen önemli noktalardan biri ise, problemlerin kesin çözümlerini en kısa zamanda ve en rahat şekilde elde edebilmektir.

Söz konusu mühendislik problemlerinin çözümlenmesinde kullanılan yöntemlerden bir tanesi de başlangıç değerler metodudur. Bir problemde bilinmeyen eleman sayısı fazla ise, tahmin edilebileceği gibi bu problemin çözümü zorlaşır ve aynı zamanda hata yapma ihtimali de artar. Bu da problemin doğru çözümünün elde edilememesine sebep olur [10]. Bu nedenle, problemler çözümlenirken bilinmeyen sayısını olabilecek en düşük mertebede tutmak, problemin çözümünü kolaylaştıracağı gibi hem zamandan hem de emekten tasarruf sağlayacaktır [10]. Başlangıç değerler metodu, bu amaç doğrultusunda kullanılan yöntemlerden biridir.

Başlangıç değerler metodunun problem çözümünü kolaylaştırmasındaki esas nokta, bu metodun sınır değerleri problemlerinin hepsini başlangıç değerleri problemine dönüştürmesidir [10]. Bu yöntem sayesinde sınır değerleri problemlerinin ara şartlarından dolayı ortaya çıkabilecek yeni sabitlerin önüne geçilir ve problem her zaman başlangıçtaki bilinen değerler ile ifade edilir [10]. Böylece problemin çözümünde önemli kolaylıklar sağlanır.

Bu çalışmada, çeşitli şekillerde mesnetlenmiş sabit ve değişken kesitli çubuklar burkulma problemleri başlangıç değerleri metodunun esas fikrine dayanarak çözümlenecektir. Burkulma problemlerinin çözümünde ortaya çıkan bilinmeyenler,

çubukların mesnetlenme şekillerinden dolayı başlangıçta bilinen değerler cinsinden ifade edilerek problemin çözümüne gidilecektir.

4.2 Kesin Taşıma Matrisi

Bölüm 3.2'deki (3.6) ve (3.7)'de, klasik elastisite teoremleri çerçevesinde, aksenal yük altındaki bir çubuk elemanına ait temel bünye bağıntıları genel formda yazılmıştı. Genel formdaki bu temel bünye bağıntıları (4.1) ve (4.2)'de tekrar gösterilmiştir, bu denklemin çözümü ise (4.3)'de gösterildiği gibidir.

$$\frac{dy}{dz} = A y \quad (4.1)$$

$$y(0) = y_0 \quad (4.2)$$

$$y(z) = Y(z,0) y_0 \quad (4.3)$$

Burada $Y(z,0)$ kesin taşıma matrisini ifade etmektedir ve bu çözüm diferansiyel denklemin kesin sonucunu verecektir [11]. (4.3)'de gösterilen fonksiyon, kesin taşıma matrisinin hesaplanması için çözümlenmesi gereken fonksiyonu göstermektedir [11].

$$e^{Az} \quad (4.4)$$

Bu fonksiyon bilgisayar programı vasıtasıyla çözümlendiği takdirde kesin taşıma matrisi bulunabilir [12]. Kesin taşıma matrisinin elemanları şu şekildedir:

$$Y_{11}(z) = 1 \quad (4.5)$$

$$Y_{12}(z) = \frac{\text{Sin}[\sqrt{\beta}\sqrt{N}z]}{\sqrt{\beta}\sqrt{N}} \quad (4.6)$$

$$Y_{13}(z) = \frac{-2\text{Sin}[0.5\sqrt{\beta}\sqrt{N}z]^2}{N} \quad (4.7)$$

$$Y_{14}(z) = \frac{-z}{N} + \frac{\text{Sin}[\sqrt{\beta}\sqrt{N}z]}{\sqrt{\beta}N^{3/2}} \quad (4.8)$$

$$Y_{21}(z) = 0 \quad (4.9)$$

$$Y_{22}(z) = \text{Cos}[\sqrt{\beta}\sqrt{N}z] \quad (4.10)$$

$$Y_{23}(z) = \frac{-\sqrt{\beta} \text{Sin}[\sqrt{\beta} \sqrt{N} z]}{\sqrt{N}} \quad (4.11)$$

$$Y_{24}(z) = \frac{-2 \text{Sin}[0.5 \sqrt{\beta} \sqrt{N} z]^2}{N} \quad (4.12)$$

$$Y_{31}(z) = 0 \quad (4.13)$$

$$Y_{32}(z) = \frac{\sqrt{N} \text{Sin}[\sqrt{\beta} \sqrt{N} z]}{\sqrt{\beta}} \quad (4.14)$$

$$Y_{33}(z) = \text{Cos}[\sqrt{\beta} \sqrt{N} z] \quad (4.15)$$

$$Y_{34}(z) = \frac{\text{Sin}[\sqrt{\beta} \sqrt{N} z]}{\sqrt{\beta} \sqrt{N}} \quad (4.16)$$

$$Y_{41}(z) = 0 \quad (4.17)$$

$$Y_{42}(z) = 0 \quad (4.18)$$

$$Y_{43}(z) = 0 \quad (4.19)$$

$$Y_{44}(z) = 1 \quad (4.20)$$

Bu matris elemanları ile (4.1)'in kesin sonucu hesaplanabilmektedir.

4.3 Yaklaşık Taşıma Matrisi

Bölüm 4.2'de kesin taşıma matrisi yardımı ile genel formda yazılmış bir diferansiyel denklemin nasıl çözümleneceği gösterilmişti. Günümüzde bu tip matematik problemlerinin çözümü çeşitli bilgisayar programları ve diğer çeşitli yöntemler ile de yapılabilmektedir. Ancak el ile hesap yapmak ve yöntem olarak kesin taşıma matrisi kullanılmak istediğinde, diferansiyel denklemin kesin sonucunu hesaplamak kimi problemlerde pek kolay olmayabilir. Bu tip durumlarda diferansiyel denklemin çözümünün yaklaşık taşıma matrisi ile hesaplanması daha efektif olabilmektedir.

Yaklaşık taşıma matrisi yardımı ile diferansiyel denklemin sonucunun kesin değeri her zaman hesaplanamasa da, yöntem akılcı bir şekilde uygulandığında iki yöntem arasında ortaya çıkan farkı ihmal edebilecek kadar yakın sonuçlar bulunmaktadır.

Yaklaşık taşıma matrisini anlamak için (4.21)'i ele alalım;

$$\begin{pmatrix} \frac{dX_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dX_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t)_{11} & \cdots & A(t)_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A(t)_{n1} & \cdots & A(t)_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$A(t)$, herhangi bir (a,b) aralığında t 'ye bağlı bir matris fonksiyonu olmak üzere denklemini genel formda yazarsak,

$$\frac{dX}{dz} = A(t) X \quad (4.22)$$

şeklini alır [13].

Ardışık yaklaşık yöntemini (4.22)'ye uygularsak, $(t_0, a-b)$ aralığında belirli bir sayı olmak üzere) $t = t_0$ 'da sonuç birim matris olur. “ X_0 ” birim matris “ I ” kabul edildiğinde, diğer sonuçlar “ X_n ” ($n = 0, 1, 2, \dots$) (4.23) ile bulunabilir [13].

$$\frac{dX_n}{dz} = A(t) X_{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.23)$$

Buradan yola çıkarak,

$$X_n(t_0) = I \quad (4.24)$$

kabul edersek, X_n 'i aşağıda gösterilen formda yazabiliriz [13].

$$X_n = I + \int_0^t A[\tau] X_{n-1} d\tau \quad (4.25)$$

Böylelikle aşağıdaki denklemlerde de gösterildiği şekilde istenilen X_n terimini hesaplamak mümkündür [13].

$$X_0 = I \quad (4.26)$$

$$X_1 = I + \int_0^t A[\tau] d\tau \quad (4.27)$$

$$X_2 = I + \int_0^t A[\tau] d\tau + \int_0^t A[\tau] \int_0^\tau A[\sigma] d\sigma d\tau \quad (4.28)$$

Bu ifadelerden anlaşılacağı gibi, matris serisinin “ $n+1$.” elemanı, “ n .” terim ve ona eklenen ifadelerden oluşmaktadır [13]. Yaklaşık taşıma matrisi serisini (4.29)’da görebiliriz.

$$I + \int_0^t A[\tau] d\tau + \int_0^t A[\tau] \int_0^\tau A[\sigma] d\sigma d\tau \dots \quad (4.29)$$

Diferansiyel denklem, başlangıçta bilinen değerleri ve yaklaşık taşıma matrisi ile (4.30)’da gösterilen bağıntı ile çözümlenir [13].

$$y(z) = X_k y(0) \quad (4.30)$$

Yaklaşık taşıma matrisi serisinde hesaplanan terim sayısı ne kadar arttırılırsa, diferansiyel denklemin kesin sonucuna o mertebede yakın sonuç elde edilir [13]. Yaklaşık taşıma matrisinin daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki örneği inceleyelim. Aşağıdaki örnekte $y(0)$ ’daki değerleri bilinen denklem takımını yaklaşık taşıma matrisi ile çözelim,

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t+1} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Problemi yaklaşık taşıma matrisi ile çözmeden önce, hem el ile hem de bilgisayar programları vasıtasıyla çözülebilir olan bu problemin kesin sonuçlarına bakalım,

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{t+1} y_1 \quad (4.33)$$

Bu denklemin kesin çözümü,

$$y_1 = t + 1 \quad (4.34)$$

olmak üzere “ t ” değişkenine değer olarak “0” verildiğinde, başlangıç koşulunu sağladığı görülmektedir.

$$y_1 = 0 + 1 \quad (4.35)$$

$$y_1(0) = 1 \quad (4.36)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 \quad (4.37)$$

Bu denklemin kesin çözümü ise,

$$y_2 = \frac{t^2}{2} + t \quad (4.38)$$

olmak üzere “ t ” değişkenine değer olarak sıfır verildiğinde, başlangıç koşulunu sağladığı görülmektedir.

$$y_2 = \frac{0}{2} + 0 \quad (4.39)$$

$$y_2(0) = 0 \quad (4.40)$$

Böylelikle “ y_1 ” ve “ y_2 ” denklemlerinin kesin sonuçlarını görmüş olduk. Şimdi ise yaklaşık taşıma matrisini hesaplayalım.

