

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NONLİNEER ELASTİK MAMBRAN TÜPLER:  
VARYASYONEL FORMÜLASYON,  
İVME DALGALARI VE  
RÖLAKSASYON SAYISAL METODU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Gonca L. Akı**

**Anabilim Dalı : MATEMATİK**

**Programı : MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ**

**TEMMUZ 2005**

**NONLİNEER ELASTİK MAMBRAN TÜPLER:  
VARYASYONEL FORMÜLASYON,  
İVME DALGALARI VE  
RÖLAKSASYON SAYISAL METODU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Gonca L. Akı  
(509031001)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 23 Haziran 2005  
Tezin Savunulduğu Tarih : 06 Temmuz 2005**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Hüsnü Ata ERBAY  
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Hilmi DEMİRAY(I.Ü.)  
Prof.Dr. Faruk GÜNGÖR(I.T.Ü.)**

**TEMMUZ 2005**



## ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca bana yol gösteren, ilgisini, desteğini ve değerli tavsiyelerini eksik etmeyen hocam Prof. Dr. Hüsnü Ata Erbay'a teşekkür ederim.

Haziran, 2005

Gonca Lütfiye Akı

## İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b>	v
<b>SUMMARY</b>	vi
<b>1. GİRİŞ</b>	1
<b>2. TEMEL DENKLEMLER</b>	4
2.1 Giriş	4
2.2 Sonlu Elastisitenin Denklemleri	5
2.2.1 Deformasyon, Şekil değiştirme ve Hız	5
2.2.2 Denklik Yasaları ve Gerilme Tansörleri	8
2.2.3 Bünye Denklemleri	10
2.2.3.1 Sıkışabilir Malzemeler	12
2.2.3.2 Sıkışmaz Malzemeler	13
2.2.4 Silindirik Koordinatlarda Hareket Denklemleri	14
2.2.5 Sınır Koşulları	16
2.3 Eksenel Simetrik Deformasyonlar	18
2.4 Virtüel İş İlkesi	23
<b>3. NONLİNEER ELASTİK MAMBRAN TÜPLER İÇİN VİRTÜEL İŞ İLKESİ</b>	26
3.1 Giriş	26
3.2 Boyutsuzlaştırma ve Ölçekleme	27
3.3 Boyutsuzlaştırılmış ve Ölçeklenmiş Problem	28
3.4 Asimptotik Açılım: Sıkışmaz Malzeme	31
3.5 Asimptotik Açılım: Sıkışabilir Malzeme	39
<b>4. NONLİNEER ELASTİK MAMBRAN TÜPLERDE İVME DALGALARININ YAYILIMI</b>	45
4.1 Giriş	45
4.2 Mambran Tüpün Dinamik Uzaması Probleminin Formülasyonu	45
4.3 Dalga Cephesi Civarında Açılım: Ön Deformasyonsuz Durum	49

4.4 Dalga Cephesi Civarında Açılım: Ön Deformasyonlu Durum	53
<b>5. HİPERBOLİK KORUNUM YASALARI İÇİN</b>	
<b>RÖLAKSASYON SAYISAL METODU</b>	57
5.1 Giriş	57
5.2 Rölaksasyon Sayısal Metodu	57
5.2.1 Birinci Mertebe Rölaksasyon Metodu	60
5.2.2 İkinci Mertebe Rölaksasyon Metodu	63
5.3 Relaxed Şemanın TVD Özelliği	66
5.3.1 Fark Şemalarının Monotonluk Özelliği	67
5.3.2 TVD Şemaların Özellikleri	68
5.3.3 Relaxed Şemanın TVD olması	70
5.4 Sayısal Deneyler	76
5.4.1 Lineer Dalga Denklemi	77
5.4.2 Viskoz Olmayan Burgers Denklemi	77
5.4.3 Homojen Olmayan Burgers Denklemi	79
<b>6. SONUÇ</b>	81
<b>KAYNAKLAR</b>	83
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	85

# NONLİNEER ELASTİK MAMBRAN TÜPLER: VARYASYONEL FORMÜLASYON, İVME DALGALARI VE RÖLAKSASYON SAYISAL METODU

## ÖZET

Bu çalışmanın ilk kısmında, nonlinear elastik dairesel silindirik tüplerin sonlu eksenel simetrik deformasyonları için varyasyonel ilkeler kullanılarak bir asimptotik membran teorisi türetilir ve nonlinear elastik membran tüplere karşılık gelen virtüel iş ilkesi elde edilir. Çalışmanın ikinci kısmında, bir hiperelastik membran tüpte yayılan ivme dalgalarının büyüme ve sönmesi bir dalga cephesi açılımı tekniği kullanılarak araştırılır ve başlangıç deformasyonunun etkisi tartışılır. Son olarak, korunum yasalarının sistemleri için bir sayısal metod (rölaksasyon metodu olarak adlandırılan) sunulur. Bölüm 2’de, nonlinear elastisite teorisinin temel denklemlerine bir kısa giriş verilir ve homojen izotrop hiperelastik malzemeden oluşan bir dairesel silindirik tüp için üç boyutlu problem tanımlanır. Bölüm 3’te, nonlinear elastik dairesel silindirik tüplerin bir membran teorisini türetmek için virtüel iş ilkesi üzerine kurulmuş bir asimptotik açılım tekniği geliştirilir. Membran tüpün eksenel simetrik dinamik deformasyonlarını yöneten denklemler ve yönetici denklemlere karşılık gelen virtüel iş ilkesi hem sıkışmaz malzemeler hem de sıkışabilir malzemeler için türetilir. Bölüm 4’te, bir nonlinear elastik membran tüpün dinamik eksenel simetrik deformasyonlarını tüpün bir ucu dinamik uzamaya maruz ve diğer ucu sabit iken araştırmak için bir başlangıç ve sınır-değer problemi tanımlanır. Dalga cephesi açılımı metodu kullanılarak, bir nonlinear elastik membran tüpte yayılan ivme dalgalarının büyüme ve sönmesi üzerine başlangıç deformasyonunun etkisi tartışılır. Bölüm 5, korunum yasalarının sistemlerini çözmek için önerilmiş rölaksasyon sayısal metodunun gözden geçirilmesine ayrılmıştır. Değerlendirmeler Bölüm 6’da yapılır.

**NONLINEARLY ELASTIC MEMBRANE TUBES:  
VARIATIONAL FORMULATION, ACCELERATION WAVES AND  
RELAXATION NUMERICAL METHOD**

**SUMMARY**

In the first part of the present study, an asymptotic membrane theory for finite axially symmetric deformations of nonlinearly elastic circular cylindrical tubes is derived through variational principles and the virtual work principle corresponding to nonlinearly elastic membrane tube is obtained. In the second part, the growth and the decay of acceleration waves propagating in a hyperelastic membrane tube is investigated using a wavefront expansion technique and the effect of initial deformation is discussed. Finally, a numerical method (called the relaxation method) for systems of conservation laws is presented. In Chapter 2, a brief introduction to the fundamental equations of nonlinear elasticity theory is given and the three-dimensional problem for a circular cylindrical tube composed of a homogeneous isotropic hyperelastic material is defined. In Chapter 3, an asymptotic expansion technique based on the principle of virtual work is developed to derive a membrane theory of nonlinearly elastic circular cylindrical tubes. The equations governing dynamic axially symmetric deformations of the membrane tube and the principle of virtual work corresponding to the governing equations are derived for both incompressible materials and compressible materials. In Chapter 4, an initial and boundary value problem is defined to investigate dynamic axially symmetric deformations of a nonlinear elastic membrane tube when one end of the tube is subjected to a dynamic extension and the other end is fixed. The growth and decay of acceleration waves propagating in a nonlinear elastic membrane tube is investigated using the method of wavefront expansion and the effect of initial deformation on the growth and decay of acceleration waves is discussed. Chapter 5 is devoted to an overview of the relaxation numerical method proposed for solving systems of conservation laws. Conclusions are drawn in Chapter 6.



## 1. GİRİŞ

Bir cisme kuvvet uygulandığında cisim şekil değişimine uğruyor ancak uygulanan kuvvet kaldırıldığında tekrar doğal haline dönüyor ise, bu cisme *elastik* cisim denir. Eğer cismin herhangi bir noktasında meydana gelen şekil değiştirme ve uygulanan kuvvetin büyüklüğü arasında doğru orantı mevcut değilse, elastik cisim *nonlinear* elastik cisim adını alır.

Nonlinear elastik cisimlerin dinamik şekil değiştirmelerini yöneten denklemlerin karmaşıklığı nedeniyle elde edilmiş tam analitik çözümlerin sayısı son derece sınırlıdır. Bu konuda daha geniş bilgi için [1] önerilebilir. Nonlinear elastisitede tam analitik çözümler elde etmedeki zorluklar araştırmacıları yaklaşık teoriler geliştirmeye yöneltti. Özellikle bir boyutun diğer iki boyut yanında oldukça küçük olduğu plak ve kabuk gibi cisimler için asimptotik açılım tekniği uygulanarak geliştirilmiş plak teorileri ve kabuk teorileri, literatürde yaygın olarak çalışılmış ve teknolojide de önemli uygulama alanları bulan teorilerdir. Membranlar plak ve kabuklara göre çok daha fazla ince olan elastik cisimler olup, membran teorileri de yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu tez çalışmasının da konusu olan nonlinear elastik cisimlerin membran teorilerinin türetilmesinde izlenen farklı yaklaşımların bir karşılaştırılması için [2] önerilebilir.

Bu tez çalışmasında üç farklı problem çözülmeye çalışılmıştır. İlk olarak, bir nonlinear elastik dairesel silindirik tüpün aksel simetrik deformasyonlarını yöneten asimptotik membran teorisi bir varyasyonel formülasyon yardımıyla türetilmiş ve membran denklemlerini Euler-Lagrange denklemleri olarak veren virtüel iş ilkesi ifade edilmiştir. Nonlinear elastik membran tüplerin aksel simetrik deformasyonlarını yöneten denklemler literatürde daha önce statik hal için [3]'te, dinamik hal için ise [4] ve [5]'te türetilmiştir. Bu çalışmalarda üç

boyutlu elastisite denklemlerine asimptotik açılım tekniği uygulanarak, silindirik mambran tüplerin bir boyutlu denklemleri türetilmiştir. Şimdiki çalışmanın bu çalışmalardan en önemli farkı, asimptotik mambran denklemlerinin üç boyutlu elastisitenin virtüel iş ilkesi üzerine inşa edilmiş olmasıdır. Böylece mambran tüp denklemlerini Euler-Lagrange denklemleri olarak veren virtüel iş ilkesine ulaşmak mümkün olmuştur.

İkinci problem olarak, nonlinear elastik mambran tüpte yayılan ivme dalgalarının genliklerinin büyüme ve sönmesi araştırılmıştır. Örnek olarak literatürde geniş kabul görmüş olan Mooney-Rivlin elastik malzemesinden yapılmış bir mambran tüp göz önüne alınmıştır. Doğal durumda bulunan bir mambran tüpte yayılan ivme dalgalarının genliğinin sınırsız şekilde büyümediği gösterilmiştir. Öte yandan, başlangıç deformasyonuna sahip mambran tüplerde yayılan ivme dalgalarının bazı koşulların sağlanması halinde şok oluşumuna neden olabileceği gösterilmiştir. Elde edilen sonuçların [4], [5],[6] ve [7]'de tartışılmış olan bir dinamik uzama problemi için [4]'te sunulan sayısal sonuçlarla tam bir uyum içerisinde olduğu gözlenmiştir.

Üçüncü problem olarak, yukarıda söz konusu edilen dinamik uzama problemine karşılık gelen hiperbolik sistemin [8]'de önerilmiş bir rölaksasyon metodu kullanılarak sayısal çözümlerinin elde edilmesi amaçlanmıştır. Aynı problem literatürde, [6] ve [7]'de karakteristikler üzerine inşa edilmiş bir sayısal yöntem ve [4] ve [5]'te ise bir ikinci mertebe Godunov sayısal metodu kullanılarak çözülmüştür. Şimdiki tez çalışmasında kullanılan rölaksasyon metodunun en önemli iki avantajı yerel Riemann problemlerinin çözümüne gerek duymaması ve nonlinear cebirsel denklem sistemlerinin çözümüne gerek duymaması olarak ifade edilebilir [8]. Rölaksasyon metodunun birinci ve ikinci mertebe versiyonları tanıtılmış ve bazı özellikleri tartışılmıştır. Birinci mertebe metodun bilgisayar programı haline getirilmesi tamamlanmış ve literatürde tartışılmış bazı örnek problemler için gerçekleştirilen sayısal deneylerde metod test edilmiş ve başarılı olduğu gözlenmiştir. Ancak ikinci mertebe metodun bilgisayar programı haline getirilmesinde istenilen başarı sağlanamamış ve gerçekleştirilen sayısal deneylerde

ikinci merteye yakınsama hızına ulaşamadığı gözlenmiştir.

Bölüm 2’de, nonlinear elastisite teorisinin üç boyutlu denklemleri verilmiş ve bu denklemlerin aksenal simetrik deformasyon halinde aldıkları form ifade edilmiştir. Bölüm 3’te, virtüel iş ilkesi üzerine inşa edilmiş bir varyasyonel formülasyon yardımıyla nonlinear elastik mambran tüpleri yöneten denklemler bir asimptotik açılımın ilk mertebesi olarak türetilmiştir. Bölüm 4’te, nonlinear elastik mambran tüpte yayılan ivme dalgalarının genliğinin büyüme ve sönmesi araştırılmış ve şok oluşumu için gerekli koşullar elde edilmiştir. Bölüm 5’te, hiperbolik sistemlerin sayısal çözümü için önerilmiş olan rölaksasyon metodu tanıtılmış ve birinci merteye rölaksasyon metodu bazı örnek problemler için test edilmiştir. Bölüm 6’da, bu tez çalışmasının bir değerlendirmesi ile birlikte gelecekte çalışılması düşünülen problem kısaca sunulmuştur.