(4.26), (4.27) ve (4.28)’den faydalanarak yaklaşık taşıma matrisini hesaplayabiliriz,

$$X_0 = I \quad (4.41)$$

$$X_1 = I + \int_0^t A[\tau] d\tau \quad (4.42)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{t+1} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \text{Log}[1+t]+1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = X_1 + \int_0^t A[\tau] \int_0^\tau A[\sigma] d\sigma d\tau \quad (4.43)$$

$$= \begin{pmatrix} \text{Log}[1+t]+1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\tau} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \text{Log}[1+\tau]+1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \text{Log}[1+t] + \frac{1}{2} \text{Log}[1+t]^2 & 0 \\ \text{Log}[1+t] + t \cdot \text{Log}[1+t] & 1 \end{pmatrix}$$

Bu hesaplamaların ardından iki terimli yaklaşık taşıma matrisi elde edilmiştir.

Yaklaşık taşıma matrisini kullanarak sonuçları hesaplarsak,

$$y(z) = X_k y(0) \quad (4.44)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \text{Log}[1+t] + \frac{1}{2} \text{Log}[1+t]^2 & 0 \\ \text{Log}[1+t] + t \cdot \text{Log}[1+t] & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Bu denklem takımı çözüldüğünde,

$$y_1 = 1 + \text{Log}[1+t] + \frac{1}{2} \text{Log}[1+t]^2 \quad (4.46)$$

ve

$$y_2 = \text{Log}[1+t] + t \cdot \text{Log}[1+t] \quad (4.47)$$

olarak elde edilir. Sonuçlar başlangıçta elde edilen kesin sonuçlardan farklı gözükse de “ t ” değişkenine değerler atayarak Çizelge 4.1’deki sonuçlara baktığımızda, elde edilen değerlerin kesin sonuca ne kadar yakın olduğu görülecektir.

Çizelge 4.1 : “ y_1 ” ve “ y_2 ” kesin ve yaklaşık sonuçları.

	Y1		Y2	
	Kesin	Yaklaşık	Kesin	Yaklaşık
t = 0.1	1.1	1.099	0.105	0.104
t = 0.2	1.2	1.198	0.22	0.218
t = 1	2	1.346	1.5	0.602

Çizelge 4.1’deki değerlerden de anlaşılacağı gibi, “ t ” değişkenine atanan değer büyüdükçe, kesin ve yaklaşık sonuçlar arasındaki fark açılmaktadır. Küçük değerlerde ise sonuçların ne kadar yakın olduğu görülmektedir.

Yaklaşık taşıma matrisiyle incelenen örnekte de görüldüğü gibi kesin sonuca yaklaşılmaktadır, ancak kesin çözüme en yakın sonuca ulaşmak için taşıma matrisi serisini ilerletmek gereklidir. Bu durumda da iç içe geçen yoğun integral hesaplamalarından dolayı işlem hacmi tekrar artmakta ve bir bakıma yöntem amacından uzaklaşmaktadır. Tam bu noktada farklı bir yol izlenerek, yine taşıma matrisini kullanarak bir çözüm yolu izlenebilir. Bu alternatif çözüm yolunun mantığı şu şekilde işler; ilk olarak yaklaşık taşıma matrisi serisi kolay olarak hesaplanabilecek terim sayısı kadar hesaplanır, ardından çözümün istendiği aralık daha küçük parçalara bölünerek hesap yapılır. Bu yöntem ile hem seriyi ilerletme yöntemine göre hesap kolaylığı sağlanır hem de kesin sonuca yakınsayan bir çözüm elde edilir.

Yöntemde izlenmesi gereken yol şu şekildedir, öncelikle yaklaşık taşıma matrisi serisi hesaplanırken, integral sınırları (4.48), (4.49) ve (4.50)'de gösterilen şekilde $(0,t)$ yerine (u,t) olarak değiştirilir.

$$X_0 = I \quad (4.48)$$

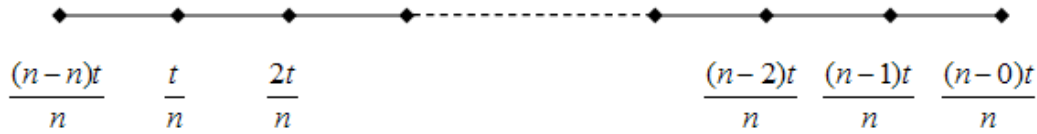
$$X_1 = I + \int_u^t A[\tau] d\tau \quad (4.49)$$

$$X_2 = I + \int_u^t A[\tau] d\tau + \int_u^t A[\tau] \int_u^\tau A[\sigma] d\sigma d\tau \quad (4.50)$$

Yaklaşık taşıma matrisi serisi istenilen kadar ilerletildikten sonra, çözüm aranan aralığın kaç parçaya bölünerek hesap yapılacağına karar verilir. Aralık sayısını arttırmak kesin çözüme o mertebede yaklaşılmamasını sağlar. Genel çözüm (4.51)'de gösterilmiştir.

$$X_n = F[t, u] \quad (4.51)$$

$(0,t)$ aralığının “ n ” parçaya bölünmüş hali Şekil 4.1’de gösterilmiştir,



Şekil 4.1 : “ n ” parçaya bölünmüş çubuk elemanı.

$$X_n = F[t, 0] = F\left[t, \frac{(n-1)t}{n}\right] F\left[\frac{(n-1)t}{n}, \frac{(n-2)t}{n}\right] \dots F\left[\frac{2t}{n}, \frac{t}{n}\right] F\left[\frac{t}{n}, \frac{(n-n)t}{n}\right] \quad (4.52)$$

(4.51)'in açık formda yazılmış hali, yukarıda (4.52)'de gösterilmiştir. Bu yöntem ile hesaplanan yaklaşık taşıma matrisi vasıtası ile, (4.53)'de gösterilen formül kullanılarak sonuç hesaplanır.

$$y = X_k y(0) \quad (4.53)$$

Bu şekilde hesaplanan sonuçların da kesin sonuca ne kadar yakın sonuçlar verdiğini ilerleyen bölümlerde göreceğiz.

4.3.1 İki Terimli Yaklaşık Taşıma Matrisi

Bölüm 4.3'te yaklaşık taşıma matrisi hesaplama yöntemi gösterilmişti, bu bölümde ise bilgisayar programları vasıtasıyla hesaplanan iki terimli yaklaşık taşıma matrisi elemanları gösterilecektir [12]. İki terimli yaklaşık taşıma matrisi,

$$Y_{11}(z) = 1 \quad (4.54)$$

$$Y_{12}(z) = z \quad (4.55)$$

$$Y_{13}(z) = \frac{-z^2}{2EI} \quad (4.56)$$

$$Y_{14}(z) = 0 \quad (4.57)$$

$$Y_{21}(z) = 0 \quad (4.58)$$

$$Y_{22}(z) = 1 - \frac{Nz^2}{2EI} \quad (4.59)$$

$$Y_{23}(z) = \frac{-z}{EI} \quad (4.60)$$

$$Y_{24}(z) = \frac{-z^2}{2EI} \quad (4.61)$$

$$Y_{31}(z) = 0 \quad (4.62)$$

$$Y_{32}(z) = Nz \quad (4.63)$$

$$Y_{33}(z) = 1 - \frac{Nz^2}{2EI} \quad (4.64)$$

$$Y_{34}(z) = z \quad (4.65)$$

$$Y_{41}(z) = 0 \quad (4.66)$$

$$Y_{42}(z) = 0 \quad (4.67)$$

$$Y_{43}(z) = 0 \quad (4.68)$$

$$Y_{44}(z) = 1 \quad (4.69)$$

4.3.2 Dört Terimli Yaklaşık Taşıma Matrisi

Bu bölümde ise bilgisayar programı ile hesaplanmış dört terimli yaklaşık taşıma matrisi gösterilecektir [12]. Hesaplamalar sonunda elde edilen dört terimli yaklaşık taşıma matrisine ait elemanlar şu şekildedir:

$$Y_{11}(z) = 1 \quad (4.70)$$

$$Y_{12}(z) = z - \frac{Nz^3}{6EI} \quad (4.71)$$

$$Y_{13}(z) = \frac{z^2(-12EI + Nz^2)}{24(EI)^2} \quad (4.72)$$

$$Y_{14}(z) = \frac{-z^3}{6EI} \quad (4.73)$$

$$Y_{21}(z) = 0 \quad (4.74)$$

$$Y_{22}(z) = 1 + \frac{Nz^2(-12EI + Nz^2)}{24(EI)^2} \quad (4.75)$$

$$Y_{23}(z) = \frac{-z}{EI} + \frac{Nz^3}{6(EI)^2} \quad (4.76)$$

$$Y_{24}(z) = \frac{z^2(-12EI + Nz^2)}{24(EI)^2} \quad (4.77)$$

$$Y_{31}(z) = 0 \quad (4.78)$$

$$Y_{32}(z) = Nz - \frac{N^2z^3}{6EI} \quad (4.79)$$

$$Y_{33}(z) = 1 + \frac{Nz^2(-12EI + Nz^2)}{24(EI)^2} \quad (4.80)$$

$$Y_{34}(z) = z - \frac{Nz^3}{6EI} \quad (4.81)$$

$$Y_{41}(z) = 0 \quad (4.82)$$

$$Y_{42}(z) = 0 \quad (4.83)$$

$$Y_{43}(z) = 0 \tag{4.84}$$

$$Y_{44}(z) = 1 \tag{4.85}$$

5. ÇUBUK ELEMAN BURKULMA YÜKLERİNİN YAKLAŞIK TAŞIMA MATRİSİ KULLANILARAK HESAPLANMASI

Beşinci bölümde, bir önceki bölümde anlatılan yöntem olan yaklaşık taşıma matrisi kullanılarak dört farklı biçimde mesnetlenmiş sabit ve değişken kesitli çubuk elemanlarına ait burkulma yükleri hesaplanacaktır. Bölüm 3.2’de eksenel kuvvet altındaki çubuk elemanlarına ait diferansiyel denklem sistemi oluşturulmuştu, Bölüm 5’te de bu diferansiyel denklem sistemi kullanılarak çubuk elemanlarının kritik burkulma yükleri hesaplanacaktır. Bölüm 3.2 **(3.5)**’te açıklanmış olan diferansiyel denklem sistemini tekrar hatırlayalım,

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{EI} & 0 \\ 0 & N & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ T \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

(5.1)’de geçen “ EI ” ifadesinde yer alan “ E ”, çubuğun elastisitesini; “ I ” ise çubuk elemanının ataletini ifade etmektedir.