## 2. TEMEL DENKLEMLER

### 2.1 Giriş

Bu bölümde sonlu elastisite teorisinin temel denklemlerine sadece kısa bir giriş yapılacaktır. Ayrıntılara yer verilmeyecek ve sadece tez konusuyla ilgili denklemler üzerinde durulacaktır. Daha ayrıntılı bilgi için yine nonlinear elastisite konusunda Tüzel [9] tarafından hazırlanmış yüksek lisans tezinin 2. Bölümüne ve bu konuda klasik kabul edilen kaynaklara, (örneğin [1] ve [10]) başvurulabilir. Alt bölüm 2.2’de sonlu elastisite teorisinin temel denklemleri kısaca özetlenmiştir. Ayrıca bu denklemlerin silindirik koordinatlardaki karşılıkları da verilmiştir. Homojen izotrop nonlinear elastik genel bir malzemedan yapılmış, içi boş dairesel silindirik bir tüp için üç boyutlu problem alt bölüm 2.3’te tanımlanmıştır. Tüpün sonlu aksenal simetrik şekil değiştirmesini yöneten denklemler de yine bu alt bölümde elde edilmiştir.

Bu paragrafta sonradan kullanılacak bazı formüller verilecektir. Eğer  $\mathbf{D}$  ikinci mertebe bir tansör ve  $\mathbf{d}$  özdeş olarak sıfır olmayan bir vektör olmak üzere  $\mathbf{D}\mathbf{d} = d\mathbf{d}$  eşliğini sağlayacak şekilde bir  $d$  skaleri varsa bu skalere *özdeğer*,  $\mathbf{d}$  vektörüne de  $d$  özdeğerine karşılık gelen *özvektör* denir. Öte yandan  $\det(\mathbf{D} - d\mathbf{I}) = 0$  denklemi  $\mathbf{D}$ ’nin *karakteristik denklemi* adını alır ve

$$d^3 - I_1(\mathbf{D})d^2 + I_2(\mathbf{D})d - I_3(\mathbf{D}) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $I_1(\mathbf{D})$ ,  $I_2(\mathbf{D})$  ve  $I_3(\mathbf{D})$  skalerleri  $\mathbf{D}$ ’nin *asal değişmezleri* olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{D}) &= \text{tr } \mathbf{D}, \\ I_2(\mathbf{D}) &= \frac{1}{2} \left[ (\text{tr } \mathbf{D})^2 - \text{tr } \mathbf{D}^2 \right], \end{aligned}$$

$$I_3(\mathbf{D}) = \det \mathbf{D} = \frac{1}{6} \left[ (\text{tr } \mathbf{D})^3 - 3(\text{tr } \mathbf{D})(\text{tr } \mathbf{D}^2) + 2\text{tr } \mathbf{D}^3 \right].$$

Bu işlem sırasında  $\text{tr}$  ve  $\det$  gösterimleri sırasıyla, iz ve determinant işlemleri için kullanılacaktır.  $d_1$ ,  $d_2$  ve  $d_3$  skalerlerinin  $\mathbf{D}$  simetrik ikinci mertebe tansörünün özdeğerleri olduğu varsayılınsın. Bu durumda  $\mathbf{D}$ 'nin asal değişmezleri  $d_1$ ,  $d_2$  ve  $d_3$  özdeğerlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$I_1(\mathbf{D}) = d_1 + d_2 + d_3, \quad I_2(\mathbf{D}) = d_1d_2 + d_2d_3 + d_3d_1, \quad I_3(\mathbf{D}) = d_1d_2d_3$$

(bkz. [1] veya [10]).

Bu bölüm boyunca birkaç istisna dışında Ogden tarafından [1]'de kullanılmış olan notasyon kabul edilecektir: örneğin deformasyon gradyanını göstermek için  $\mathbf{A}$  yerine  $\mathbf{F}$  kullanılacaktır.

## 2.2 Sonlu Elastisitenin Denklemleri

### 2.2.1 Deformasyon, Şekil Değiştirme ve Hız

Elastik malzemeden yapılmış bir cismin belirli bir  $t_0$  anındaki konumu referans konumu veya doğal durumu olarak seçilmiş olsun. Cismin referans konumunda oluşturduğu hacimsel bölge  $\mathcal{B}_0$  ile gösterilecektir. Cismin  $t$  anında oluşturduğu hacimsel bölge de  $\mathcal{B}$  ile gösterilecektir. Cismi oluşturan parçacıkların hem referans konumundaki (Lagrangeyen) hem de  $t$  zamanına karşılık gelen uzaysal konumdaki (Euleryen) yerlerini tanımlamak için Kartezyen koordinat sistemleri kullanılacaktır.  $\{X_1, X_2, X_3\}$  koordinat takımı,  $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$  ortonormal baz vektörleri ve  $\mathbf{O}$  orijin olmak üzere, Lagrangeyen Kartezyen koordinatlarını temsil etsin. Benzer şekilde  $\{x_1, x_2, x_3\}$  koordinat takımı,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  ortonormal baz vektörleri ve  $\mathbf{o}$  orijin olmak üzere, Euleryen Kartezyen koordinatlarını temsil etsin. Ortamın herhangi bir tipik maddesel noktası  $X$  ile işaretlenmiş olsun.  $X$  parçacığının referans konumunda işgal ettiği noktanın yeri  $\mathbf{X}$  vektörü ile tanımlanırken,  $t$  anında uzayda işgal ettiği noktanın yeri  $\mathbf{x}$  vektörü ile

tanımlanmış olsun. Bu durumda, toplama uylasıını geçerli olmak üzere,

$$\mathbf{X} = X_K \mathbf{E}_K, \quad \mathbf{x} = x_k \mathbf{e}_k \quad (2.1)$$

ifadeleri yazılabilir. Deformasyonların bir parametrelili ailesi

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \quad (2.2)$$

denklemleri ile verilir. Burada  $\boldsymbol{\chi}$  bir  $t$  anında referans konumundan deformasyonu gösterir. (2.2) denkleminin diferansiyeli alınır

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.3)$$

denklemleri elde edilir. Burada  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \equiv \nabla \otimes \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanan ikinci mertebeli bir tansördür ve deformasyon gradyanı adını alır. Burada Grad (büyük harf G ile) notasyonu  $\mathbf{X}$ 'e göre alınan gradyan operatörü için kullanılır ve  $\otimes$  sembolü tansörel çarpımı ifade eder (bkz. [1]).  $\mathbf{F}$  için diğer bir gösterim  $\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X} \equiv \partial\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)/\partial\mathbf{X}$  şeklindedir. Eğer  $\mathbf{F}$  tansörü  $\{\mathbf{e}_k\}$  ve  $\{\mathbf{E}_K\}$  bazlarına göre  $F_{kK}$  bileşenlerine sahip ise, yani  $\mathbf{F} = F_{kK} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}_K$  ise o zaman (2.4) denkleminde  $F_{kK} = \partial x_k / \partial X_K$  elde edilir. Sürekli ortamın hareketini tanımlayan (2.2) dönüşümünün bir fiziksel harekete karşı gelebilmesi için bu dönüşümün, hacmi sonlu olan bir bölgeyi hacmi sıfır ya da sonsuz olan bir bölgeye dönüştürmesine izin verilmemelidir. Bu nedenle  $\mathbf{F}$  *tekil olmayan* bir tansör olarak kabul edilir, yani  $\det \mathbf{F} \neq 0$  olduğu varsayılır. Yazım kolaylığı için

$$J \equiv \det \mathbf{F} \quad (2.5)$$

notasyonu kullanılacaktır. Böylece,  $J$  (2.2) dönüşümünün Jakobiyen determinantını temsil eder. Şekil değişimi öncesi ve sonrası konumlar çakışır veya şekil değişimi sadece bir rijit dönme ise,  $J = 1$  olacağı açıktır.

$\mathbf{F}$  matrisi tekil olmadığı için, bir  $\mathbf{F}^{-1}$  tersi vardır. Yazım kolaylığı için  $T$  transpozeyi göstermek üzere,  $\mathbf{B} = (\mathbf{F}^{-1})^T$  notasyonu kullanılacaktır. Böylece, (2.3) bağıntısının tersi  $d\mathbf{X} = \mathbf{B}^T d\mathbf{x}$  olarak yazılabilir.

(2.3) denkleminde kolayca elde edilebilen

$$|\mathbf{dx}|^2 - |\mathbf{dX}|^2 = \mathbf{dX} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \mathbf{dX} \quad (2.6)$$

ifadesi  $\mathbf{dX}$  ve  $\mathbf{dx}$  elemanlarının boylarının karesinin farkını verir. Burada  $\cdot$  notasyonu skaler çarpımı ifade eder.  $(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^T = \mathbf{F}^T (\mathbf{F}^T)^T = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  özelliğini kullanarak,  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$  tansörünün simetrik olduğu sonucunu çıkarabiliriz.  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$  tansörü *Cauchy-Green şekil değiştirme* tansörü olarak adlandırılır ve  $\mathbf{C}$  ile gösterilir. (2.6) denkleminde anlaşılacağı gibi  $\mathbf{I}$  birim tansör olmak üzere, eğer  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  ise cisim doğal durumundadır.

Referans konumundaki  $dV$  hacim elemanı ve şekil değişimi sonrası karşı gelen  $dv$  hacim elemanı arasındaki ilişki

$$dv = (\det \mathbf{F}) dV \equiv J dV \quad (2.7)$$

ile verilir (bkz [1]). Burada  $J$  maddesel hacim elemanın şekil değişimi öncesi ve sonrası hacimlerinin yerel oranıdır. Hacim elemanlarının pozitif olması gerektiğinden, yukarıdaki denklemden

$$J \equiv \det \mathbf{F} > 0 \quad (2.8)$$

bulunur. Şekil değişimi sırasında hacim yerel olarak değişmez ise  $\mathbf{X}$  noktasında

$$J = 1 \quad (2.9)$$

olur. Böyle şekil değişimlerine  $\mathbf{X}$ 'te *izokorik* (hacmi koruyan) denir. Şekil değişimi esnasında hacmi korunan malzemeye *sıkışmaz malzeme* denir.

Referans konumunda  $\mathbf{X}$  noktasını işgal eden maddesel parçacığın hızı, Lagrangeyen (referans) koordinatlarında  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  ile gösterilir ve

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad (2.10)$$

ile tanımlanır. Euleryen (uzaysal) koordinatlarda, uzayda  $\mathbf{x}$  noktasını işgal eden maddesel parçacığın hızı ise  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  ile gösterilir ve

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t) \quad (2.11)$$

bağıntısı geçerlidir. Sabit bir  $\mathbf{X}$  noktasındaki  $\partial/\partial t$  türevi, bazen yazım kolaylığı için,  $\cdot$  ile gösterilecektir.

## 2.2.2 Denklik Yasaları ve Gerilme Tansörleri

Kütlenin korunumu, lineer momentumun denkliği ve açısal momentumun denkliğinin genel formları

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t) dv = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}) da \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv &= \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv \\ &+ \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}) da \end{aligned} \quad (2.14)$$

ile verilir. Burada  $\rho$  cismin uzaysal koordinatlardaki kütle yoğunluğu,  $\times$  sembolü vektörel çarpım,  $\mathbf{b}$  kütle kuvveti yoğunluğu,  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  yüzeyin birim alanına etkiyen gerilme vektör alanı,  $da$  alan elemanı ve  $\mathbf{x}_0$  keyfi bir noktadır (bkz [1]). Gerilme vektörü  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ , üzerine etki ettiği  $\mathcal{B}$ 'nin sınırı olan  $\partial\mathcal{B}$ 'ye bağlıdır.  $\mathbf{x}$  noktasındaki  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  gerilme vektörünün yüzeye, sadece  $\mathbf{x}$  noktasındaki yüzeyin (birim) normal olan  $\mathbf{n}$  doğrultusunda bağlı olduğu varsayılmaktadır. Bu nedenle  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{x})$  notasyonu  $\mathbf{n}$  vektörüne olan açık bağıllığı belirtmek için kullanılmıştır. Cauchy teoremine göre (örneğin bkz. [1, p.146]) keyfi  $\mathbf{n}$  birim vektörleri ve her  $\mathbf{x}$  için  $\mathbf{n}$  vektöründen bağımsız

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n} \quad (2.15)$$

olacak şekilde bir ikinci mertebe tansör alanı  $\boldsymbol{\sigma}$  vardır. İkinci mertebe tansör  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  *Cauchy gerilme tansörü* adını alır.  $\mathbf{n}$  birim normal yönündeki *normal gerilme bileşeni*  $\sigma_n$  ve  $\mathbf{t}$  birim teğet vektör yönündeki *kayma gerilmesi bileşeni*  $\sigma_t$ , sırasıyla,

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n}], \quad \sigma_t = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{t} \cdot [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n}] \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanır. Kütlenin korunumu, lineer momentumun denkliği ve açısal momentumun denkliğinin yerel formları, sırasıyla,

$$\dot{\rho} + \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (2.17)$$



$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (2.18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \quad (2.19)$$

şeklinde verilir (bkz. [1]). Öte yandan

$$\rho J = \rho_0 \quad (2.20)$$

denklemini kütle korunumu yasasının diğer bir yerel formudur. (2.18) denklemini birinci Cauchy hareket denklemi olarak biliriz. Cauchy gerilme tansörünün simetrik olduğu anlamına gelen (2.19) denklemi ise, ikinci Cauchy hareket denklemi olarak biliriz.