Bölüm 4.3’de **(4.30)** yaklaşık taşıma matrisi yardımı ile diferansiyel denklem sisteminin nasıl çözüleceği gösterilmişti, bu bağıntıyı tekrar hatırlayalım;

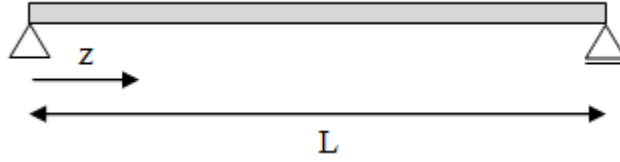
$$y(z) = X_k y(0) \quad (5.2)$$

Denklemleri düzenleyip açık formda yazarsak, **(5.3)**’ü elde ederiz,

$$\begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ T_0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

(5.3)’den de anlaşılacağı gibi taşıma matrisi ile bir çözüme ulaşabilmek için incelenen çubuk elemanının başlangıçtaki sınır koşulları bilinmelidir ve bu sınır koşulları da elemanın mesnetlenme biçimine göre değişiklik gösterir. Dolayısıyla çözüm yapılırken hesaplanması gereken determinantlar farklılık gösterir. Bu nedenle

çubuk elemanlarının burkulma yüklerinin hesaplanmasına geçmeden önce çeşitli mesnetlenme durumlarına göre dikkate alınması gereken determinantları elde edelim. İlk olarak Şekil 5.1'deki boyu “L” olan iki ucu basit mesnetli çubuk elemanı için başlangıçtaki sınır koşullarını yazalım,



Şekil 5.1 : İki ucu basit mesnetli çubuk elemanı.

$z = 0$ 'daki sınır koşulları aşağıda gösterilmiştir

$$v_0 = 0 \quad (5.4)$$

$$\varphi_0 \neq 0 \quad (5.5)$$

$$M_0 = 0 \quad (5.6)$$

$$T_0 \neq 0 \quad (5.7)$$

$z = L$ 'deki sınır koşulları aşağıda gösterilmiştir,

$$v_L = 0 \quad (5.8)$$

$$\varphi_L \neq 0 \quad (5.9)$$

$$M_L = 0 \quad (5.10)$$

$$T_L \neq 0 \quad (5.11)$$

Görüldüğü üzere iki ucu basit mesnetle cubukta her iki uçtaki sınır koşulları aynıdır. Elde ettiğimiz bu sınır koşullarını (5.3)'de yerine koyarsak (5.12)'yi elde ederiz;

$$\begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0 \\ 0 \\ T_0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Denklemleri açık formda yazarsak şu denklemleri elde ederiz,

$$y_{12}\varphi_0 + y_{14}T_0 = 0 \quad (5.13)$$

$$y_{22}\varphi_0 + y_{24}T_0 = \varphi \quad (5.14)$$

$$y_{32}\varphi_0 + y_{34}T_0 = 0 \quad (5.15)$$

$$y_{42}\varphi_0 + y_{44}T_0 = T \quad (5.16)$$

“ φ ” dönme ve “ T ” kesme kuvvetinin $z = L$ ’de sıfır olmadığını biliyoruz. Ancak değerlerinin ne olduğuda belli değildir, bu nedenle değerlerinin “ φ ” ve “ T ” olduğunu varsayalım. Dönme ve kesme değerlerini bilmediğimiz için (5.14) ve (5.16) problemin çözümünde bir fayda sağlamaz. Bunun yanı sıra “ v ” düşey deplasman ve “ M ” eğilme momentinin $z = L$ ’de sıfır olduğunu biliyoruz, dolayısıyla (5.13) ve (5.15)’den faydalanabiliriz.

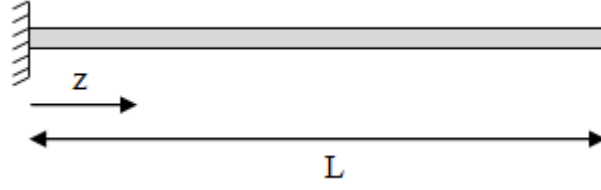
Bu denklemlerden görüleceği gibi, iki ucu basit mesnetli çubuk elemanın ilgili sınır koşullarından dolayı, taşıma matrisinin “ $y_{12}, y_{14}, y_{32}, y_{34}$ ” elemanlarını kullanmamız gerekmektedir.

(5.13) ve (5.15)’i matris formda yazarsak, (5.17)’yi elde ederiz

$$\begin{pmatrix} y_{12} & y_{14} \\ y_{32} & y_{34} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

İki ucu basit mesnetli çubuk elemanında, $z = 0$ ’da “ φ ” dönme ve “ T ” kesme’nin sıfır olmadığını bildiğimiz için taşıma matrisinin $y_{12}, y_{14}, y_{32}, y_{34}$ elemanlarının oluşturduğu matrisin determinantının sıfıra eşit olması gerekmektedir. Bu determinant ile elde edilen denklemin en küçük reel kökü ise bize kritik burkulma yükünü verecektir [11].

İkinci olarak Şekil 5.2’de de gösterilmiş olan boyu “ L ” olan bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu ise serbest olan bir çubuk elemanın başlangıçtaki sınır koşullarını yazalım. Çubuk elemanında ankastre mesnetli uçta, tüm ötelenmeler tutulmuş durumdadır, ancak moment ve kesme sıfır değildir. Serbest uçta ise moment ve kesme sıfır olmakla beraber, düşey deplasman ve dönme etkisi meydana gelmektedir. Bu bilinenler ışığında Şekil 5.2’deki çubuk için başlangıç sınır koşulları matris formda kullanılmak üzere yazılmıştır.



Şekil 5.2 : Bir ucu ankastre, diğer ucu serbest çubuk elemanı.

$z = 0$ 'daki sınır koşulları aşağıdaki denklemlerde gösterilmiştir,

$$v = 0$$

$$(5.18)$$

$$\varphi = 0$$

$$(5.19)$$

$$M \neq 0$$

$$(5.20)$$

$$T \neq 0$$

$$(5.21)$$

$z = L$ 'deki sınır koşulları aşağıda gösterilmiştir,

$$v \neq 0$$

$$(5.22)$$

$$\varphi \neq 0$$

$$(5.23)$$

$$M = 0$$

$$(5.24)$$

$$T = 0$$

$$(5.25)$$

Bu sınır koşullarını (5.3)'de yerine koyarsak, (5.26)'yı elde ederiz,

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Denklemleri açık formda yazdığımızda, şu denklemleri elde ederiz,

$$y_{13}M_0 + y_{14}T_0 = v \quad (5.27)$$

$$y_{23}M_0 + y_{24}T_0 = \varphi \quad (5.28)$$

$$y_{33}M_0 + y_{34}T_0 = 0 \quad (5.29)$$

$$y_{43}M_0 + y_{44}T_0 = 0 \quad (5.30)$$

“ v ” düşey deplasman ve “ φ ” dönme'nin $z = L$ 'de sıfır olmadıklarını biliyoruz ancak değerlerinin ne olduğunu bilmediğimiz için değerlerinin “ v ” ve “ φ ” olduğunu varsayalım. Bu değerler bilinmediğinden (5.27) ve (5.28) problemin çözümünde bize bir fayda sağlamaz. Bunun yanı sıra $z = L$ 'de “ M ” moment ve “ T ” kesmenin değerlerinin sıfır olduğunu biliyoruz, böylece (5.29) ve (5.30)'dan faydalanabiliriz.

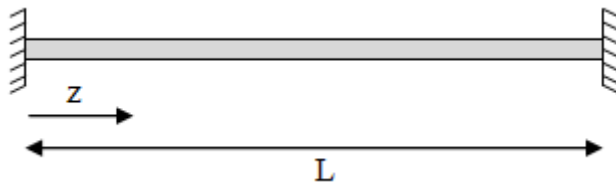
Elimizdeki denklemlerden görüldüğü üzere, bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest olan bir çubuk elemanı için taşıma matrisinin “ $y_{33}, y_{34}, y_{43}, y_{44}$ ” elemanlarının kullanılması gerekmektedir.

(5.29) ve (5.30)'u matris formda yazalım,

$$\begin{pmatrix} y_{33} & y_{34} \\ y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} M_0 \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

$z = 0$ 'da “ M ” moment ve “ T ” kesme kuvvetinin sıfır olmadığını bildiğimiz için, taşıma matrisinin “ $y_{33}, y_{34}, y_{43}, y_{44}$ ” elemanlarının oluşturduğu matrisin determinantının sıfıra eşit olması gerekmektedir. Hesaplanan determinant ile elde edilen denklemin en küçük reel kökü, bu mesnetlenme koşulu için bize kritik burkulma yükünü verecektir [11].

Şimdi Şekil 5.3'de gösterilen iki ucu ankastre mesnetli çubuk elemanını ele alalım,



Şekil 5.3 : İki ucu ankastre mesnetli çubuk elemanı.

$z = 0$ 'daki sınır koşulları aşağıda gösterilmiştir,

$$v = 0$$

$$(5.32)$$

$$\varphi = 0$$

$$(5.33)$$

$$M \neq 0$$

$$(5.34)$$

$$T \neq 0$$

$$(5.35)$$

$z = L$ 'deki sınır koşulları ise şu şekildedir,

$$v = 0$$

(5.36)

$$\varphi = 0 \quad (5.37)$$

$$M \neq 0 \quad (5.38)$$

$$T \neq 0 \quad (5.39)$$

İki ucu ankastre mesnetli çubuk elemanında her iki uçtaki sınır koşulları görüldüğü gibi aynıdır. Bu sınır koşullarını **(5.3)**'de yerine yazarsak, matris formdaki **(5.40)**'ı elde ederiz.

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ T \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Denklemleri açık formda yazalım,

$$y_{13}M_0 + y_{14}T_0 = 0 \quad (5.41)$$

$$y_{23}M_0 + y_{24}T_0 = 0 \quad (5.42)$$

$$y_{33}M_0 + y_{34}T_0 = M \quad (5.43)$$

$$y_{43}M_0 + y_{44}T_0 = T \quad (5.44)$$

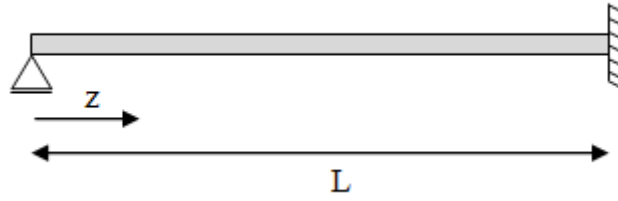
“ M ” moment ve “ T ” kesme kuvvetinin $z = L$ 'de sıfır olmadıklarını biliyoruz, ancak değerlerinin ne olduklarını bilmediğimiz için problemin çözümünde **(5.43)** ve **(5.44)**'den faydalanamayız. Bunun yanı sıra $z = L$ 'de “ v ” düşey deplasman ve “ φ ” dönmenin sıfır olduğunu bildiğimiz için **(5.41)** ve **(5.42)**'yi problemin çözümünde kullanabiliriz.