Lineer momentumun denklemini veren (2.13) denklemini  $\mathcal{B}_0$  and  $\partial\mathcal{B}_0$  üzerinde yazılmış integrallere bağlı olarak

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0(\mathbf{X}) \mathbf{b}_0(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{S}^T(\mathbf{X}, t) \mathbf{N} dA = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0(\mathbf{X}) \ddot{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{X}, t) dV \quad (2.21)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\mathbf{b}_0(\mathbf{X}, t) = \mathbf{b}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)$  ve  $\mathbf{N}$  vektörü  $\partial\mathcal{B}_0$  üzerinde birim (dış) normaldir.  $\mathbf{S}$  tansör alanı

$$\mathbf{S} = J \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (2.22)$$

ile verilir ve *nominal gerilme tansörü* adını alır (bkz. [1]).  $\mathbf{S}$  tansörünün transpozesi bazen birinci tür Piola-Kirchhoff gerilme tansörü olarak adlandırılır. Referans konumundaki alan elemanı ile şekil değiştirmiş konumdaki alan elemanını ilişkilendiren

$$\mathbf{n} da = J \mathbf{B} \mathbf{N} dA \quad (2.23)$$

denklemini Nanson formülü olarak biliriz (bkz [1]). Bu denklem lineer momentumun denklemini ifade eden (2.13) denklemini yukarıda verilen (2.21) formuna dönüştürürken kullanılır. (2.21) denkleminin yerel formu *Lagrangeyen hareket denklemi* olarak adlandırılır ve

$$\operatorname{Div} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\boldsymbol{\chi}} \quad (2.24)$$

ile verilir. Bu denklemdeki vektörlerin uzaysal (Euleryen) olmasına rağmen bağımsız değişkenlerin  $\mathbf{X}$  ve  $t$  olduğuna dikkat edilmelidir. Bu tezin geri kalan

kısımında kütle kuvvetinin mevcut olmadığı, yani her  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$  için  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{0}$  olduğu varsayılacaktır. (2.19) denkleminde (2.22) tanımı kullanılırsa,  $\boldsymbol{\sigma}$  Cauchy gerilme tansörünün simetrik olmasının

$$\mathbf{F}\mathbf{S} = \mathbf{S}^T\mathbf{F}^T \quad (2.25)$$

şeklinde de ifade edilebileceği çıkar. Böylece (2.20), (2.24) ve (2.25) denklemleri Lagrangeyen alan denklemlerini oluşturur. Bu denklem sistemi malzeme davranışının doğasını tanımlayan bir *bünye denklemi* ile tamamlanır.

### 2.2.3 Bünye Denklemleri

$W(\mathbf{F})$  şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu olmak üzere, gerilme-şekil değiştirme bağıntısı

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \quad (2.26)$$

denklemi ile verilen bir elastik cisim *hiperelastik* cisim olarak adlandırılır.  $W$  şekil değişimi sonucunda ortamda biriktirilen enerjinin bir ölçüsüdür. Eğer referans konumu olarak doğal konum alınırsa (ki bu konumda  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  ve  $\mathbf{S} = \mathbf{0}$  olur), o zaman  $W(\mathbf{I}) = 0$  seçmek uygun olur. Öte yandan, sıkışmaz bir malzeme  $\det \mathbf{F} = 1$  kısıtlamasına tabidir. Sıkışmaz malzeme için (2.26) denkleminin benzeri olan denklem

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{B}^T \quad (2.27)$$

şeklinde verilir. Burada  $p$  *hidrostatik basınç* adını alır ve bir Lagrange çarpanı olarak ortaya çıkar. İlerideki bölümlerde

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}\mathbf{S}^T \quad (2.28)$$

bağıntısıyla verilen ve Biot gerilme tansörü adını alan bir  $\mathbf{T}$  ikinci mertebe tansörü sıklıkla kullanılacaktır. Biot gerilme tansörü hakkında daha detaylı bilgi Ogden[1] tarafından verilmiştir.

Eğer elastik bir cismin mekanik olarak verdiği tepki referans konumunda belirli bir yön tercihi sergilemiyorsa, o zaman bu cisme *izotrop elastik cisim* denir

(bkz. [1]). Homojen izotrop hiperelastik bir cismin şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu,  $\mathbf{C}$  Cauchy-Green şekil değiştirme tansörünün asal değişmezlerinin bir fonksiyonudur:  $W = W(I_1, I_2, I_3)$  (burada  $I_1, I_2, I_3$  skalerleri  $\mathbf{C}$  tansörünün asal değişmezleridir). O zaman homojen izotrop hiperelastik bir cismin nominal gerilme tansörü

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{F}^T + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{F}) \mathbf{F}^T + 2 I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{B}^T \quad (2.29)$$

ile verilir (bkz [1]).  $\Lambda_1^2$ ,  $\Lambda_2^2$  ve  $\Lambda_3^2$  simetrik ikinci mertebe tansör olan  $\mathbf{C}$  Cauchy-Green şekil değiştirme tansörünün özdeğerleri olsun. Diğer bir deyişle, bu özdeğerler

$$\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \Lambda^2 \mathbf{I}) = 0 \quad (2.30)$$

karakteristik denklemini sağlasınlar. O zaman  $\mathbf{C}$  tansörünün asal değişmezleri  $\Lambda_1^2, \Lambda_2^2, \Lambda_3^2$  cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilirler:

$$I_1(\mathbf{C}) = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2, \quad I_2(\mathbf{C}) = \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 + \Lambda_2^2 \Lambda_3^2 + \Lambda_3^2 \Lambda_1^2, \quad I_3(\mathbf{C}) = \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 \Lambda_3^2. \quad (2.31)$$

$\Lambda_1, \Lambda_2$  ve  $\Lambda_3$  skalerleri *asal germeler* (bkz [1]) olarak da adlandırılırlar. Eğer referans konumu olarak doğal konum alınırsa,  $\Lambda_1^2 = \Lambda_2^2 = \Lambda_3^2 = 1$  olacağı açıktır. Ayrıca referans konumunda  $I_1 = I_2 = 3$  ve  $I_3 = 1$  olur.  $W$  fonksiyonu  $\Lambda_1, \Lambda_2$  ve  $\Lambda_3$  asal germelerinin fonksiyonu olarak da düşünülebilir ve  $W = W(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$  yazılabilir. Burada yeni fonksiyonel bağıllığı belirtmek için farklı bir harf kullanılmamıştır. İzotrop bir şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu için (2.31) denklemlerinden

$$\frac{\partial W}{\partial \Lambda_1} = 2 \Lambda_1 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + (\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} + \Lambda_2^2 \Lambda_3^2 \frac{\partial W}{\partial I_3} \right], \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \Lambda_2} = 2 \Lambda_2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + (\Lambda_1^2 + \Lambda_3^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} + \Lambda_1^2 \Lambda_3^2 \frac{\partial W}{\partial I_3} \right], \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \Lambda_3} = 2 \Lambda_3 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} + \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_3} \right] \quad (2.34)$$

elde edilir [9].

$I_3 = 1$  durumuna karşılık gelen sıkışmaz bir malzeme için, şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu  $W$  sadece iki asal değişmeze bağlı olur:  $W = W(I_1, I_2)$ . O zaman

sıkışmaz bir malzemenin nominal gerilme tansörü  $p$  keyfi hidrostatik basınç olmak üzere,

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{F}^T + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{F}) \mathbf{F}^T - p \mathbf{B}^T \quad (2.35)$$

formunu alır. Sıkışmaz bir malzeme için  $I_3 = 1$  ve dolayısıyla  $\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 \Lambda_3^2 = 1$  olduğu için, (2.31) ile verilen asal germeler

$$I_1 = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \frac{1}{\Lambda_1^2 \Lambda_2^2}, \quad I_2 = \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 + \frac{1}{\Lambda_1^2} + \frac{1}{\Lambda_2^2} \quad (2.36)$$

formunda tekrar yazılabilir. Bunun sonucu olarak

$$\frac{\partial W}{\partial \Lambda_1} = 2 \Lambda_1 \left( 1 - \frac{1}{\Lambda_1^4 \Lambda_2^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \Lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \Lambda_2} = 2 \Lambda_2 \left( 1 - \frac{1}{\Lambda_1^2 \Lambda_2^4} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \Lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \Lambda_3} \equiv 0 \quad (2.39)$$

bağıntıları elde edilir [9].

Literatürde hiperelastik cisimler için çok sayıda bünye denklemi önerilmiştir ve önerilmeye devam edilmektedir. Bu önerilen bünye denklemlerinin bazı örnekleri [1]'de bulunabilir. Aşağıda, literatürde çok fazla ilgi gören bünye denklemlerine karşılık gelen şekil değiştirme enerjisi fonksiyonlarından örnekler verilecektir. *Sıkışabilir* cisimler için Blatz ve Ko [11] tarafından deneysel olarak çalışılmış olan ve, sırasıyla, Blatz-Ko *köpük* poliüretan elastomer ve Blatz-Ko *katı* poliüretan elastomer olarak adlandırılan iki model sunulacaktır. *Sıkışmaz* cisimler için ise yine literatürde yaygın olarak kullanılan neo-Hookyen ve Mooney-Rivlin modelleri sunulacaktır.

### 2.2.3.1 Sıkışabilir Malzemeler

(i) *Blatz-Ko köpük poliüretan elastomer:*

Blatz-Ko köpük poliüretan elastomere karşılık gelen şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{\mu}{2} (I_2 I_3^{-1} + 2 I_3^{1/2} - 5) \quad (2.40)$$

şeklinde verilir. Burada  $\mu$  pozitif bir sabit olup, sonsuz küçük şekil değiştirmelere karşılık gelen kayma modülüdür. Asal germeler cinsinden şekil değiştirme enerjisi

$$W(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = \frac{\mu}{2}(\Lambda_1^{-2} + \Lambda_2^{-2} + \Lambda_3^{-2} + 2\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 - 5) \quad (2.41)$$

şeklini alır.

(ii) *Blatz-Ko katı poliüretan elastomer:*

Blatz-Ko katı poliüretan elastomere karşılık gelen şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu,  $q < 0$  olmak üzere,

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2} \left[ I_1 - 3 - \frac{2}{q}(I_3^{q/2} - 1) \right] \quad (2.42)$$

şeklindedir. Bu ifade asal germelere bağlı olarak

$$W(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = \frac{1}{2} \left\{ (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 - 3) - \frac{2}{q} [(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3)^q - 1] \right\} \quad (2.43)$$

şeklini alır. Literatürde  $q = -2$  durumu bazen sıkışabilir neo-Hookyen malzeme olarak da adlandırılır.

### 2.2.3.2 Sıkışmaz Malzemeler

(i) *Neo-Hookyen Malzeme:*

Neo-Hookyen malzemeye karşılık gelen şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu, invariantslara bağlı olarak

$$W(I_1, I_2) = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) \quad (2.44)$$

ve asal germelere bağlı olarak

$$W(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = \frac{\mu}{2}(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 - 3) \quad (2.45)$$

şeklinde verilir.

(ii) *Mooney-Rivlin Malzemesi:*

Mooney-Rivlin malzemesine karşılık gelen şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu, invariantslara bağlı olarak

$$W(I_1, I_2) = \frac{\mu}{2}[\gamma(I_1 - 3) + (1 - \gamma)(I_2 - 3)] \quad (2.46)$$

ve asal germelere bağılı olarak

$$W(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = \frac{\mu}{2}[\gamma(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 - 3) + (1 - \gamma)(\Lambda_1^2\Lambda_2^2 + \Lambda_1^2\Lambda_3^2 + \Lambda_2^2\Lambda_3^2 - 3)] \quad (2.47)$$

şeklinde verilir. Burada  $\gamma$  bir sabit olup  $0 \leq \gamma \leq 1$  eşitsizliğini sağlar. Son olarak  $\gamma = 1$  için, (2.46) ile verilen Mooney-Rivlin şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun (2.44) ile verilen neo-Hookyen şekil değiştirme enerjisi fonksiyonuna indirgeneceği açıktır.

## 2.2.4 Silindirik Koordinatlarda Hareket Denklemleri

İlerideki bölümlerde homojen izotrop lineer olmayan elastik malzemeden yapılmış, ince duvarlı dairesel silindirik bir tüpün aksenal simetrik deformasyonunu yöneten denklemler üzerinde çalışılacaktır. Bu amaçla, kütle kuvvetinin olmadığı durumda (2.24) denkleminin silindirik koordinatlarda yazılmış formu elde edilecektir. Silindirik koordinatlar  $\mathbf{X}$  ve  $\mathbf{x}$  için, sırasıyla,

$$\{X_1, X_2, X_3\} = \{R \cos \Theta, R \sin \Theta, Z\} \quad (2.48)$$

ve

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \{r \cos \theta, r \sin \theta, z\} \quad (2.49)$$

şeklindedir. Öte yandan, sırasıyla,

$$\mathbf{E}_R = \cos \Theta \mathbf{E}_1 + \sin \Theta \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{E}_\Theta = -\sin \Theta \mathbf{E}_1 + \cos \Theta \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{E}_Z = \mathbf{E}_3 \quad (2.50)$$

ve

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3 \quad (2.51)$$

vektörleri karşılık gelen ortonormal baz vektörleridir. Nominal gerilme tansörü  $\mathbf{S}$ , (2.50) ve (2.51) ortonormal bazlarına ait bileşenlerine bağılı olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & S_{Rr} \mathbf{E}_R \otimes \mathbf{e}_r + S_{R\theta} \mathbf{E}_R \otimes \mathbf{e}_\theta + S_{Rz} \mathbf{E}_R \otimes \mathbf{e}_z + S_{\Theta r} \mathbf{E}_\Theta \otimes \mathbf{e}_r + S_{\Theta\theta} \mathbf{E}_\Theta \otimes \mathbf{e}_\theta \\ & + S_{\Theta z} \mathbf{E}_\Theta \otimes \mathbf{e}_z + S_{Zr} \mathbf{E}_Z \otimes \mathbf{e}_r + S_{Z\theta} \mathbf{E}_Z \otimes \mathbf{e}_\theta + S_{Zz} \mathbf{E}_Z \otimes \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.52)$$

şeklinde yazılır. Burada  $S_{Rr}$ ,  $S_{R\theta}$ ,  $S_{Rz}$ ,  $S_{\Theta r}$ ,  $S_{\Theta\theta}$ ,  $S_{\Theta z}$ ,  $S_{Zr}$ ,  $S_{Z\theta}$ ,  $S_{Zz}$  nominal gerilme tansörünün fiziksel bileşenleridir. Nominal gerilme tansörü matris notasyonunda

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} S_{Rr} & S_{R\theta} & S_{Rz} \\ S_{\Theta r} & S_{\Theta\theta} & S_{\Theta z} \\ S_{Zr} & S_{Z\theta} & S_{Zz} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

şeklinde gösterilir. Nominal gerilme tansörünün diverjansı,  $\nabla \cdot \mathbf{S}$  ise,  $\nabla \otimes \mathbf{S}$  işlemine uygulanan  $\nabla$  ve  $\mathbf{S}$  arasındaki bir büzülme ile tanımlanır. Bu büzülme işlemine göre  $\nabla \cdot \mathbf{S}$  ifadesi

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} = & \left[ \frac{\partial S_{Rr}}{\partial R} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial S_{\Theta r}}{\partial \Theta} + S_{Rr} - S_{\Theta\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial S_{Zr}}{\partial Z} - S_{R\theta} \frac{\partial \theta}{\partial R} - S_{Z\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right] \mathbf{e}_r \\ & + \left[ \frac{\partial S_{R\theta}}{\partial R} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial S_{\Theta\theta}}{\partial \Theta} + S_{R\theta} + S_{\Theta r} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial S_{Z\theta}}{\partial Z} + S_{Rr} \frac{\partial \theta}{\partial R} + S_{Zr} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right] \mathbf{e}_\theta \\ & + \left[ \frac{\partial S_{Rz}}{\partial R} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial S_{\Theta z}}{\partial \Theta} + S_{Rz} \right) + \frac{\partial S_{Zz}}{\partial Z} \right] \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.54)$$

şeklinde tanımlanır. (2.24) denkleminin sağ tarafındaki  $\ddot{\mathbf{x}}$  ivme alanı silindirik koordinatlarda

$$\ddot{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} - \frac{1}{r} V_\theta^2 \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r} V_r V_\theta \right) \mathbf{e}_\theta + \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} \right) \mathbf{e}_z \quad (2.55)$$

ile verilir. Burada  $V_r = \partial r / \partial t$ ,  $V_\theta = \partial \theta / \partial t$ ,  $V_z = \partial z / \partial t$  tanımları kullanılmıştır. Böylece, kütle kuvvetinin olmadığı durumda silindirik koordinatlarda ifade edilmiş hareket denklemleri, (2.54) ve (2.55) denklemlerinde  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  ve  $\mathbf{e}_z$  vektörlerinin katsayılarını eşitleyerek,

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial S_{Rr}}{\partial R} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial S_{\Theta r}}{\partial \Theta} + S_{Rr} - S_{\Theta\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial S_{Zr}}{\partial Z} - S_{R\theta} \frac{\partial \theta}{\partial R} - S_{Z\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right] \\ & - \rho_0 \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} - \frac{1}{r} V_\theta^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial S_{R\theta}}{\partial R} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial S_{\Theta\theta}}{\partial \Theta} + S_{R\theta} + S_{\Theta r} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial S_{Z\theta}}{\partial Z} + S_{Rr} \frac{\partial \theta}{\partial R} + S_{Zr} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right] \\ & - \rho_0 \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r} V_r V_\theta \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\left[ \frac{\partial S_{Rz}}{\partial R} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial S_{\Theta z}}{\partial \Theta} + S_{Rz} \right) + \frac{\partial S_{Zz}}{\partial Z} \right] - \rho_0 \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.58)$$

şeklinde elde edilir [9].

### 2.2.5 Sınır Koşulları

Elastik cismin referans konumunda oluşturduğu hacimsel bölge  $\mathcal{B}_0$  ile gösterilmişti. Bu bölgenin sınırı  $\partial\mathcal{B}_0$  ile gösterilsin. Ayrıca  $\partial\mathcal{B}_0$  sınırının  $\partial\mathcal{B}_0^d$  ve  $\partial\mathcal{B}_0^s$  ile gösterilen iki ayrık parçadan oluştuğu, yani  $\partial\mathcal{B}_0 = \partial\mathcal{B}_0^d \sqcup \partial\mathcal{B}_0^s$  olduğu varsayılacaktır. Şimdi sınırın  $\partial\mathcal{B}_0^d$  parçası üzerinde yerdeğıştirmeler verilmiş,  $\partial\mathcal{B}_0^s$  parçası üzerinde ise gerilmeler verilmiş olsun. Böylece  $\boldsymbol{\xi}$  ve  $\boldsymbol{\tau}$  sırasıyla  $\partial\mathcal{B}_0^d$  ve  $\partial\mathcal{B}_0^s$  üzerinde bilinen fonksiyonlar olmak üzere, sınır koşulları

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} \quad \partial\mathcal{B}_0^d \quad \text{üzerinde} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{S}^T \mathbf{N} = \boldsymbol{\tau} \quad \partial\mathcal{B}_0^s \quad \text{üzerinde} \quad (2.60)$$

şeklinde yazılabilir [1].

### 2.3 Eksenel Simetrik Deformasyonlar

İlerleyen bölümlerde lineer olmayan elastik malzemeden yapılmış dairesel silindirik tüpün eksenel simetrik deformasyonları incelenecektir. Bu amaçla, şekil değıştirmiş tüpün eksenel simetrik olduğu duruma karşı gelen temel denklemler elde edilecektir. Homojen izotrop hiperelastik malzemeden yapılmış içi boş bir silindirik tüpün doğal konumu (şekil değıştirmeden önceki ve gerilmemiş)

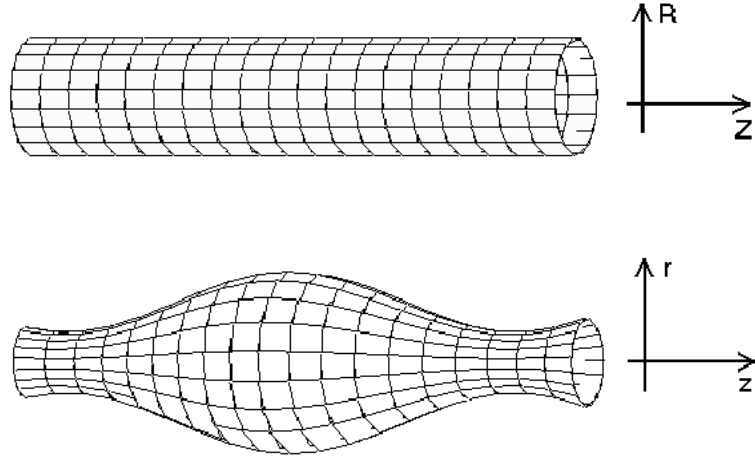
$$R_i \leq R \leq R_i + H, \quad 0 \leq \Theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq Z \leq L \quad (2.61)$$

denklemleri ile tanımlanmış olsun. Burada  $R_i$  şekil değıştirmemiş iç yüzeyin yarıçapı,  $H$  tüpün (düzgün) kalınlığı,  $L$  tüpün ilk uzunluğu,  $\{R, \Theta, Z\}$  doğal konumu belirleyen silindirik koordinatlardır. Tüpün eksenel simetrik deformasyonu

$$r = r(R, Z, t), \quad \theta = \Theta, \quad z = z(R, Z, t), \quad (2.62)$$

ile tanımlanır. Yine burada  $\{r, \theta, z\}$  şekil değıştirmiş konumu belirleyen silindirik koordinatlardır.





**Şekil 2.1:** Tüpün şekil değiştirmeden önceki ve sonraki konumları.

Şekil değiştirmiş tüpün aksenal simetrik olduğu durumla ilgilenileceği için, (2.62) denklemleri kullanılarak silindirik koordinatlarda yazılmış deformasyon gradyanı

$$\mathbf{F} = \frac{\partial r}{\partial R} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_R + \frac{\partial r}{\partial Z} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_Z + \frac{r}{R} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_\theta + \frac{\partial z}{\partial R} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_R + \frac{\partial z}{\partial Z} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_Z \quad (2.63)$$

olarak bulunur. Matris notasyonunda ise,  $\mathbf{F}$

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & 0 & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial R} & 0 & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

ile gösterilir. O zaman (2.5) denkleminde

$$J = \frac{r}{R} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial r}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial R} \right) \quad (2.65)$$

elde edilir. (2.64) ve  $\mathbf{B} = (\mathbf{F}^{-1})^T$  ile

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{r}{R} \frac{\partial z}{\partial Z} & 0 & -\frac{r}{R} \frac{\partial z}{\partial R} \\ 0 & \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial r}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial R} \right) & 0 \\ -\frac{r}{R} \frac{\partial r}{\partial Z} & 0 & \frac{r}{R} \frac{\partial r}{\partial R} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

bulunur. Bu durumda  $\mathbf{C}$  Cauchy-Green şekil değıştirme tansörü

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial R}\right)^2 & 0 & \left(\frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z}\right) \\ 0 & \left(\frac{r}{R}\right)^2 & 0 \\ \left(\frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z}\right) & 0 & \left(\frac{\partial r}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

şeklini alır. Asal germeler,  $\mathbf{C}$  tansörünün özdeğerleri ile ilişkili olduğu için,

$$\begin{aligned} \Lambda_2^2 &= \left(\frac{r}{R}\right)^2, \\ \Lambda_1^2 + \Lambda_3^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right)^2, \\ \Lambda_1^2 \Lambda_3^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial r}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial R}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

elde edilir. Böylece, (2.31) denklemlerinden  $\mathbf{C}$  tansörünün asal değışmezleri

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{C}) &= \left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^2, \\ I_2(\mathbf{C}) &= \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left[ \left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right)^2 \right] \\ &\quad + \left(\frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial r}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial R}\right)^2, \\ I_3(\mathbf{C}) &= \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial r}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial R}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.69)$$

olarak yazılır.

(2.62) deformasyonu için (2.29) denklemi, sıkışabilir hiperelastik malzeme durumunda  $\mathbf{S}$  nominal gerilme tansörünün fiziksel bileşenlerini

$$\begin{aligned} S_{Rr} &= 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Rr} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{\partial z}{\partial Z} \left(\frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z}\right) \right], \\ S_{Rz} &= 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial z}{\partial R} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Rz} - \frac{\partial W}{\partial I_3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{\partial r}{\partial Z} \left(\frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z}\right) \right], \\ S_{\Theta\theta} &= 2 \frac{r}{R} \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{\Theta\theta} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \left(\frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z}\right)^2 \right], \\ S_{Zr} &= 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Zr} - \frac{\partial W}{\partial I_3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{\partial z}{\partial R} \left(\frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z}\right) \right], \\ S_{Zz} &= 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial z}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Zz} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{\partial r}{\partial R} \left(\frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z}\right) \right], \\ S_{\Theta r} &= S_{R\theta} = S_{Z\theta} = S_{\Theta z} = 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

olarak verir. Burada

$$\begin{aligned}
K_{Rr} &= \frac{\partial r}{\partial R} \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial Z} \right)^2 \right] - \frac{\partial r}{\partial Z} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} \right), \\
K_{Rz} &= \frac{\partial z}{\partial R} \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial Z} \right)^2 \right] - \frac{\partial z}{\partial Z} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} \right), \\
K_{\Theta\theta} &= \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial Z} \right)^2, \\
K_{Zr} &= \frac{\partial r}{\partial Z} \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial R} \right)^2 \right] - \frac{\partial r}{\partial R} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} \right), \\
K_{Zz} &= \frac{\partial z}{\partial Z} \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial R} \right)^2 \right] - \frac{\partial z}{\partial R} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} \right)
\end{aligned} \tag{2.71}$$

tanımları kullanılmıştır. Benzer şekilde, (2.35) denklemi sıkışmaz hiperelastik malzeme durumunda nominal gerilme tansörünün fiziksel bileşenlerini

$$\begin{aligned}
S_{Rr} &= 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Rr} \right) - p \frac{r}{R} \frac{\partial z}{\partial Z}, \\
S_{Rz} &= 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial z}{\partial R} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Rz} \right) + p \frac{r}{R} \frac{\partial r}{\partial Z}, \\
S_{\Theta\theta} &= 2 \frac{r}{R} \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{\Theta\theta} \right) - p \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} \right), \\
S_{Zr} &= 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Zr} \right) + p \frac{r}{R} \frac{\partial z}{\partial R}, \\
S_{Zz} &= 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial z}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Zz} \right) - p \frac{r}{R} \frac{\partial r}{\partial R}, \\
S_{\Theta r} &= S_{R\theta} = S_{Z\theta} = S_{\Theta z} = 0
\end{aligned} \tag{2.72}$$

olarak verir. Yine burada  $K_{Rr}$ ,  $K_{Rz}$ ,  $\dots$ ,  $K_{Zz}$  için (2.71) denklemlerinde verilen tanımlar kullanılmıştır [9].