(5.41) ve **(5.42)**'den görüldüğü gibi, iki ucu ankastre mesnetli bir çubuk elemanı için taşıma matrisinin “ $y_{13}, y_{14}, y_{23}, y_{24}$ ” elemanlarının kullanılması gerekmektedir. Bu denklemleri matris formda yazarsak **(5.45)**'i elde ederiz.

$$\begin{pmatrix} y_{13} & y_{14} \\ y_{23} & y_{24} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} M_0 \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

$z = 0$ 'da “ M ” moment ve “ T ” kesme kuvvetinin sıfır olmadığını biliyoruz bu nedenle taşıma matrisinin “ $y_{13}, y_{14}, y_{23}, y_{24}$ ” elemanlarının oluşturduğu matrisin determinantının sıfıra eşit olması gerekmektedir. Hesaplanan determinant ile elde edilen denklemin en küçük reel kökü, bu mesnetlenme koşulu için bize kritik burkulma yükünü verecektir [11].

Son olarak Şekil 5.4'te gösterilen bir ucu basit mesnetli diğer ucu ise ankastre mesnetli çubuk elemanını ele alalım,



Şekil 5.4 : Bir ucu basit mesnetli, diğer ucu ankastre mesnetli çubuk elemanı.

$z = 0$ 'daki sınır koşulları,

$$v_0 = 0 \quad (5.46)$$

$$\varphi_0 \neq 0 \quad (5.47)$$

$$M_0 = 0 \quad (5.48)$$

$$T_0 \neq 0 \quad (5.49)$$

$z = L$ 'deki sınır koşulları,

$$v_L = 0 \quad (5.50)$$

$$\varphi_L = 0 \quad (5.51)$$

$$M_L \neq 0 \quad (5.52)$$

$$T_L \neq 0 \quad (5.53)$$

Bir ucu basit mesnetli, diğer ucu ise ankastre mesnetli çubuk elemanı için elde edilen sınır koşullarını (5.3)'de yerine yazarsak, (5.54)'ü elde ederiz,

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0 \\ 0 \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ T \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

(5.54)'ü açık formda yazarsak, aşağıdaki denklemleri elde ederiz,

$$y_{12}\varphi_0 + y_{14}T_0 = 0 \quad (5.55)$$

$$y_{22}\varphi_0 + y_{24}T_0 = 0 \quad (5.56)$$

$$y_{32}\varphi_0 + y_{34}T_0 = M \quad (5.57)$$

$$y_{42}\varphi_0 + y_{44}T_0 = T \quad (5.58)$$

“ M ” moment ve “ T ” kesmenin $z = L$ 'de sıfır olmadıklarından dolayı ve değerlerinin ne olduklarını bilmediğimiz için problemin çözümünde (5.57) ve (5.58)'den faydalanamayız. Ancak $z = L$ 'de “ v ” düşey deplasman ve “ φ ” dönmenin sıfır olduğunu bildiğimiz için (5.55) ve (5.56)'yı kullanabiliriz.

(5.55) ve (5.56)'dan görüldüğü üzere, bir ucu basit mesnetli, diğer ucu ise ankastre mesnetli bir çubuk elemanı için taşıma matrisinin “ $y_{12}, y_{14}, y_{22}, y_{24}$ ” elemanlarının kullanılması gerekmektedir. Bu denklemleri matris formda yazarsak (5.59)'u elde ederiz.

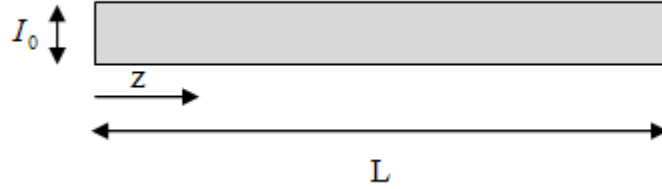
$$\begin{pmatrix} y_{12} & y_{14} \\ y_{22} & y_{24} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

Bir ucu basit mesnetli, diğer ucu ise ankastre mesnetli çubuk elemanında, $z = 0$ 'da “ φ ” dönme ve “ T ” kesme'nin sıfır olmadığını bildiğimiz için taşıma matrisinin “ $y_{12}, y_{14}, y_{22}, y_{24}$ ” elemanlarının oluşturduğu matrisin determinantının sıfıra eşit olması gerekmektedir. Bu determinant ile elde edilen denklemin en küçük reel kökü ise bize kritik burkulma yükünü verecektir [11].

5.1 Sabit Kesitli Çubuk Elemanlarının Kritik Burkulma Yükü

Beşinci bölümün başında çeşitli mesnetlenme durumlarına göre çubuk elemanlarının kritik burkulma yüklerinin hesaplanmasında izlenilmesi gereken yol ve kullanılması gereken matrisler gösterilmişti. Bu bölümde ise sabit kesitli çubuk elemanlarının

kritik burkulma yükleri, gösterilmiş olan metodlar ile çeşitli mesnetlenme koşulları için bilgisayar vasıtasıyla hesaplanacak ve sonuçlar karşılaştırılacaktır. Şekil 5.5'te sabit kesitli bir çubuk elemanına örnek gösterilmiştir.



Şekil 5.5 : Sabit kesitli çubuk elemanı.

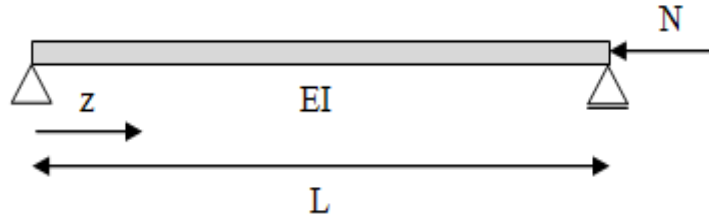
Şekil 5.5'te gösterilen birim genişlikteki çubuk elemanın elastisitesi “ E ” olmakla beraber, çubuk elemanın ataleti kesit boyunca sabittir ve (5.60)'da gösterilmiştir,

$$I_z = \frac{h^3}{12} \quad (5.60)$$

Sabit kesitli çubuk elemanında atalet kesit boyunca değişmediği için hesaplamalarda atalet “ I ” olarak kabul edilecektir. İlerleyen bölümlerde iki ucu basit mesnetli, bir ucu ankastre mesnetli öteki ucu serbest, iki ucu ankastre mesnetli ve bir ucu basit mesnetli diğer ucu ankastre mesnetli çubuk elemanları için yapılan hesaplamalar karşılaştırılacaktır.

5.1.1 İki ucu basit mesnetli çubuk

Şekil 5.6'da “ N ” aksenal kuvveti ile yüklenmiş olan iki ucu basit mesnetli bir çubuk elemanı gösterilmiştir,



Şekil 5.6 : N aksenal yükü altında iki ucu basit mesnetli çubuk.

Beşinci bölümün giriş kısmında iki ucu basit mesnetli çubuk elemanı için izlenmesi gereken hesap yöntemi ve kritik burkulma yükünü hesaplamada kullanılması gereken taşıma matrisi elemanları (5.17)'de gösterilmiştir.

Bilgisayar ortamında bir, iki ve üç terimli yaklaşık taşıma matrisleri hesaplanarak Şekil 5.6’te gösterilen “ L ” boyundaki iki ucu basit mesnetli çubuk elemanı için dört, sekiz, on iki ve on altı aralığa bölüm yapılarak kritik burkulma yükü hesaplanmıştır [12]. Hesaplanan bu sonuçlar, aynı çubuk elemanı için kesin taşıma matrisi ile yapılmış olan hesaplamalarda çıkan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Çizelge 5.1’de sonuçların karşılaştırılması gösterilmiştir.

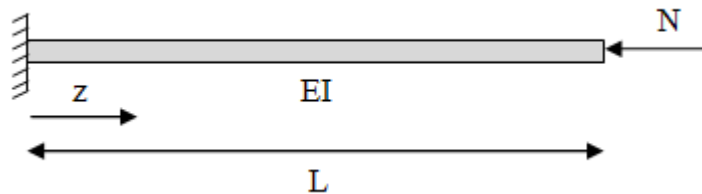
Çizelge 5.1 : İki ucu basit mesnetli çubuk elemanı için kritik burkulma yükleri.

Aralık Sayısı	Kesin Burkulma Yükü	Kesin Taşıma Matrisi	Yaklaşık Taşıma Matrisi		
			Bir Terim	İki Terim	Üç Terim
4	$9.869 EI / L^2$	$9.869 EI / L^2$	$16 EI / L^2$	$8.574 EI / L^2$	$9.648 EI / L^2$
8	$9.869 EI / L^2$	$9.869 EI / L^2$	$10.980 EI / L^2$	$9.423 EI / L^2$	$9.852 EI / L^2$
12	$9.869 EI / L^2$	$9.869 EI / L^2$	$10.338 EI / L^2$	$9.656 EI / L^2$	$9.866 EI / L^2$
16	$9.869 EI / L^2$	$9.869 EI / L^2$	$10.128 EI / L^2$	$9.745 EI / L^2$	$9.868 EI / L^2$

Çizelge 5.1’deki sonuçlardan da açıkça görüldüğü üzere, yaklaşık taşıma matrisi vasıtasıyla yapılan hesaplamalarda, matrisin terim sayısı ilerletildikçe ve hesap yapılan aralık sayısı arttırıldıkça kesin sonuca oldukça yaklaşılmaktadır. İki ucu basit mesnetli sabit kesitli çubuk elemanı için kesin kritik burkulma yükü $9.869EI / L^2$ iken kesin taşıma matrisi ile yapılan hesaplamalarda bu değer aynısı elde edilmiş, üç terimli yaklaşık taşıma matrisi ve on altı aralık için yapılan hesaplamalarda bu değer hemen hemen aynısı olan $9.868EI / L^2$ değeri elde edilmiştir.

5.1.2 Bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest çubuk

Şekil 5.7’de “ N ” aksenal kuvveti ile yüklenmiş olan bir ucu ankastre mesnetli, serbest olan çubuk elemanı gösterilmiştir. Çubuğun mesnetli ucunda tüm ötelenmeler engellenmiştir, serbest uçta ise düşey deplasman ve dönme ötelenmesi oluşmaktadır.



Şekil 5.7 : N Aksenal yükü altında bir ucu ankastre, diğer ucu serbest çubuk.

Şekil 5.7'deki aksenal yük altındaki, bir ucundan ankastre mesnetli, diğer ucu ise serbest durumda olan çubuk elemanı için hesaplamalarda kullanılması gereken determinant (5.31)'de gösterilmiştir. Bu bağıntı kullanılarak bilgisayar ortamında yapılan hesaplamalarda bir ucu ankastre, diğer ucu ise serbest olan “L” boyundaki çubuk elemanı için elde edilen sonuçlar Çizelge 5.2’de gösterilmiştir [12].

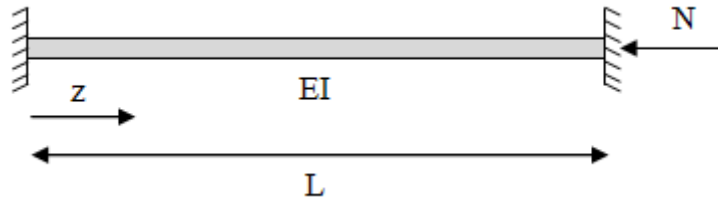
Çizelge 5.2 : Bir ucu ankastre, bir ucu serbest çubuk için kritik burkulma yükleri.

Aralık Sayısı	Kesin Burkulma Yükü	Kesin Taşıma Matrisi	Yaklaşık Taşıma Matrisi		
			Bir Terim	İki Terim	Üç Terim
4	$2.467 EI / L^2$	$2.467 EI / L^2$	$2.745 EI / L^2$	$2.350 EI / L^2$	$2.463 EI / L^2$
8	$2.467 EI / L^2$	$2.467 EI / L^2$	$2.532 EI / L^2$	$2.436 EI / L^2$	$2.467 EI / L^2$
12	$2.467 EI / L^2$	$2.467 EI / L^2$	$2.495 EI / L^2$	$2.453 EI / L^2$	$2.467 EI / L^2$
16	$2.467 EI / L^2$	$2.467 EI / L^2$	$2.483 EI / L^2$	$2.459 EI / L^2$	$2.467 EI / L^2$

Çizelge 5.2’deki sonuçlar gösteriyorki bir ucu ankastre diğer ucu ise serbest olan çubuk elemanının kesin kritik burkulma yükü $2.467EI / L^2$ olarak elde edilmiştir. Yaklaşık taşıma matrisi ile yapılan hesaplamalarda ise bu değer aynı üç terimli matris ve sekiz aralıkta elde edilmiştir. Bu sonuç gösteriyorki yaklaşık taşıma matrisi ile yapılan hesaplamalarda da kesin sonucu elde etmek kimi koşullarda mümkün olmaktadır.

5.1.3 İki ucu ankastre mesnetli çubuk

Şekil 5.8’de “N” aksenal kuvveti ile yüklenmiş olan iki ucu ankastre mesnetli olan bir çubuk elemanı gösterilmiştir. Bu örnekte çubuğun iki ucunda da tüm ötelenmeler engellenmiş durumdadır.



Şekil 5.8 : N aksenal yükü altında iki ucu ankastre mesnetli çubuk.

İki ucu ankastre mesnetli çubuk elemanı için hesaplamalarda kullanılması gereken matris beşinci bölümün giriş kısmında sınır koşullarına bağlı olarak (5.45)'te açıklanmıştır. Bu bağıntı kullanılarak kritik burkulma yükü için bilgisayar ortamında bir, iki ve üç terimli yaklaşık taşıma matrisi kullanılarak ve dört, sekiz, on iki ve on altı aralığa bölünerek yapılan hesaplamalarda elde edilen sonuçlar ise Çizelge 5.3'te gösterilmiştir [12].

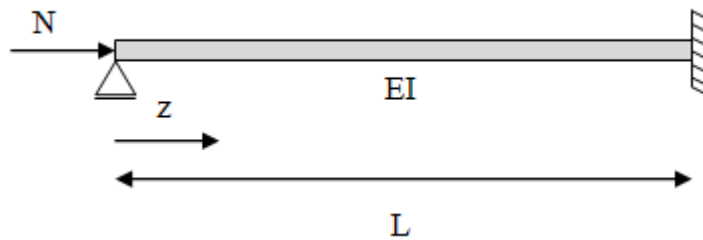
Çizelge 5.3 : İki ucu ankastre mesnetli çubukta kritik burkulma yükleri.

Aralık Sayısı	Kesin Burkulma Yükü	Kesin Taşıma Matrisi	Yaklaşık Taşıma Matrisi		
			Bir Terim	İki Terim	Üç Terim
4	$39.478 EI / L^2$	$39.478 EI / L^2$	$64 EI / L^2$	$34.296 EI / L^2$	$38.592 EI / L^2$
8	$39.478 EI / L^2$	$39.478 EI / L^2$	$43.920 EI / L^2$	$37.692 EI / L^2$	$39.408 EI / L^2$
12	$39.478 EI / L^2$	$39.478 EI / L^2$	$41.352 EI / L^2$	$38.264 EI / L^2$	$39.464 EI / L^2$
16	$39.478 EI / L^2$	$39.478 EI / L^2$	$40.512 EI / L^2$	$38.980 EI / L^2$	$39.472 EI / L^2$

Çizelge 5.3'te elde edilen sonuçlara bakıldığında iki ucu ankastre mesnetli çubuk elemanında da yaklaşık taşıma matrisi ile yapılan hesaplamalarda kesin sonuca yaklaşılmaktadır.

5.1.4 Bir ucu basit diğer ucu ankastre mesnetli çubuk

Şekil 5.9'da "N" aksenal kuvveti ile yüklenmiş olan bir ucu basit mesnetli, diğer ucu ise ankastre mesnetli olan bir çubuk elemanı gösterilmiştir. Bu örnekte çubuğun basit mesnetli ucunda düşey deplasman engellenmiş ve moment sıfır iken ankastre mesnetli ucunda tüm ötelenmeler engellenmiş durumdadır.



Şekil 5.9 : N aksenal yükü altında bir ucu basit, diğer ucu ankastre mesnetli çubuk.

Bir ucu basit mesnetli, diğer ucu ise ankastre mesnetli çubuk elemanı için hesaplamalarda kullanılması gereken matris (5.59)'da gösterilmiştir. Bilgisayar

ortamında yapılan hesaplamalarda elde edilen kritik burkulma yükü sonuçları Çizelge 5.4'te gösterilmiştir [12].

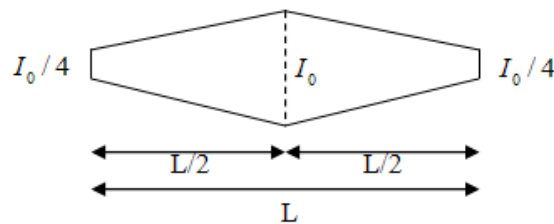
Çizelge 5.4 : Bir ucu basit, bir ucu ankastre mesnetli çubuk için burkulma yükleri.

Aralık Sayısı	Kesin Burkulma Yükü	Kesin Taşıma Matrisi	Yaklaşık Taşıma Matrisi		
			Bir Terim	İki Terim	Üç Terim
4	$20.142 EI / L^2$	$20.142 EI / L^2$	$80 EI / L^2$	$16.273 EI / L^2$	$18.593 EI / L^2$
8	$20.142 EI / L^2$	$20.142 EI / L^2$	$25.685 EI / L^2$	$18.460 EI / L^2$	$20.008 EI / L^2$
12	$20.142 EI / L^2$	$20.142 EI / L^2$	$22.354 EI / L^2$	$19.298 EI / L^2$	$20.075 EI / L^2$
16	$20.142 EI / L^2$	$20.142 EI / L^2$	$21.364 EI / L^2$	$19.636 EI / L^2$	$20.078 EI / L^2$

Çizelge 5.4'teki kritik burkulma yükü değerleride önceki örneklerde olduğu gibidir. Yaklaşık taşıma matrisi vasıtasıyla yapılan hesaplamalarda, üç terim ve on altı aralıkta kesin sonuca oldukça yaklaşıldığı gözlenmektedir.

5.2 Değişken Kesitli Çubuk Elemanlarının Kritik Burkulma Yükü

Bölüm 5.1'de sabit kesitli çubuk elemanlarının çeşitli mesnetlenme koşulları için kritik burkulma yükleri, kesin ve yaklaşık taşıma matrisleri ile hesaplanmış ve çıkan sonuçlar karşılaştırılmıştı. Yapılan hesaplamalar sırasında çubuk kesiti, çubuk boyunca değişmediği için çubuğun ataleti " I " olarak kabul edilmişti. Bu kabulü değişken kesitli çubuklar için yapmamız söz konusu değildir, değişken kesitli çubuklarda çubuğun ataleti, çubuk boyunca değişen kesit ile doğrudan alakalıdır. Dolayısıyla değişken kesitli çubuklarda hesaplama yapılırken temel bünye bağıntıları matrisinde kesitin atalet fonksiyonu kullanılır ve hesaplamalar bu doğrultuda yapılır. Bu bölümde Şekil 5.10'da gösterildiği gibi değişken bir kesite sahip olan çubuk elemanının çeşitli mesnetle koşullarına göre kritik burkulma yükleri bölüm 5.1'de izlenen yöntemler ile hesaplanacak ve sonuçlar karşılaştırılacaktır.



Şekil 5.10 : Değişken kesitli çubuk elemanı.

Şekil 5.10'daki çubuk elemanın elastisitesi “ E ” olmakla beraber, çubuk boyunca kesitte meydana gelen değişimlerden dolayı, çubuğun $z = 0$ 'daki ataleti $I_0 / 4$, $z = L/2$ 'deki ataleti I_0 ve $z = L$ 'deki ataleti tekrar $I_0 / 4$ 'tür. Bu bilinenler ışığında çubuk elemanın “ z ” boyunca geçerli olan fonksiyonu aşağıda (5.61)'de gösterilmiştir.

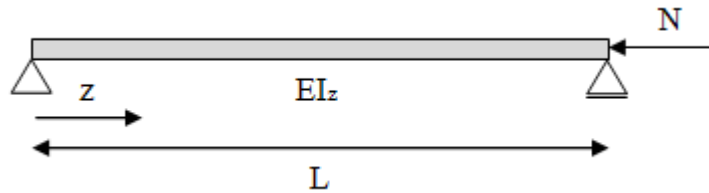
$$I(z) = \frac{I_0}{\frac{12z^2}{L^2} - \frac{12z}{L} + 4} \quad (5.61)$$

(5.61)'de tanımlanan atalet fonksiyonu başlangıçta verilen tüm sınır koşullarını sağlamaktadır.

İlerleyen safhalarda çözümlenecek örneklerde kullanılan matrislerde çubuk ataleti “ I ” yerine “ $I(z)$ ” fonksiyonu olarak kabul edilecektir. Bu yöntem ile iki ucu basit mesnetli, bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest, iki ucu ankastre mesnetli ve bir ucu basit mesnetli diğer ucu ankastre mesnetli değişken kesitli çubuklar için kritik burkulma yükleri hesaplanacaktır.