Eğer  $S_{R\theta} = S_{\Theta r} = S_{\Theta z} = S_{Z\theta} = 0$  olduğu hatırlanırsa,  $\mathbf{S}$  nominal gerilme tansörünün özdeğerleri  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  olmak üzere

$$S_2 = S_{\Theta\theta}, \quad S_1 + S_3 = S_{Rr} + S_{Zz}, \quad S_1 S_3 = S_{Rr} S_{Zz} - S_{Rz} S_{Zr} \tag{2.73}$$

bulunur.  $\mathbf{S}$  tansörünün asal değişmezleri

$$I_1(\mathbf{S}) = S_{Rr} + S_{\Theta\theta} + S_{Zz},$$

$$\begin{aligned}
I_2(\mathbf{S}) &= S_{Rr}S_{\Theta\theta} - S_{Zr}S_{Rz} + S_{Zz}(S_{Rr} + S_{\Theta\theta}) , \\
I_3(\mathbf{S}) &= S_{\Theta\theta}(S_{Rr}S_{Zz} - S_{Rz}S_{Zr})
\end{aligned} \tag{2.74}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde, Biot gerilme tansörü ile nominal gerilme tansörü arasındaki (2.28) ile verilmiş olan bağıntı kullanılarak,  $\mathbf{T}$  Biot gerilme tansörünün  $T_1, T_2, T_3$  özdeğerlerinin

$$T_2^2 = S_{\Theta\theta}^2 , \quad T_1^2 + T_3^2 = S_{Rr}^2 + S_{Rz}^2 + S_{Zr}^2 + S_{Zz}^2 , \quad T_1^2 T_3^2 = (S_{Rr}S_{Zz} - S_{Rz}S_{Zr})^2 \tag{2.75}$$

eşitliklerini sağlaması gerektiği gösterilebilir. (2.62) deformasyonu altında hem sıkışabilir hem de sıkışmaz hiperelestatik malzemeler için  $S_{\Theta r} = S_{R\theta} = S_{Z\theta} = S_{\Theta z} = 0$  olması nedeniyle,  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(R, Z, t)$  yazılabilir. Böylece, bu tezde ele alınan (2.62) deformasyonuna karşılık gelen genel hareket denklemleri

$$\frac{\partial S_{Rr}}{\partial R} + \frac{\partial S_{Zr}}{\partial Z} + \frac{1}{R}(S_{Rr} - S_{\Theta\theta}) - \rho_0 \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 0 , \tag{2.76}$$

$$\frac{\partial S_{\Theta\theta}}{\partial \Theta} = 0 , \tag{2.77}$$

$$\frac{\partial S_{Rz}}{\partial R} + \frac{\partial S_{Zz}}{\partial Z} + \frac{1}{R}S_{Rz} - \rho_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \tag{2.78}$$

formuna indirgenir. Dikkat edilirse (2.22) denklemi,  $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}$  eşitliğini verir. O zaman  $\boldsymbol{\sigma}$  Cauchy gerilme tansörünün fiziksel bileşenleri  $\mathbf{S}$  nominal gerilme tansörünün fiziksel bileşenleri cinsinden

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial R} S_{Rr} + \frac{\partial r}{\partial Z} S_{Zr} \right) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial r}{\partial R} S_{Rz} + \frac{\partial r}{\partial Z} S_{Zz} \right) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \frac{r}{R} S_{\Theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial z}{\partial R} S_{Rr} + \frac{\partial z}{\partial Z} S_{Zr} \right) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial z}{\partial R} S_{Rz} + \frac{\partial z}{\partial Z} S_{Zz} \right) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z \right]
\end{aligned} \tag{2.79}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca, bu tezde ele alınan (2.62) deformasyonu için,  $\boldsymbol{\sigma}$  Cauchy gerilme tansörünün (2.25) ile verilen simetri özelliği

$$\frac{\partial z}{\partial R} S_{Rr} - \frac{\partial r}{\partial R} S_{Rz} = \frac{\partial r}{\partial Z} S_{Zz} - \frac{\partial z}{\partial Z} S_{Zr} \tag{2.80}$$

eşitliğine indirgenir. Bu eşitliğin  $\sigma_{rz} = \sigma_{zr}$  anlamına geldiğine dikkat edilmelidir [9].

Eğer elastik tüpün yanal yüzeyi üzerine herhangi bir kuvvetin etki etmediği fakat iç yüzeyine kuvvet uygulandığı varsayılırsa, yukarıdaki gerilme sınır koşulu tüpün iç ve dış yüzeyleri için, sırasıyla,

$$S_{Rr} = -P_r , \quad S_{Rz} = -P_z \quad R = R_i \text{ için} \quad (2.81)$$

ve

$$S_{Rr} = 0 , \quad S_{Rz} = 0 \quad R = R_i + H \text{ için} \quad (2.82)$$

şeklini alır. Burada  $P_r(Z, t)$  ve  $P_z(Z, t)$  iç yüzeyin şekil değiştirmeden önceki birim alanına etkileyen kuvvetin radyal ve aksenal bileşenleridir. Benzer şekilde tüpün  $Z = L$  ucuna herhangi bir kuvvetin etki etmediği fakat  $Z = 0$  ucuna kuvvet uygulandığı varsayılırsa (2.60) gerilme sınır koşulu, tüpün  $Z = 0$  ve  $Z = L$  uçları için, sırasıyla,

$$S_{Zr} = -Q_r , \quad S_{Zz} = -Q_z \quad Z = 0 \text{ için} \quad (2.83)$$

ve

$$S_{Zr} = 0 , \quad S_{Zz} = 0 \quad Z = L \text{ için} \quad (2.84)$$

şeklini alacaktır. Burada  $Q_r(R, t)$  ve  $Q_z(R, t)$  ile  $Z = L$  ucunun şekil değiştirmeden önceki birim alanına etkileyen kuvvetin radyal ve aksenal bileşenleri gösterilmektedir.

Yukarıdaki tüpün iç yüzeyi için verilmiş sınır koşullarını bazı durumlarda normal ve teğetsel gerilme bileşenlerine bağlı olarak ifade etmek gerekebilir. Şimdi sınır koşullarının bu iki formu arasındaki bağıntı tartışılacaktır.

Şekil değiştirmiş tüpün  $t$  anındaki iç yüzeyi  $r = r(R_i, Z, t)$ ,  $z = z(R_i, Z, t)$  parametrik denklemleri ile tanımlanır. Bu durumda şekil değiştirmiş iç yüzeyin normal ve teğet birim vektörleri,  $\mathbf{n}$  ve  $\mathbf{t}$ ,

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial z}{\partial Z} \mathbf{e}_r - \frac{\partial r}{\partial Z} \mathbf{e}_z \right) , \quad \mathbf{t} = \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \mathbf{e}_r + \frac{\partial z}{\partial Z} \mathbf{e}_z \right) \quad (2.85)$$

şeklinde verilir. Burada

$$\Phi(R, Z) = \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial Z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.86)$$

tanımı yapılmıştır. Şekil değiştirmiş tüpün iç yüzeyine etkiyen kuvvetin teğet ve normal bileşenleri  $P_t(Z, t)$  ve  $P_n(Z, t)$  ile gösterilirse, şekil değiştirmiş tüpün iç ve dış yüzeylerinde tanımlı sınır koşulları, sırasıyla,

$$\sigma_n = -P_n, \quad \sigma_t = -P_t \quad R = R_i \text{ için} \quad (2.87)$$

ve

$$\sigma_n = 0, \quad \sigma_t = 0 \quad R = R_i + H \text{ için} \quad (2.88)$$

şeklinde verilir. Burada  $\sigma_n$  ve  $\sigma_t$ , Cauchy gerilmesinin (2.16) ile tanımlanmış olan normal ve teğet gerilme bileşenleridir. Eğer (2.16) tanımları kullanılır ve  $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} \equiv 0$  olduğuna dikkat edilirse,  $\sigma_n$  ve  $\sigma_t$  ifadeleri, sırasıyla,

$$\sigma_n = \frac{1}{\Phi^2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \right)^2 \sigma_{zz} + \left( \frac{\partial z}{\partial Z} \right)^2 \sigma_{rr} - \frac{\partial r}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial Z} (\sigma_{rz} + \sigma_{zr}) \right] \quad (2.89)$$

ve

$$\sigma_t = \frac{1}{\Phi^2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \right)^2 \sigma_{rz} - \left( \frac{\partial z}{\partial Z} \right)^2 \sigma_{zr} + \frac{\partial r}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial Z} (\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) \right] \quad (2.90)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca (2.79) denklemi ile verilmiş olan Cauchy gerilme tansörü ve nominal gerilme tansörü bileşenleri arasındaki bağıntı, (2.89) ve (2.90) ifadelerinde kullanılır ve (2.87) ve (2.88) koşullarında da (2.65), (2.80), (2.86) eşitlikleri kullanılırsa, şekil değiştirmiş tüpün iç ve dış yüzeylerindeki sınır koşulları bazı düzenlemelerden sonra

$$S_{Rr} = -\frac{r}{R} \left( \frac{\partial z}{\partial Z} P_n - \frac{\partial r}{\partial Z} P_t \right), \quad S_{Rz} = \frac{r}{R} \left( \frac{\partial r}{\partial Z} P_n + \frac{\partial z}{\partial Z} P_t \right) \quad R = R_i \text{ için} \quad (2.91)$$

ve

$$S_{Rr} = 0, \quad S_{Rz} = 0 \quad R = R_i + H \text{ için} \quad (2.92)$$

şeklini alır. (2.91) ve (2.92) sınır koşullarının yukarıda verilmiş (2.59) ve (2.60) sınır koşulları ile aynı olması için  $P_r$ ,  $P_z$  ve  $P_n$ ,  $P_t$  arasında

$$P_r = -\frac{r}{R} \left( \frac{\partial z}{\partial Z} P_n - \frac{\partial r}{\partial Z} P_t \right), \quad P_z = \frac{r}{R} \left( \frac{\partial r}{\partial Z} P_n + \frac{\partial z}{\partial Z} P_t \right) \quad (2.93)$$

bağıntıları sağlanmalıdır.

## 2.4 Virtüel İş İlkesi

Altbölüm 2.3'te elastik bir tüpün aksenal simetrik deformasyonunu yöneten hareket denklemleri ve sınır koşulları türetilmişti. Bu alt bölümde ise hareket denklemleri ve sınır koşulları bir varyasyonel ilke yardımıyla, yani virtüel iş ilkesine karşılık gelen Euler-Lagrange denklemleri olarak türetilecektir.

(2.59) sınır koşulunu sağlayan  $\boldsymbol{\chi}$  vektör alanı bir kinematik olarak kabul edilebilir deformasyon olarak adlandırılacaktır. Bu şekilde tanımlanmış iki deformasyon arasındaki fark virtüel yerdeğiştirme olarak nitelenir ve  $\delta\boldsymbol{\chi}$  ile gösterilir. Böylece tanım gereği virtüel yerdeğiştirmelerin

$$\delta\boldsymbol{\chi} = \mathbf{0} \quad \partial\mathcal{B}_0^d \text{ üzerinde} \quad (2.94)$$

koşulunu sağlaması gerektiği çıkar. Virtüel iş ilkesinin maddesel koordinatlardaki formu virtüel yerdeğiştirmelere bağlı olarak [12]'de (sayfa 385, (8.42) numaralı denklem)

$$\int_{\mathcal{B}_0} \text{tr}\{\mathbf{S}(\text{Grad } \delta\boldsymbol{\chi})\}dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0\ddot{\boldsymbol{\chi}} \cdot \delta\boldsymbol{\chi}dV - \int_{\partial\mathcal{B}_0^s} \boldsymbol{\tau} \cdot \delta\boldsymbol{\chi}dA = 0 \quad (2.95)$$

şeklinde verilmiştir. Bu ilkenin statik hale karşılık gelen formu [1]'de (sayfa 307, (5.4.10) numaralı denklem) verilmiştir. Virtüel iş ilkesi cisimde yapılan virtüel işin sınır kuvvetlerinin virtüel yerdeğiştirme sonucu yaptıkları işe eşit olduğunu belirtir. Bazı hesaplamalardan sonra (2.95) denklemini

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\text{Div } \mathbf{S} - \rho_0\ddot{\boldsymbol{\chi}}) \cdot \delta\boldsymbol{\chi}dV - \int_{\partial\mathcal{B}_0^s} (\mathbf{S}^T\mathbf{N} - \boldsymbol{\tau}) \cdot \delta\boldsymbol{\chi}dA = 0 \quad (2.96)$$

şeklinde yazmak mümkündür [1]. Böylece hareket denklemini ve sınır koşulunu sağlayan bir  $\mathbf{S}$  için bu denklem sağlanacaktır.