5.2.1 İki ucu basit mesnetli çubuk

Şekil 5.11'de “ N ” aksenal kuvveti ile yüklenmiş, iki ucu basit mesnetli olan değişken kesitli bir çubuk elemanı gösterilmiştir, bu örnekte çubuğun iki ucunda da düşey deplasman ve moment değeri sıfırdır. Bölüm 5.1.1'de izlenen yol, bu örnek için de birebir olarak geçerlidir. Gözetilmesi gereken en önemli husus ise bu örnekte çubuğun ataletinin sabit değil bir değişken olduğudur.



Şekil 5.11 : N aksenal yükü altında iki ucu basit mesnetli, değişken kesitli çubuk.

Bilgisayar ortamında yapılan hesaplamalarda tekrar (5.17)'den yararlanılmıştır [12]. İlgili bağıntı kullanılarak bilgisayar ortamında kritik burkulma yükü yaklaşık taşıma matrisleri vasıtasıyla hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 5.5'te karşılaştırılmıştır.

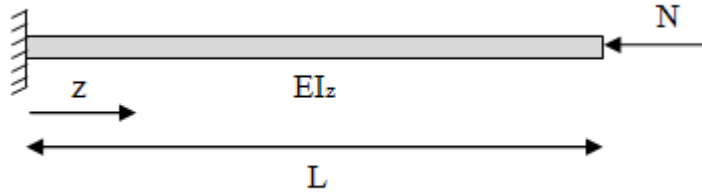
Çizelge 5.5 : İki ucu basit mesnetli, değişken kesitli çubuk için burkulma yükleri.

Aralık Sayısı	Sabit Kesitli Çubuk Kesin Burkulma Yükü	Yaklaşık Taşıma Matrisi ile Değişken Kesitli Çubuk Burkulma Yükü		
		Bir Terim	İki Terim	Üç Terim
4	9.869 EI / L ²	11.636 EI / L ²	5.291 EI / L ²	5.996 EI / L ²
8		7.796 EI / L ²	6.323 EI / L ²	6.734 EI / L ²
12		7.325 EI / L ²	6.660 EI / L ²	6.877 EI / L ²
16		7.174 EI / L ²	6.797 EI / L ²	6.927 EI / L ²

Çizelge 5.5'te açıkça görüldüğü üzere sabit kesitli çubuk ile değişken kesitli çubuk arasındaki fark ortadadır. Değişken kesitli çubuk elemanı için bir, iki ve üç terimli yaklaşık taşıma matrisi ile dört, sekiz, on iki ve on altı aralık için çözümler yapılmıştır. Sonuçlar incelendiğinde örneğimizdeki değişken kesitli ve iki ucundan basit mesnetli çubuk için kritik burkulma yükünün yaklaşık olarak $7EI / L^2$ olduğu rahatlıkla söylenebilir.

5.2.2 Bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest çubuk

Şekil 5.12'de “N” aksenal kuvveti ile yüklenmiş olan bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu ise serbest olan değişken kesitli bir çubuk elemanı görülmektedir, bu örnekte çubuğun ankastre mesnetli ucunda tüm ötelenmeler tutulmuş vaziyettedir anca serbest uçta düşey deplasman ve dönme ötelenmesi vardır. Bu örnek için de Bölüm 5.1.2'de izlenen yol geçerlidir, ilk örneğimizde de belirtmiş olduğumuz gibi tek fark ataletin sabit değil değişken olduğudur.



Şekil 5.12 : N aksenal yükü altında bir ucu ankastre, diğer ucu serbest çubuk.

Bu örneğimizde de Bölüm 5.1.2'de olduğu gibi (5.31) kullanılmıştır. (5.31) kullanılarak bilgisayar ortamında yapılan hesaplamalar ışığında değişken kesitli bir ucu ankastre, diğer ucu serbest çubuk elemanı için elde edilen kritik burkulma yükü değerleri Çizelge 5.6'da görülebilir [12].

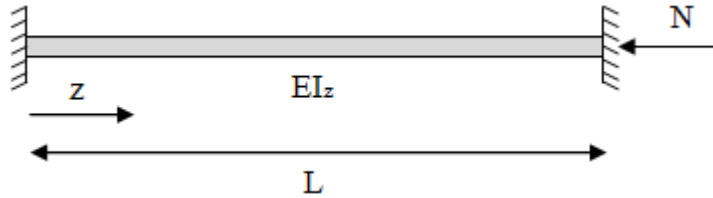
Çizelge 5.6 : Bir ucu ankastre mesnetli, bir ucu serbest çubukta burkulma yükleri.

Aralık Sayısı	Sabit Kesitli Çubuk Kesin Burkulma Yükü	Yaklaşık Taşıma Matrisi ile Değişken Kesitli Çubuk Burkulma Yükü		
		Bir Terim	İki Terim	Üç Terim
4	2.467 EI / L ²	1.850 EI / L ²	1.510 EI / L ²	1.607EI / L ²
8		1.460 EI / L ²	1.393 EI / L ²	1.415 EI / L ²
12		1.365 EI / L ²	1.338 EI / L ²	1.347 EI / L ²
16		1.323 EI / L ²	1.308 EI / L ²	1.313 EI / L ²

Değişken kesitli ve bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest çubuk elemanı için yaklaşık taşıma matrisi ile yapılan hesaplamalar sonucunda kritik burkulma yükünün yaklaşık olarak $1.3EI / L^2$ olduğu görülmektedir.

5.2.3 İki ucu ankastre mesnetli çubuk

Şekil 5.13'de “N” aksenal kuvveti ile yüklenmiş olan iki ankastre mesnetli olan değişken kesitli bir çubuk elemanı gösterilmiştir.



Şekil 5.13 : Aksenal yük altında iki ucu ankastre mesnetli, değişken kesitli çubuk.

Hesaplamalarda (5.45)'ten yararlanılmıştır. Yapılan hesaplamalar ışığında elde edilen sonuçlar ve sonuçların karşılaştırmaları Çizelge 5.7'de gösterilmiştir [12].

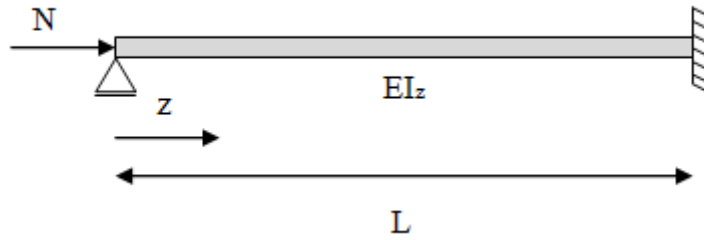
Çizelge 5.7 : İki ucu ankastre mesnetli çubuk için kritik burkulma yükleri.

Aralık Sayısı	Sabit Kesitli Çubuk Kesin Burkulma Yükü	Yaklaşık Taşıma Matrisi ile Değişken Kesitli Çubuk Burkulma Yükü		
		Bir Terim	İki Terim	Üç Terim
4	39.478 EI / L ²	49.352 EI / L ²	17.499 EI / L ²	18.784EI / L ²
8		38.512 EI / L ²	18.143 EI / L ²	19.519 EI / L ²
12		30.616 EI / L ²	19.285 EI / L ²	21.248 EI / L ²
16		26.138 EI / L ²	19.630 EI / L ²	22.002 EI / L ²

Çizelge 5.7’de sunulan sonuçlar ve karşılaştırmalara bakarak, iki ucu ankastre mesnetli değişken kesitli çubuk elemanı için kritik burkulma yükünün yaklaşık olarak $22EI / L^2$ olduğunu söyleyebiliriz.

5.2.4 Bir ucu basit diğer ucu ankastre mesnetli çubuk

Şekil 5.14’de “ N ” aksenal kuvveti ile yüklenmiş olan bir ucu basit, diğer ucu ise ankastre mesnetli olan değişken kesitli bir çubuk elemanı gösterilmiştir. Şekil 5.14’deki çubuk elemanında da basit mesnetli uçta, düşey deplasman ve moment sıfırdır ancak dönme ötelenmesi ve kesme kuvveti sıfır değildir. Ankastre mesnetli uçta ise tüm ötelenmeler engellenmiş durumdadır.



Şekil 5.14 : Aksenal yük altında bir ucu basit, diğer ucu ankastre mesnetli çubuk.

Geçerli örnekte kullanılması gereken bağıntı Bölüm 5.1.4’te de kullanılan (5.59)’dur. İlgili bağıntı ile yapılan hesaplamaların sonuçları ve karşılaştırmalar Çizelge 5.8’de gösterilmiştir [12].

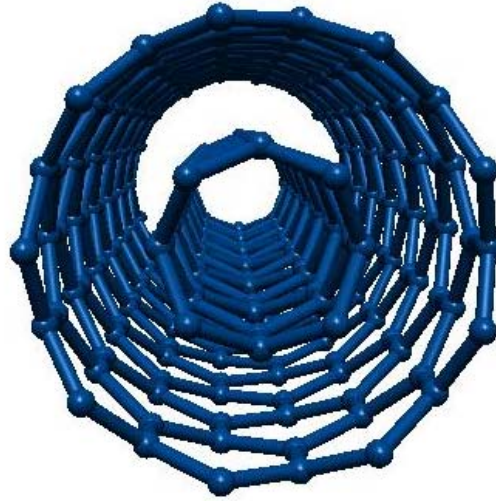
Çizelge 5.8 : Bir ucu basit, bir ucu ankastre mesnetli çubuk için burkulma yükleri.

Aralık Sayısı	Sabit Kesitli Çubuk Kesin Burkulma Yükü	Yaklaşık Taşıma Matrisi ile Değişken Kesitli Çubuk Burkulma Yükü		
		Bir Terim	İki Terim	Üç Terim
4	20.142 EI / L^2	60.5 EI / L^2	10.173 EI / L^2	11.105 EI / L^2
8		16.280 EI / L^2	11.050 EI / L^2	12.137 EI / L^2
12		13.640 EI / L^2	11.460 EI / L^2	12.077 EI / L^2
16		12.806 EI / L^2	11.607 EI / L^2	11.985 EI / L^2

Çizelge 5.8’de verilen sonuçlar incelenerek, bir ucu basit mesnetli, diğer ucu ise ankastre mesnetli değişken kesitli çubuk elemanı için kritik burkulma yükünün değerinin yaklaşık olarak $11.9EI / L^2$ olduğu görülmektedir.