$\boldsymbol{\chi}$  deformasyonunun (2.62) aksenal simetrik deformasyonu ile verilmesi halinde,  $\mathbf{x}$  yer vektörü

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \quad (2.97)$$

şeklinde verilir. Eğer virtüel yer değiştirmenin radyal ve aksenal yönlerdeki bileşenleri sırasıyla  $\delta r(R, Z, t)$  ve  $\delta z(R, Z, t)$  ile gösterilirse,  $\delta\boldsymbol{\chi}(R, Z, t)$  virtüel

yerdeğiştirmesi

$$\delta\boldsymbol{\chi} = \delta r \mathbf{e}_r + r \delta\theta \mathbf{e}_\theta + \delta z \mathbf{e}_z \quad (2.98)$$

ile verilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \text{Grad } \delta\boldsymbol{\chi} &= \frac{\partial(\delta r)}{\partial R} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_R - \frac{r}{R} \delta\theta \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_\Theta + \frac{\partial(\delta r)}{\partial Z} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_Z \\ &+ \left( \frac{\partial r}{\partial R} \delta\theta + r \frac{\partial(\delta\theta)}{\partial R} \right) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_R + \frac{\delta r}{R} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_\Theta \\ &+ \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \delta\theta + r \frac{\partial(\delta\theta)}{\partial Z} \right) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_Z + \frac{\partial(\delta z)}{\partial R} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_R + \frac{\partial(\delta z)}{\partial Z} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_Z, \end{aligned} \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\text{Grad } \delta\boldsymbol{\chi}) &= \left( S_{Rr} \frac{\partial(\delta r)}{\partial R} + S_{Rz} \frac{\partial(\delta z)}{\partial R} \right) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_R - \frac{r}{R} S_{Rr} \delta\theta \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_\Theta \\ &+ \left( S_{Rr} \frac{\partial(\delta r)}{\partial Z} + S_{Rz} \frac{\partial(\delta z)}{\partial Z} \right) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_Z \\ &+ \left( \frac{\partial r}{\partial R} \delta\theta + r \frac{\partial(\delta\theta)}{\partial R} \right) S_{\Theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_R + \frac{\delta r}{R} S_{\Theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_\Theta \\ &+ \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \delta\theta + r \frac{\partial(\delta\theta)}{\partial Z} \right) S_{\Theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_Z \\ &+ \left( S_{Zr} \frac{\partial(\delta r)}{\partial R} + S_{Zz} \frac{\partial(\delta z)}{\partial R} \right) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_R - \frac{r}{R} S_{Zr} \delta\theta \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_\Theta \\ &+ \left( S_{Zr} \frac{\partial(\delta r)}{\partial Z} + S_{Zz} \frac{\partial(\delta z)}{\partial Z} \right) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_Z, \end{aligned} \quad (2.100)$$

ve

$$\ddot{\boldsymbol{\chi}} \cdot \delta\boldsymbol{\chi} = \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \delta r + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \delta z \quad (2.101)$$

olup, (2.95) virtüel iş ilkesi silindirik koordinatlarda

$$\begin{aligned} 2\pi \left\{ \int_{R_i}^{R_i+H} \int_0^L \left[ S_{Rr} \frac{\partial(\delta r)}{\partial R} + S_{Rz} \frac{\partial(\delta z)}{\partial R} + S_{\Theta\theta} \frac{\delta r}{R} + S_{Zr} \frac{\partial(\delta r)}{\partial Z} + S_{Zz} \frac{\partial(\delta z)}{\partial Z} \right. \right. \\ \left. \left. + \rho_0 \left( \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \delta r + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \delta z \right) \right] R dZ dR \right. \\ \left. - R_i \int_0^L (P_r \delta r + P_z \delta z) \Big|_{R=R_i} dZ - \int_{R_i}^{R_i+H} (Q_r \delta r + Q_z \delta z) \Big|_{Z=0} R dR \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.102)$$

şeklini alır. Eğer  $R$  ve  $Z$  değişkenlerine göre ayrı ayrı kısmi integrasyon gerçekleştirilirse, (2.102) denklemi



$$\begin{aligned}
& - \int_0^L \int_{R_i}^{R_i+H} \left[ \left( \frac{\partial S_{Rr}}{\partial R} + \frac{1}{R} S_{Rr} - \frac{1}{R} S_{\Theta\theta} + \frac{\partial S_{Zr}}{\partial Z} - \rho_0 \ddot{r} \right) \delta r \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \left( \frac{\partial S_{Rz}}{\partial R} + \frac{1}{R} S_{Rz} + \frac{\partial S_{Zz}}{\partial Z} - \rho_0 \ddot{z} \right) \delta z \right] R dR dZ \\
& + \int_0^L \left\{ (R_i + H) (S_{Rr} \delta r + S_{Rz} \delta z) \Big|_{R=R_i+H} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - R_i [(S_{Rr} + P_r) \delta r + (S_{Rz} + P_z) \delta z] \Big|_{R=R_i} \right\} dZ \\
& + \int_{R_i}^{R_i+H} \left\{ (S_{Zr} \delta r + S_{Zz} \delta z) \Big|_{Z=L} - [(S_{Rz} + Q_r) \delta r + (S_{Zz} + Q_z) \delta z] \Big|_{Z=0} \right\} R dR \\
& = 0 \tag{2.103}
\end{aligned}$$

şeklini alır. Eğer  $\delta r$  ve  $\delta z$  virtüel yerdeğiştirmelerinin silindirik tüpün işgal ettiği bölgenin hem içinde hem sınırında birbirlerinden bağımsız olduklarına dikkat edilirse, bu denklemin özdeş olarak sağlanmasının ancak her bir integralde  $\delta r$  ve  $\delta z$  keyfi yerdeğiştirmelerinin katsayılarının sıfır olması ile mümkün olduğu sonucu çıkar. Buna göre (2.103) denkleminin birinci integralinden (2.76) ve (2.78) hareket denklemleri, ikinci integralinden tüpün iç ve dış yüzeyine ait (2.81) ve (2.82) sınır koşulları ve son olarak üçüncü integralden tüpün  $Z = 0$  ve  $Z = L$  uçlarına ait (2.83) ve (2.84) sınır koşulları elde edilecektir.

### 3. NONLİNEER ELASTİK MAMBRAN TÜPLER İÇİN VİRTÜEL İŞ İLKESİ

#### 3.1 Giriş

Bu bölümde, bir hiperelastik membran tüpe karşılık gelen virtüel iş ilkesi türetilecektir. Bu amaca ulaşmak için, homojen izotrop genel bir malzemedan yapılmış membran tüplerin aksenal simetrik hareketlerini yöneten membran denklemleri bir asimptotik açılım tekniği yardımıyla elde edilecektir. Asimptotik açılım tekniği yardımı ile membran denklemlerinin elde edilmesi [9]'da da tartışılmış olup, şimdiki çalışmanın tek farkı asimptotik açılımın virtüel iş ilkesi üzerine inşa edilmesi ve sonuçta membran teorisine karşılık gelen virtüel iş ilkesine kendiliğinden ulaşılmasıdır.

Alt bölüm 3.2'de boyutsuz büyüklükler tanıtılmış ve bir küçük kalınlık parametresine bağlı olarak tüm alan değişkenleri ölçeklenmiştir. Alt bölüm 3.3'te boyutsuzlaştırma ve ölçeklemeden sonra denklemlerin aldığı yeni formlar sunulmuştur. Alt bölüm 3.4'te sıkışmaz hiperelastik malzemedan yapılmış bir ince tüp için şekil değiştirmiş konumu veren radyal ve aksenal koordinatlar, yüzey kuvvetleri ve gerilmeler kalınlık parametresi cinsinden formel kuvvet serilerine açılmıştır. Alan değişkenleri üzerine herhangi bir ek kısıtlama getirmeksizin, sıfıncı mertebe yaklaşımın literatürde daha önce sunulmuş membran denklemlerini verdiği gösterilmiştir. Ayrıca sıfıncı mertebe yaklaşıma karşılık gelen virtüel iş ilkesi ifade edilmiştir. Alt bölüm 3.5'te ise benzer bir analiz, sıkışabilir malzemedan yapılmış ince bir tüp için sunulmuştur.

### 3.2 Boyutsuzlaştırma ve Ölçekleme

(2.61) ile tanımlanmış homojen izotrop hiperelastik malzemedan yapılmış içi boş dairesel silindirik tüpün dış yüzeyinin gerilmemiş, iç yüzeyinin hem teğet hem de normal yönde gerilmelere tabi olduğu varsayılmaktadır. (2.62) ile verilen şekil değişiminin aksenal simetrik olabilmesi için yüzey gerilmelerinin aksenal yönde değişebilir ancak çevresel yönde değişemez olması gerekmektedir. Şekil değiştirmiş tüpün iç yüzeyi  $rz$  düzleminde verilmiş bir eğrinin  $z$  eksenini etrafında döndürülmesi ile elde edilebilir. Ancak bu eğrinin  $z$  eksenini kesmediği varsayılmıştır.

Bu alt bölümde boyutsuz koordinatlar tanımlanacak ve bilinmeyenler ile sınır yükleri uygun bir kalınlık parametresinin belirli kuvvetleri ile ölçeklenecektir. Kalınlık parametresi  $\varepsilon = H/R_i$  şeklinde tanımlansın. Tüpün ince olduğu varsayımı nedeniyle  $\varepsilon \ll 1$  olacağı açıktır. Şimdi şekil değiştirmemiş konumdaki koordinatlar  $\bar{R}, \bar{Z}$

$$R = R_i(1 + \varepsilon\bar{R}), \quad Z = R_i\bar{Z} \quad (3.1)$$

şeklinde, ve şekil değiştirmiş konumdaki boyutsuz koordinatlar  $\bar{r}, \bar{z}$

$$r(R, Z) = R_i\bar{r}(\bar{R}, \bar{Z}), \quad z(R, Z) = R_i\bar{z}(\bar{R}, \bar{Z}) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca, boyutsuz zaman  $\bar{t}$

$$t = \left(\frac{\rho_0}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} R_i\bar{t} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlansın. Böylece şekil değiştirmemiş konumdaki ince tüpün işgal ettiği bölge  $\varepsilon$  parametresinden bağımsız, karşılaştırılabilir boyutlardaki bir bölgeye dönüştürülmüş olur. Böyle bir dönüşüm alan denklemlerini  $\varepsilon$  kalınlık parametresine bağladığı için, üç boyutlu problemin çözümü  $\bar{R}, \bar{Z}$  ve  $\bar{t}$  dışında  $\varepsilon$  parametresine de bağlı olacaktır. Bu durumda boyutsuz koordinatlarda tanımlanmış problemin çözümünün  $\varepsilon$  parametresine göre bir açılımının olduğu varsayılabilir. Yani tüm alan değişkenleri tüpün beklenen davranışını yansıtacak şekilde boyutsuz koordinatlarda  $\varepsilon$  parametresinin uygun bir kuvvetine göre

ölçeklenecek ve buradan, başka hiç bir varsayımda bulunulmadan, nonlinear elastik mambran tüp için uygun bir asimptotik teori geliştirilecektir. Önce  $\bar{P}_t$  ve  $\bar{P}_n$  boyutsuzlaştırılmış teğet ve normal gerilmeleri,  $\mu$  gerilme boyutunda bir çarpan olmak üzere,

$$P_t = \mu\varepsilon\bar{P}_t, \quad P_n = \mu\varepsilon\bar{P}_n \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlansın.  $\mathbf{S}$  nominal gerilme tansörünün bileşenleri de,  $S_{Rr}$  ve  $S_{Rz}$  bileşenlerinin (2.91) sınır koşullarının en küçük merteye yaklaşımında bulunması gerektiği göz önünde tutularak,

$$S_{Rr} = \mu\varepsilon\bar{S}_{Rr}, \quad S_{Rz} = \mu\varepsilon\bar{S}_{Rz}, \quad S_{Zr} = \mu\bar{S}_{Zr}, \quad S_{Zz} = \mu\bar{S}_{Zz}, \quad S_{\Theta\Theta} = \mu\bar{S}_{\Theta\Theta} \quad (3.5)$$

şeklinde ölçeklenir. Benzer şekilde boyutsuzlaştırılmış şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu  $\bar{W}$ , boyutsuz Biot gerilme tansörü asal bileşenleri  $\bar{T}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ve boyutsuz hidrostatik basınç  $\bar{p}$ ,

$$W = \mu\bar{W}, \quad T_k = \mu\bar{T}_k ; (k = 1, 2, 3), \quad p = \mu\bar{p} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır [9].