6. ÇİFT DUVARLI KARBON NANOTÜP İÇİN KRİTİK BURKULMA YÜKÜNÜN HESAPLANMASI

Altıncı bölümde iki ucu da basit mesnetlenmiş durumda olan, “ L ” boyundaki çift duvarlı karbon nanotüp için burkulma yükü hesaplanacaktır. Bölüm 2’de nano teknoloji ve karbon nanotüpler hakkında bilgiler verilmiş; tek ve çok duvarlı karbon nanotüpler ile ilgili açıklamalar yapılmıştı. Şekil 6.1’de gösterilmiş olan çift duvarlı karbon nanotüp, iki adet farklı çaplardaki karbon nanotüpün iç içe geçmesi ile oluşmuştur.

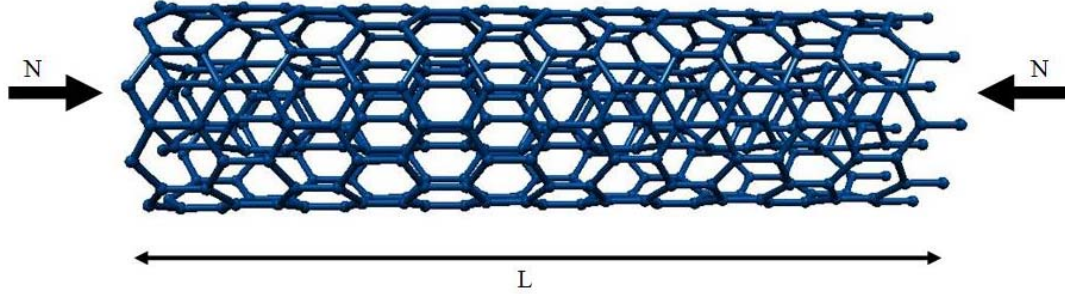


Şekil 6.1 : Çift duvarlı karbon nanotüp.

Şekil 6.2’de görülen aksenal yük altındaki çift duvarlı karbon nanotüp ile ilgili olarak, “ A_1 ” ifadesi, dış tüpün kesit alanını; “ A_2 ” ifadesi, iç tüpün kesit alanını ifade etmektedir. Şekil 6.2’deki çift duvarlı karbon nanotüpe aksenal “ N ” basınç kuvveti etkilmiş olup, karbon nanotüpün burkulmasına neden olan kritik burkulma yükü hesaplanacaktır. Burada, çift duvarlı karbon nanotüpe etkiyen aksenal basınç kuvveti eşit gerilmelere sahip olan bu tüplere kesit alanlarının oranları doğrultusunda etkiyecektir. “ N_1 ”, dış tüpe etki eden aksenal basınç kuvveti ve “ N_2 ”, iç tüpe

etkiden eden aksel basıncı kuvveti olmakla beraber; bu iki kuvvetin toplamı, çift duvarlı karbon nanotüp etkiyen aksel basıncı kuvveti “ N ”ye eşittir.

$$N = N_1 + N_2 \quad (6.1)$$



Şekil 6.2 : “ N ” aksel yükü altında iki ucu basit mesnetli çift duvarlı nanotüp.

“ N ” aksel basıncı kuvvetinin etkisi altında çift duvarlı karbon nanotüp bir takım şekil değiştirmeler meydana gelmektedir. Bu şekil değiştirmelerden “ V_1 ”, dış tüpün çökmesini; “ V_2 ”, iç tüpün çökmesini, “ φ_1 ”, dış tüpteki dönmeyi, “ φ_2 ”, iç tüpteki dönmeyi ifade etmektedir.

Dıştaki nanotüp etkiyen “ N_1 ” kuvveti ile içteki nanotüp etkiyen “ N_2 ” kuvvetinin şiddetleri, bu iki tüpün kesit alanlarının oranı ile doğru orantılıdır.

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{A_1}{A_2} \quad (6.2)$$

$$N_2 = \frac{A_2}{A_1} N_1 \quad (6.3)$$

Eksel “ N ” basıncı kuvveti altındaki çift duvarlı karbon nanotüp, iç ve dış nanotüplerin temel denge denklemleri, Bölüm 3.2’de anlatılan aksel yük altındaki çubukların temel denge denklemleri ile aynı şekilde yazılabilir. Buna göre,

Dış nanotüpün denge denklemleri şu şekildedir,

$$\frac{dV_1}{dz} = \varphi_1 \quad (6.4)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = -\frac{M_1}{EI_1} \quad (6.5)$$

$$\frac{dM_1}{dz} = T_1 + N_1 \cdot \varphi_1 \quad (6.6)$$

$$\frac{dT_1}{dz} = c \cdot (V_1 - V_2) \quad (6.7)$$

İç nanotüpün denge denklemleri ise şu şekildedir,

$$\frac{dV_2}{dz} = \varphi_2 \quad (6.8)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dz} = -\frac{M_2}{EI_2} \quad (6.9)$$

$$\frac{dM_2}{dz} = T_2 + N_2 \cdot \varphi_2 \quad (6.10)$$

$$\frac{dT_2}{dz} = c \cdot (V_2 - V_1) \quad (6.11)$$

İç ve dış nanotüplerin kesitlerinin farkından dolayı, iki nanotüp arasında bir atalet farkı doğmaktadır, bu nedenle denge denklemlerinde dış nanotüpün ataleti “ I_1 ” ve iç nanotüpün ataleti “ I_2 ” olarak kabul edilmiştir. Denge denklemlerinde ayrıca ele alınmış olan tüpler arası çekim kuvvetini ifade eden “ c ” katsayısının açılımı ise şu şekildedir;

$$c = C \cdot d \quad (6.12)$$

“ d ” nanotüplerin ortalama çapı olmak üzere,

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (6.13)$$

$$C = 10^{20} \text{ s} / \text{m}^2 \quad (6.14)$$

Dış ve iç nanotüpe ait denge denklemleri, Bölüm 3.2, (3.6)’da gösterilen formda yazılabilir,

$$\frac{dy}{dz} = A y \quad (6.15)$$

(6.15)’te gösterilen ifadeleri açık bir şekilde yazarsak,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EI_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EI_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$y = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Ele aldığımız aksenal yük altındaki çift duvarlı karbon nanotüpün her iki ucunun da basit mesnetli olduğu kabul edilmiştir. Buna bağlı olarak iki ucu basit mesnetli çubuk elemanları için geçerli olan sınır koşulları ele alınan nanotüp için de geçerlidir. Bu doğrultuda sınır koşullarını yazarsak;

$$V_{10} = 0 \quad (6.19)$$

$$V_{20} = 0 \quad (6.20)$$

$$\varphi_{10} \neq 0 \quad (6.21)$$

$$\varphi_{20} \neq 0 \quad (6.22)$$

$$M_{10} = 0 \quad (6.23)$$

$$M_{20} = 0 \quad (6.24)$$

$$T_{10} \neq 0 \quad (6.25)$$

$$T_{20} \neq 0 \quad (6.26)$$

Bölüm 5'in giriş kısmında bir diferansiyel denklemin yaklaşık taşıma matrisi ile nasıl hesaplanacağı anlatılmıştı, Bölüm 5'te gösterilmiş olan (5.1) ve Bölüm 6'da gösterilen (6.15),

$$\frac{dy}{dz} = A[z].y \quad (6.26)$$

formundadır ve bu diferansiyel denklemin çözümü Bölüm 4.3 (4.30)'da gösterilmiştir. Bu bağıntıyı tekrar ele alırsak,

$$y(z) = X_k y(0) \quad (6.27)$$

Ele aldığımız çift duvarlı karbon nanotüp için de bu bağıntıyı kullanmak mümkündür. Yukarıda iki ucu basit mesnetli çift duvarlı karbon nanotüp için gösterilen sınır koşullarından faydalanarak yaklaşık taşıma matrisi ile bu diferansiyel denklem çözülebilir. Yaklaşık taşıma matrisi hesaplama yöntemleri Bölüm 4.3'te gösterilmişti, iki ucu basit mesnetli çift duvarlı karbon nanotüp için de Bölüm 4.3'teki hesaplama yöntemleri baz alınarak yaklaşık taşıma matrisi elde edilebilir. Bilgisayar programları vasıtasıyla yaklaşık taşıma matrisi hesaplandığı takdirde, altmış dört elemanlı bir matris elde edilir ve elde edilen "8×8" lik matrisin formu şu şekilde olacaktır [12],

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} & y_{17} & y_{18} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} & y_{26} & y_{27} & y_{28} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & y_{35} & y_{36} & y_{37} & y_{38} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} & y_{45} & y_{46} & y_{47} & y_{48} \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_{54} & y_{55} & y_{56} & y_{57} & y_{58} \\ y_{61} & y_{62} & y_{63} & y_{64} & y_{65} & y_{66} & y_{67} & y_{68} \\ y_{71} & y_{72} & y_{73} & y_{74} & y_{75} & y_{76} & y_{77} & y_{78} \\ y_{81} & y_{82} & y_{83} & y_{84} & y_{85} & y_{86} & y_{87} & y_{88} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

(6.28)'deki taşıma matrisi bilgisayar programları vasıtasıyla hesaplanabilir. Elde edilen yaklaşık taşıma matrisi ve iki ucundan basit mesnetli çift duvarlı karbon nanotüp için yazılan sınır koşulları kullanılarak, (6.27) örneğimize uygulanırsa,

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} & y_{17} & y_{18} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} & y_{26} & y_{27} & y_{28} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & y_{35} & y_{36} & y_{37} & y_{38} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} & y_{45} & y_{46} & y_{47} & y_{48} \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_{54} & y_{55} & y_{56} & y_{57} & y_{58} \\ y_{61} & y_{62} & y_{63} & y_{64} & y_{65} & y_{66} & y_{67} & y_{68} \\ y_{71} & y_{72} & y_{73} & y_{74} & y_{75} & y_{76} & y_{77} & y_{78} \\ y_{81} & y_{82} & y_{83} & y_{84} & y_{85} & y_{86} & y_{87} & y_{88} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_{10} \\ \varphi_{20} \\ 0 \\ 0 \\ T_{10} \\ T_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

İki ucu basit mesnetli çubuk elemanında “ φ ” dönme ve “ T ” kesme'nin $z = L$ 'de sıfır olmadığı bilinmekte, ancak değerlerinin ne olduğu bilinmemektedir. Bu nedenle değerlerinin “ φ ” ve “ T ” olduğu varsayılmıştır. Dolayısıyla $z = L$ 'de değeri sıfır olmayan denklemler diferansiyel denklemin çözümünde bize bir fayda sağlamayacaktır. Ancak “ v ” düşey deplasmanının ve “ M ” eğilme momentinin $z = L$ 'de değerlerinin sıfır oldukları bilinmektedir. Böylece $z = L$ 'de değeri sıfır olan aşağıdaki denklemleri problemin çözümünde kullanabiliriz.

$$y_{13} \cdot \varphi_{10} + y_{14} \cdot \varphi_{20} + y_{17} \cdot T_{10} + y_{18} \cdot T_{20} = 0 \quad (6.30)$$

$$y_{23} \cdot \varphi_{10} + y_{24} \cdot \varphi_{20} + y_{27} \cdot T_{10} + y_{28} \cdot T_{20} = 0 \quad (6.31)$$

$$y_{53} \cdot \varphi_{10} + y_{54} \cdot \varphi_{20} + y_{57} \cdot T_{10} + y_{58} \cdot T_{20} = 0 \quad (6.32)$$

$$y_{63} \cdot \varphi_{10} + y_{64} \cdot \varphi_{20} + y_{67} \cdot T_{10} + y_{68} \cdot T_{20} = 0 \quad (6.33)$$

Elde edilen bu denklemleri tekrar matris formda yazarsak,

$$\begin{pmatrix} y_{13} & y_{14} & y_{17} & y_{18} \\ y_{23} & y_{24} & y_{27} & y_{28} \\ y_{53} & y_{54} & y_{57} & y_{58} \\ y_{63} & y_{64} & y_{67} & y_{68} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{20} \\ T_{10} \\ T_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

(6.34)'ü ele alırsak, incelenen çift duvarlı karbon nanotüp her iki ucunda da basit mesnetli olduğu için, $z = 0$ 'da, “ φ ” dönme ve “ T ” kesme kuvvetinin değerlerinin sıfır olmadığını biliyoruz. Dolayısıyla denklemin sağlanabilmesi için taşıma matrisinin determinantının sıfıra eşit olması gerekmektedir.(6.34)'de ele alınan matrisin determinantı alınır, elde edilen denklemin en küçük kökü bize iki ucu da basit mesnetli çift duvarlı karbon nanotüp için burkulma yükü değerini verecektir. Çizelge 6.1'de bilgisayar ortamında, yaklaşık taşıma matrisi ile iki ucu basit mesnetli çift duvarlı karbon nanotüp için elde edilen burkulma yükü değerleri gösterilmiştir.

Çizelge 6.1 : İki ucu basit mesnetli çift duvarlı nanotüp için burkulma yükleri.

Aralık Sayısı	Yaklaşık Burkulma Yükü	
	3 Terimli Yaklaşık Taşıma Matrisi	4 Terimli Yaklaşık Taşıma Matrisi
3	$\frac{40.96}{(1.02K_1 + 1.84K_2)L^2}$	$\frac{36.43}{(1.32K_1 + 2.09K_2)L^2}$
4	$\frac{38.01}{(1.20K_1 + 1.97K_2)L^2}$	$\frac{35.26}{(1.33K_1 + 2.06K_2)L^2}$
5	$\frac{36.62}{(1.26K_1 + 1.99K_2)L^2}$	$\frac{34.94}{(1.32K_1 + 2.01K_2)L^2}$
6	$\frac{35.90}{(1.29K_1 + 2.00K_2)L^2}$	$\frac{35.09}{(1.34K_1 + 2.01K_2)L^2}$

İşlem kolaylığı sağlanması açısından, dış tüpün rijitliğini ifade eden $1/EI_1$ yerine K_1 ve iç tüpün rijitliğini ifade eden $1/EI_2$ yerine K_2 konulmuştur. Çizelge 6.1'de görüldüğü üzere, eksenel yük altındaki iki ucu basit mesnetli çift duvarlı nanotüp için yaklaşık taşıma matrisi hesaplamalar yapılmıştır. Nanotüp için elde edilen burkulma yükü değerleri Çizelge 6.1'de görülmektedir. Sonuç olarak, iki ucundan basit mesnetli, çift duvarlı karbon nanotüpte burkulma yükünün tüpler arasındaki çekim kuvvetinden bağımsız olduğu görülmektedir. Nanotüpün burkulma yükünde iç ve dış tüplerin rijitlikleri ve çift duvarlı nanotüpün boyu etkilidir. Ayrıca önceki bölümlerde yapılmış olan hesaplarda olduğu gibi, matrisin terim sayısı ve aralık sayısı arttırıldıkça kesin sonuca yaklaşıldığı belirlenmiştir.

7. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, ilk olarak nanoteknoloji, karbon nanotüpler ve burkulma problemi ele alınmıştır. Ardından başlangıç değerler metodu ve yaklaşık taşıma matrisi ile burkulma problemlerinin çözüm prosedürü açıklanmıştır. Sırasıyla dört farklı mesnetlenme koşulu için sabit kesitli çubuk elemanları, değişken kesitli çubuk elemanları ve iki ucu basit mesnetli, çift duvarlı karbon nanotüp için burkulma yükleri yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Yapılan hesaplamalar sonunda elde edilen sonuçlar şu şekildedir;

Çubuk elemanlarının çeşitli mesnetlenme koşullarında başlangıçtaki sınır koşulları bilindiği için bu çubuk elemanlarının burkulma yüklerinin hesaplanması başlangıç değerler metodu ve yaklaşık taşıma matrisi beraber kullanılarak efektif bir şekilde yapılabilir. Burkulma problemleri gibi diferansiyel denklemlerin oluşturduğu ve başlangıç sınır koşullarının bilindiği çeşitli problemler de başlangıç değerler metodu ve yaklaşık taşıma matrisi ile çözümlenebilir.

Yaklaşık taşıma matrisi ile çözümlenen diferansiyel denklemlerden elde edilen sonuçlar aynı denklemlerin kesin sonuçları ile karşılaştırıldığında görülmüştür ki, taşıma matrisi serisini olabildiğince ilerletmek sonuçların kesin sonuçlara o mertebe de yakınsamasını sağlamaktadır. Ancak taşıma matrisi serisini ilerletmek ağır integral hesapları gerektirdiğinden problemlerin çözümü güçleşmektedir.

Problemlerin çözümlerinde gözlemlenen diğer bir husus ise, yaklaşık taşıma matrisi serisini hesapları ağırlaştırmayacak şekilde ilerletmek ve alternatif çözüm yolu olarak çözüm yapılan integral aralığını daha küçük parçalara bölmek de kesin sonuca yaklaşılmamasını sağlamaktadır. Böylelikle kesin sonuca yakın değerler daha kolay hesaplamalar ile elde edilebilmektedir.

Sabit kesitli çubuklarda Leonhard Euler'in dört farklı mesnetlenme koşulu için elde etmiş olduğu burkulma yükü değerleri, yaklaşık taşıma matrisi ile kimi durumlarda bire bir elde edilmiş kimi durumlarda ise çok yakınsak sonuçlar elde edilmiştir.

Yaklaşık taşıma matrisi ile değişken kesitli çubuklar için de burkulma yükü değerleri hesaplanmıştır.

Yaklaşık taşıma matrisi ve başlangıç değerler metodunun gerek sabit kesitli gerekse değişken kesitli çubukların burkulma yükü hesaplamalarında olumlu sonuçlar verdiği gösterildikten sonra, aynı yöntemler iki ucu basit mesnetli, çift duvarlı karbon nanotüp elemanın burkulma yükünün yaklaşık olarak hesaplanmasında kullanılmıştır. İzlenen yol bu örnekte de olumlu sonuçlar vermiştir ve burkulma yükü değerleri çeşitli terim sayısı ve aralıklar için hesaplanıp karşılaştırılmıştır. Ortaya çıkan sonuçlardan ilki, karbon nanotüpü oluşturan atomların arasındaki çekim kuvvetinin burkulma yükü üzerinde herhangi bir etkisinin olmadığıdır. Karbon nanotüpün burkulma yükünde sadece iç ve dış tüpün rijitlikleri ile karbon nanotüpün uzunluğu etkilidir.

Yaklaşık taşıma matrisi ve başlangıç değerler metodu hem nano boyutlardaki çubuk elemanlarının hem de gerçek boyutlardaki çubuk elemanlarının burkulma problemlerinin çözülmesinde olumlu sonuçlar vermiştir. Bunun yanı sıra gerekli koşullar sağlandığı her türlü diferansiyel denklemin çözümü bu iki yöntem kullanılarak çözümlenebilir ve doğru sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Özhendekçi, D.**, 2008. *Çelik Yapılar 1* Ders Notları, Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul.
- [2] **Jones, R.M.**, 2006. *Buckling of Bars, Plates and Shells*, 49-67, Bull Ridge Publishing
- [3] **Nalwa, H.S.**, 2000. *Handbook of Nanostructured Materials of Nanotechnology*, 422-430, Academic Press.
- [4] **Tepe, A.**, 2007. Nanoteknolojide nano ölçekteki yapıların yerel olmayan elastisite çerçevesinde incelenmesi, Doktora Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [5] **Akbulut, H.**, 2006. *Karbon Nanotipler*, Sakarya Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Metalurji ve Malzeme Mühendisliği Bölümü, Sakarya.
- [6] **Özdoğan, E., Demir, A., ve Seventekin, N.**, 2006. Nanoteknoloji ve Tekstil Uygulamaları, Tekstil ve Konfeksiyon 3
- [7] **Url-3** <http://en.wikipedia.org/wiki/Carbon_nanotube>, alındığı tarih 18.05.2009.
- [8] **NANOTUBE MODELER**, 2009. XYZ coordinates generator for nanotubes and nanocones, JcrystalSoft.
- [9] **Timoshenko, S., Gere, J.M.**, 1970. *Theory of Elastic Stability*, Dover Publications.
- [10] **İnan, M.**, 1996. Başlangıç Değerler Metodu, *Cisimlerin Mukavemeti*, İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı Yayınları , No. 25, 330-340.
- [11] **Artan, R. and Tepe A.**, 2008. The Initial values method for buckling nonlocal bars with application in nanotechnology, *European Journal of Mechanics A/Solids*, **27**, 469-477.
- [12] **MATHEMATICA**, 2007. Computational software program used in engineering and mathematical fields, Wolfram Research, Illinois, USA.
- [13] **Gantmakher, F. P.**, 2000. The Matricant, *The Theory of Matrices*, Vol 2, 125-129, The American Mathematical Society.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Ali ŞAHİN

Doğum Yeri ve Tarihi: Bakırköy / İstanbul - 1984

Adres: Ataköy 4. Kısım O / 230 Blok Bakırköy / İstanbul

Lisans Üniversitesi: İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ / İnşaat Mühendisliği Bölümü