### 3.3 Boyutsuzlaştırılmış ve Ölçeklenmiş Problem

Bu alt bölümde, önceki bölümde sunulan denklemler (3.1)-(3.6) tanımları kullanılarak ve yazım kolaylığı için boyutsuz büyüklüklerdeki çizgiler kullanılmayarak yeniden kısaca yazılacaktır. (2.65) denklemi ile verilen Jakobiyan boyutsuz koordinatlarda

$$J = \frac{r}{1 + \varepsilon R} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial r}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial R} \right) \right] \quad (3.7)$$

formunu alır. (2.67) matrisi ile tanımlanan  $\mathbf{C}$  Cauchy-Green şekil değiştirme tansörünün ölçeklenmiş formu ise

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial R} \right)^2 \right] & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} \right] \\ 0 & \left( \frac{r}{1 + \varepsilon R} \right)^2 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} \right] & 0 & \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial Z} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

şeklinde verilir. Ayrıca (2.68) ve (2.69) denklemleri ile verilen  $\Lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) asal germeleri ve  $I_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) asal değişmezleri boyutsuz koordinatlarda, sırasıyla,

$$\begin{aligned}\Lambda_2^2 &= \left( \frac{r}{1 + \varepsilon R} \right)^2, \\ \Lambda_1^2 + \Lambda_3^2 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial R} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial Z} \right)^2, \\ \Lambda_1^2 \Lambda_3^2 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial r}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial R} \right)^2\end{aligned}\quad (3.9)$$

ve

$$\begin{aligned}I_1(\mathbf{C}) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial R} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{r}{1 + \varepsilon R} \right)^2, \\ I_2(\mathbf{C}) &= \left( \frac{r}{1 + \varepsilon R} \right)^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial R} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial Z} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial r}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial R} \right)^2, \\ I_3(\mathbf{C}) &= \left( \frac{r}{1 + \varepsilon R} \right)^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial r}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial R} \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (3.10)$$

formunu alır. Sıkışabilir hiperelastik malzeme için yazılmış ve (2.70) denklemleri ile verilen nominal gerilme tansörünün sıfır olmayan bileşenleri boyutsuz koordinatlarda

$$\begin{aligned}S_{Rr} &= 2 \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Rr} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial W}{\partial I_3} \left( \frac{r}{1 + \varepsilon R} \right)^2 \frac{\partial z}{\partial Z} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} \right) \right], \\ S_{Rz} &= 2 \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial z}{\partial R} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Rz} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial W}{\partial I_3} \left( \frac{r}{1 + \varepsilon R} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial Z} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} \right) \right], \\ S_{\Theta\theta} &= 2 \left( \frac{r}{1 + \varepsilon R} \right) \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{\Theta\theta} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial W}{\partial I_3} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} \right)^2 \right], \\ S_{Zr} &= 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Zr} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial W}{\partial I_3} \left( \frac{r}{1 + \varepsilon R} \right)^2 \frac{\partial z}{\partial R} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} \right) \right], \\ S_{Zz} &= 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial z}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Zz} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial W}{\partial I_3} \left( \frac{r}{1 + \varepsilon R} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial R} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} \right) \right]\end{aligned}\quad (3.11)$$

formunda verilir. Burada

$$K_{Rr} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial r}{\partial R} \left[ \left( \frac{r}{1 + \varepsilon R} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial Z} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial r}{\partial Z} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} \right), \\
K_{Rz} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial z}{\partial R} \left[ \left( \frac{r}{1 + \varepsilon R} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial Z} \right)^2 \right] \\
& -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial z}{\partial Z} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} \right), \\
K_{\Theta\theta} &= \left( \frac{\partial r}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial Z} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial R} \right)^2 \right], \\
K_{Zr} &= \frac{\partial r}{\partial Z} \left[ \left( \frac{r}{1 + \varepsilon R} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial R} \right)^2 \right] \right] \\
& -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial r}{\partial R} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} \right), \\
K_{Zz} &= \frac{\partial z}{\partial Z} \left[ \left( \frac{r}{1 + \varepsilon R} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial R} \right)^2 \right] \right] \\
& -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial z}{\partial R} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} \right) \tag{3.12}
\end{aligned}$$

gösterimi kullanılmıştır. Benzer şekilde sıkışmaz hiperelastik malzeme için yazılmış ve (2.72) denklemleri ile verilen nominal gerilme tansörünün sıfır olmayan bileşenleri boyutsuz koordinatlarda

$$\begin{aligned}
S_{Rr} &= 2 \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Rr} \right) - \frac{p}{\varepsilon} \frac{r}{1 + \varepsilon R} \frac{\partial z}{\partial Z}, \\
S_{Rz} &= 2 \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial z}{\partial R} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Rz} \right) + \frac{p}{\varepsilon} \frac{r}{1 + \varepsilon R} \frac{\partial r}{\partial Z}, \\
S_{\Theta\theta} &= 2 \frac{r}{1 + \varepsilon R} \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{\Theta\theta} \right) - \frac{p}{\varepsilon} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial r}{\partial Z} \right), \\
S_{Zr} &= 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Zr} \right) + \frac{p}{\varepsilon} \frac{r}{1 + \varepsilon R} \frac{\partial z}{\partial R}, \\
S_{Zz} &= 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial z}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial I_2} K_{Zz} \right) - \frac{p}{\varepsilon} \frac{r}{1 + \varepsilon R} \frac{\partial r}{\partial R} \tag{3.13}
\end{aligned}$$

formunda verilir. Burada  $K_{Rr}, K_{Rz}, \dots, K_{Zz}$  ifadeleri (3.12) denklemleri ile verildiği gibidir [9].

Eğer virtüel yerdeğiştirmeler için boyutsuzlaştırmamızın (3.2) denkleminde olduğu gibi yapıldığı varsayılırsa, (2.102) denkleminde verilmiş olan virtüel iş ilkesi

boyutsuz koordinatlarda

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \left\{ \int_0^1 \int_0^L \left[ S_{Rr} \frac{\partial(\delta r)}{\partial R} + S_{Rz} \frac{\partial(\delta z)}{\partial R} + S_{\Theta\theta} \frac{\delta r}{1 + \varepsilon R} + S_{Zr} \frac{\partial(\delta r)}{\partial Z} + S_{Zz} \frac{\partial(\delta z)}{\partial Z} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left( \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \delta r + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \delta z \right) \right] (1 + \varepsilon R) dZ dR \right. \\
& \quad \left. - \int_0^L (P_r \delta r + P_z \delta z) \Big|_{R=0} dZ - \int_0^1 (Q_r \delta r + Q_z \delta z) \Big|_{Z=0} (1 + \varepsilon R) dR \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca (2.91) denklemleri boyutsuz koordinatlarda

$$P_r = \frac{r}{1 + \varepsilon R} \left( \frac{\partial r}{\partial Z} P_t - \frac{\partial z}{\partial Z} P_n \right), \quad P_z = \frac{r}{1 + \varepsilon R} \left( \frac{\partial z}{\partial Z} P_t + \frac{\partial r}{\partial Z} P_n \right) \tag{3.15}$$

şeklini alır. Sınır koşulları formlarını koruduğu için burada yeniden yazılmayacaktır.

Son olarak, Biot asal gerilmeleri ve nominal gerilme tansörü bileşenleri arasındaki (2.75) bağıntıları boyutsuz koordinatlarda

$$T_2^2 = S_{\Theta\theta}^2, \quad T_1^2 + T_3^2 = S_{Zr}^2 + S_{Zz}^2 + \varepsilon^2 (S_{Rr}^2 + S_{Rz}^2), \quad T_1^2 T_3^2 = \varepsilon^2 (S_{Rr} S_{Zz} - S_{Rz} S_{Zr})^2 \tag{3.16}$$

şeklini alır.

### 3.4 Asimptotik Açılım: Sıkışmaz Malzeme

Ele alınan üç boyutlu problemin boyutsuzlaştırılmış temel denklemleri  $\varepsilon$  parametresine bağlı olarak yazıldığı için, şekil değiştirmiş durumdaki  $r$  radyal koordinatı,  $z$  eksenel koordinatı,  $\mathbf{S}$  nominal gerilme tansörü,  $p$  hidrostatik basıncı ve  $\delta r$  ve  $\delta z$  virtüel yerdeğişmelerinin

$$r(R, Z, t) = r^{(0)}(R, Z, t) + \varepsilon r^{(1)}(R, Z, t) + \dots \tag{3.17}$$

$$z(R, Z, t) = z^{(0)}(R, Z, t) + \varepsilon z^{(1)}(R, Z, t) + \dots \tag{3.18}$$

$$\mathbf{S}(R, Z, t) = \mathbf{S}^{(0)}(R, Z, t) + \varepsilon \mathbf{S}^{(1)}(R, Z, t) + \dots \tag{3.19}$$

$$p(R, Z, t) = p^{(0)}(Z, R, t) + \varepsilon p^{(1)}(R, Z, t) + \dots \tag{3.20}$$

$$\delta r(R, Z, t) = (\delta r)^{(0)}(R, Z, t) + \varepsilon(\delta r)^{(1)}(R, Z, t) + \dots \quad (3.21)$$

$$\delta z(R, Z, t) = (\delta z)^{(0)}(R, Z, t) + \varepsilon(\delta z)^{(1)}(R, Z, t) + \dots \quad (3.22)$$

şeklinde  $\varepsilon$  parametresinin kuvvetlerine açıldığı varsayılacaktır. (3.1)-(3.6) tanımlarıyla verilen ölçekleme ve (3.17)-(3.22) şeklinde yazılan açılım bu bölümün temel varsayımlarıdır ve asimptotik açılım başka hiç bir varsayımda bulunulmadan geliştirilecektir. (3.17)-(3.22) şeklinde verilen asimptotik açılım boyutsuz formda yazılmış temel denklemlerde yazılır ve  $\varepsilon$  parametresinin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse,  $\varepsilon$  parametresinin her mertebesi için karşılık gelen bir temel denklemler hiyerarşisi meydana gelir. Aşağıda asimptotik açılımın sıfırıncı mertebeye karşılık gelen denklemleri detaylı olarak incelenecektir. Bu tezin konusu olan analizde daha yüksek mertebeden terimler yer almayacaktır.

(3.17) ve (3.18) açılımları (3.8) ile verilen Cauchy-Green şekil değiştirme tansöründe yazılır ve Cauchy-Green şekil değiştirme tansörünün bileşenlerinin  $\varepsilon$  sıfıra giderken limiti alınır, sonlu limitlere sahip olma koşulundan

$$\left(\frac{\partial r^{(0)}}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^{(0)}}{\partial R}\right)^2 = 0, \quad \frac{\partial r^{(0)}}{\partial R} \frac{\partial r^{(0)}}{\partial Z} + \frac{\partial z^{(0)}}{\partial R} \frac{\partial z^{(0)}}{\partial Z} = 0 \quad (3.23)$$

sonuçları elde edilir. İlk denklem,  $r^{(0)}$  ve  $z^{(0)}$  değişkenlerinin  $R$  değişkenine göre türevlerinin sıfır olması gerektiğini, yani

$$\frac{\partial r^{(0)}}{\partial R} \equiv 0, \quad \frac{\partial z^{(0)}}{\partial R} \equiv 0 \quad (3.24)$$

olduğunu söyler. Bu durumda ikinci denklem özdeş olarak sağlanır. İlerideki analizde yazım kolaylığı sağlaması amacı ile

$$r^{(0)} = g(Z, t), \quad z^{(0)} = f(Z, t) . \quad (3.25)$$

gösterimleri kullanılacaktır. (3.17)-(3.22) açılımları temel denklemlerin boyutsuz formlarında yazılırsa, sırasıyla, (2.86), (3.7), (3.9), (3.10) ve (3.16) denklemleriyle verilen,  $\Phi$  fonksiyonu, Jakobiyen  $J$ ,  $\Lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) germe oranları,  $I_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) asal değişmezleri,  $T_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) Biot asal gerilmeleri ve şekil değiştirme enerjisi



fonksiyonu  $W$ ,  $\varepsilon$  parameresinin kuvvet serisi olarak

$$\Phi(R, Z, t) = \phi(Z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.26)$$

$$J = j + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.27)$$

$$\Lambda_k = \lambda_k + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3.28)$$

$$I_k = i_k + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3.29)$$

$$T_k = T_k^{(0)} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3.30)$$

$$W = w + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3.31)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\Phi$  fonksiyonunun sıfıncı merteye yaklaşımı,  $\phi$ ,

$$\phi = \left[ (f')^2 + (g')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

şeklinde ve sıfıncı merteye Jakobiyen  $j$

$$j = g \left( f' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} - g' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) \quad (3.33)$$

şeklinde verilir. Sıfıncı merteye asal germe oranları  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3$ )

$$\lambda_2^2 = g^2, \quad \lambda_1^2 + \lambda_3^2 = \phi^2 + \left( \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right)^2, \quad \lambda_1^2 \lambda_3^2 = \left( f' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} - g' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right)^2 \quad (3.34)$$

ve sıfıncı merteye asal değişmezler  $i_k$  ( $k = 1, 2, 3$ )

$$\begin{aligned} i_1 &= g^2 + \phi^2 + \left( \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right)^2, \\ i_2 &= \frac{1}{g^2} + g^2 \left[ \phi^2 + \left( \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right)^2 \right], \\ i_3 &= g^2 \left( f' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} - g' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

eşitliklerini sağlar. Sıfıncı merteye Biot asal gerilmeleri

$$T_1^{(0)} = \sqrt{(S_{Zr}^{(0)})^2 + (S_{Zz}^{(0)})^2}, \quad T_2^{(0)} = S_{\Theta\theta}^{(0)}, \quad T_3^{(0)} = 0 \quad (3.36)$$

ve sıfıncı merteye şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu

$$w = w(i_1, i_2, i_3) \quad (3.37)$$

şeklindedir.  $i_3 = j^2$  olduğu göz önüne alınırsa  $J = 1$  sıkışmazlık koşulu, sıfıncı mertebe yaklaşımda  $j = 1$  (yani  $i_3 = 1$ ) formunu alır. (3.33) denkleminde yararlanılarak sıkışmazlık koşulu

$$\left( f' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} - g' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) = \frac{1}{g} \quad (3.38)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Eksenel simetri nedeniyle şekil değiştirmiş tüpün iç yüzeyi  $rz$  düzleminde verilmiş bir eğrinin  $z$  eksenini etrafında döndürülmesi ile elde edilebilir. Ancak bu eğrinin  $z$  eksenini kesmediği, yani  $g \neq 0$  olduğu varsayılmıştır [9].

(3.17)-(3.22) açılımları (3.15) ifadelerinde ve (3.14) integralinde yazılırsa integralin açılımının sıfıncı mertebe yaklaşımı

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^L \left\{ S_{Rr}^{(0)} \frac{\partial(\delta r)^{(0)}}{\partial R} + S_{Rz}^{(0)} \frac{\partial(\delta z)^{(0)}}{\partial R} + S_{\Theta\theta}^{(0)} (\delta r)^{(0)} + S_{Zr}^{(0)} \frac{\partial(\delta r)^{(0)}}{\partial Z} + S_{Zz}^{(0)} \frac{\partial(\delta z)^{(0)}}{\partial Z} \right. \\ & \quad \left. + \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (\delta r)^{(0)} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (\delta z)^{(0)} \right] \right\} dZ dR \\ & - \int_0^L \left[ P_r (\delta r)^{(0)} + P_z (\delta z)^{(0)} \right] \Big|_{R=0} dZ - \int_0^1 \left[ Q_r (\delta r)^{(0)} + Q_z (\delta z)^{(0)} \right] \Big|_{Z=0} dR = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

şeklinde olur. Yukarıdaki (3.39) integrali ile verilen sıfıncı mertebe virtüel işin Euler-Lagrange denklemleri

$$\frac{\partial S_{Rr}^{(0)}}{\partial R} + \frac{\partial S_{Zr}^{(0)}}{\partial Z} - S_{\Theta\theta}^{(0)} = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial S_{Rz}^{(0)}}{\partial R} + \frac{\partial S_{Zz}^{(0)}}{\partial Z} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (3.40)$$

$$S_{Rr}^{(0)} = g(g' P_t - f' P_n), \quad S_{Rz}^{(0)} = g(f' P_t + g' P_n) \quad R = 0 \text{ için}, \quad (3.41)$$

$$S_{Zr}^{(0)} = -Q_r, \quad S_{Zz}^{(0)} = -Q_z \quad Z = 0 \text{ için}, \quad (3.42)$$

$$S_{Rr}^{(0)} = 0, \quad S_{Rz}^{(0)} = 0 \quad R = 1 \text{ için}, \quad (3.43)$$

$$S_{Zr}^{(0)} = 0, \quad S_{Zz}^{(0)} = 0 \quad Z = L \text{ için} \quad (3.44)$$

şeklinde verilir.

Sıfıncı mertebe yaklaşıma karşılık gelen bünye denkleminin yazılabilmesi için önce şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun asal değişmezlere göre türevlerinin,

$\frac{\partial W}{\partial I_l}$  ( $l = 1, 2$ ), açılımının yapılması gerekmektedir. Bu amaçla, genel bir  $F(I_1(\varepsilon), I_2(\varepsilon), I_3(\varepsilon))$  fonksiyonunun Taylor açılımı

$$F(I_1(\varepsilon), I_2(\varepsilon), I_3(\varepsilon)) = F(I_1, I_2, I_3) |_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.45)$$

şeklinde yazılsın. Sıkışmaz hiperelastik tüp için (3.29) eşitliğinden

$$I_1 |_{\varepsilon=0} = i_1, \quad I_2 |_{\varepsilon=0} = i_2, \quad I_3 |_{\varepsilon=0} = 1 \quad (3.46)$$

yazılabildiği için şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun asal değişmezlere göre türevleri,  $\frac{\partial W}{\partial I_l}$  ( $l = 1, 2$ ),

$$\frac{\partial W}{\partial I_l} = \frac{\partial W}{\partial I_l} \Big|_{I_k=i_k} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad l = 1, 2, \quad k = 1, 2 \quad (3.47)$$

şeklinde yazılabilir. Yazımda kolaylık olması açısından

$$W_l = \frac{\partial W}{\partial I_l} \Big|_{I_k=i_k}, \quad l = 1, 2, \quad k = 1, 2 \quad (3.48)$$

tanımları yapılsın. Yukarıdaki denklemler, (3.13) eşitliklerinde yazılırsa

$$S_{\Theta\Theta}^{(0)} = 2g \left[ W_1 + W_2 \left[ \phi^2 + \left( \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right)^2 \right] \right] - \frac{1}{g} p^{(0)}, \quad (3.49)$$

$$S_{Zr}^{(0)} = 2g'W_1 - 2W_2 \left[ \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} \left( g' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + f' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) - g' \left[ g^2 + \left( \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right)^2 \right] \right] + gp^{(0)} \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R}, \quad (3.50)$$

$$S_{Zz}^{(0)} = 2f'W_1 - 2W_2 \left[ \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \left( g' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + f' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) - f' \left[ g^2 + \left( \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right)^2 \right] \right] - gp^{(0)} \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} \quad (3.51)$$

şeklinde sıfıncı merteye bünye bağıntıları elde edilir. Ayrıca nominal gerilme tansörünün açılımında  $S_{Rr}$  ve  $S_{Rz}$  terimleri  $\varepsilon$  parametresinin negatif kuvvetlerini içermesi ve açılımın formunun (3.19) şeklinde verilmiş olması nedeniyle  $S_{Rr}^{(-1)} = 0$  ve  $S_{Rz}^{(-1)} = 0$  şeklinde kısıtlar ortaya çıkar. Bu kısıtlar, sırasıyla,

$$W_1 \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + W_2 \left[ (g^2 + \phi^2) \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} - g' \left( g' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + f' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) \right] - \frac{1}{2} f' gp^{(0)} = 0, \quad (3.52)$$

ve

$$W_1 \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} + W_2 \left[ (g^2 + \phi^2) \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} - f' \left( g' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + f' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) \right] + \frac{1}{2} g' g p^{(0)} = 0 \quad (3.53)$$

denklemlerini verir. Bu denklemler  $f'$  ve  $g'$  fonksiyonlarıyla çarpılıp, elde edilen denklemler toplanıp çıkartılırsa,

$$\left( g' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + f' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) \left[ W_2 \left( f' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} - g' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) - \frac{1}{2} g p^{(0)} \right] = 0, \quad (3.54)$$

ve

$$\left( f' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} - g' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) \left[ W_1 + W_2 (g^2 + \phi^2) \right] - \frac{1}{2} g \phi^2 p^{(0)} = 0 \quad (3.55)$$

denklemleri elde edilir. (3.38) sıkışmazlık koşulu ve (3.54) ve (3.55) koşulları  $\frac{\partial r^{(1)}}{\partial R}$ ,  $\frac{\partial z^{(1)}}{\partial R}$  ve  $p^{(0)}$  fonksiyonlarının belirlenmesi için yeterli bağıntılardır. Bu denklemleri çözmek için (3.38) sıkışmazlık koşulu (3.55) denkleminde yazılırsa

$$p^{(0)} = \frac{2}{g^2 \phi^2} \left[ W_1 + W_2 (g^2 + \phi^2) \right] \quad (3.56)$$

elde edilir. Bu sonuç ve (3.38) sıkışmazlık koşulu da (3.54) denkleminde yazılırsa

$$\frac{1}{g \phi^2} \left( g' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + f' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) (W_1 + W_2 g^2) = 0 \quad (3.57)$$

elde edilir. (3.57) denklemi,

$$W_1 + W_2 g^2 = 0 \quad (3.58)$$

veya

$$g' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + f' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} = 0 \quad (3.59)$$

denklemlerinden birinin sağlanması halinde sağlanır.  $W$  fonksiyonunun asal değişmezlerin keyfi bir fonksiyonu olduğu varsayıldığı için, (3.59) denklemi sağlanması gereken denklemdir. Bu durumda şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu üzerine herhangi bir kısıt getirilmemiş olur. Böylece (3.59) kısıtı ve (3.38) koşulu

$$\frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} = \frac{f'}{g \phi^2}, \quad \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} = -\frac{g'}{g \phi^2} \quad (3.60)$$

sonuçlarını verir. Buna göre şekil değiştirmiş radyal ve eksenel koordinatların birinci merteye yaklaşımlarının kendileri değil ama  $R$  değişkenine göre türevleri, boyutsuz Lagrangeyen radyal koordinat  $R$ 'den bağımsızdır [9].

Eğer (3.60) sonuçları (3.34) ve (3.35) denklemlerinde yazılırsa, sıfıncı mertebeye germe oranları ve sıfıncı mertebeye asal değişmezler, sırasıyla,

$$\lambda_2^2 = g^2, \quad \lambda_1^2 + \lambda_3^2 = \phi^2 + \frac{1}{g^2\phi^2}, \quad \lambda_1^2\lambda_3^2 = \frac{1}{g^2} \quad (3.61)$$

ve

$$i_1 = \phi^2 + g^2 + \frac{1}{g^2\phi^2}, \quad i_2 = \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{g^2} + g^2\phi^2, \quad i_3 = 1 \quad (3.62)$$

şekilde elde edilir. Bu durumda (3.61) eşitlikleri

$$\lambda_1 = \phi, \quad \lambda_2 = g, \quad \lambda_3 = \frac{1}{g\phi} \quad (3.63)$$

denklemlerini verir. Dikkat edilirse hem sıfıncı mertebeye germe oranları hem de sıfıncı mertebeye asal değişmezler  $R$  değişkeninden bağımsızdır. Sonuç olarak,  $W_1$  ve  $W_2$ ,  $R$  değişkeninden bağımsızdırlar. (3.56) ve (3.60) denklemleri (3.49)-(3.51) eşitliklerinde yazılırsa, nominal gerilme tansörünün sıfıncı mertebeye bileşenleri

$$S_{\Theta\Theta}^{(0)} = 2g \left( 1 - \frac{1}{g^4\phi^2} \right) (W_1 + W_2\phi^2), \quad (3.64)$$

$$S_{Zr}^{(0)} = 2g' \left( 1 - \frac{1}{g^2\phi^4} \right) (W_1 + W_2g^2), \quad (3.65)$$

$$S_{Zz}^{(0)} = 2f' \left( 1 - \frac{1}{g^2\phi^4} \right) (W_1 + W_2g^2) \quad (3.66)$$

formunu alır ki, buradan

$$f' S_{Zr}^{(0)} = g' S_{Zz}^{(0)} \quad (3.67)$$

sonucu elde edilir. Dikkat edilirse nominal gerilme tansörünün yukarıdaki sıfıncı mertebeye bileşenleri  $R$  değişkeninden bağımsızdır. Dolayısı ile, (3.40) denklemleri ile verilen sıfıncı mertebeye hareket denklemlerinin  $R$  değişkenine herhangi bir bağıllığı olmadığı için 0'dan 1'e kadar  $R$  üzerinde integrali alınabilir. Yani, membran teorisindeki hareket denklemleri ve sınır koşulları

$$\frac{\partial S_{Zr}^{(0)}}{\partial Z} - S_{\Theta\Theta}^{(0)} + g(f'P_n - g'P_t) = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}, \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial S_{Zz}^{(0)}}{\partial Z} - g(g'P_n + f'P_t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (3.69)$$

$$S_{Zr}^{(0)} = -Q_r, \quad S_{Zz}^{(0)} = -Q_z \quad Z = 0 \quad \text{için}, \quad (3.70)$$

$$S_{Zr}^{(0)} = 0, \quad S_{Zz}^{(0)} = 0 \quad Z = L \text{ için} \quad (3.71)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki denklemleri Euler-Lagrange denklemleri olarak veren virtüel iş ilkesi ise

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^L \left[ S_{\Theta\theta}^{(0)} \delta g + S_{Zr}^{(0)} \frac{\partial(\delta g)}{\partial Z} + S_{Zz}^{(0)} \frac{\partial(\delta f)}{\partial Z} + \left( \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \delta g + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \delta f \right) \right] dZ dR \\ & - \int_0^L (P_r \delta g + P_z \delta f) \Big|_{R=0} dZ - \int_0^1 (Q_r \delta g + Q_z \delta f) \Big|_{Z=0} dR = 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

şeklinde olur.

Hatırlanacağı gibi  $\phi$  fonksiyonu (3.32) denklemi ile tanımlanmıştı. Şimdi yeni bir  $\beta(Z, t)$  fonksiyonu kullanılarak

$$f' = \phi \sin \beta, \quad (3.73)$$

$$g' = \phi \cos \beta \quad (3.74)$$

tanımları yapılsın. Bu tanımlar (3.67) denkleminde yazılırsa

$$S_{Zz}^{(0)} = S_{Zr}^{(0)} \tan \beta \quad (3.75)$$

sonucu elde edilir. Bu ifade de (3.36) denklemlerinde yazılırsa

$$S_{Zr}^{(0)} = T_1^{(0)} \cos \beta, \quad S_{Zz}^{(0)} = T_1^{(0)} \sin \beta \quad (3.76)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, (3.36) ve (3.76) denklemleriyle verilen  $S_{\Theta\theta}^{(0)}$ ,  $S_{Zr}^{(0)}$  ve  $S_{Zz}^{(0)}$  ifadeleri, (3.68) ve (3.69) hareket denklemlerinde yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial Z} (T_1^{(0)} \cos \beta) - T_2^{(0)} + g\phi (P_n \sin \beta - P_t \cos \beta) = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}, \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} (T_1^{(0)} \sin \beta) - g\phi (P_n \cos \beta - P_t \sin \beta) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (3.78)$$

elde edilir [9].

Bu bölümün geri kalan kısmında (3.77) ve (3.78) denklemlerinde görünen  $T_1^{(0)}$  ve  $T_2^{(0)}$  Biot asal gerilme bileşenleri, şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun asal

germe oranlarına göre türevlerine bağlı olarak ifade edilecektir [9]. Bunun için genel bir  $F(\Lambda_1(\varepsilon), \Lambda_2(\varepsilon), \Lambda_3(\varepsilon))$  fonksiyonun Taylor açılımı

$$F(\Lambda_1(\varepsilon), \Lambda_2(\varepsilon), \Lambda_3(\varepsilon)) = F(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) |_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.79)$$

şeklinde yazılsın. (3.28) eşitliğinden

$$\Lambda_1 |_{\varepsilon=0} = \lambda_1, \quad \Lambda_2 |_{\varepsilon=0} = \lambda_2, \quad \Lambda_3 |_{\varepsilon=0} = \lambda_3 \quad (3.80)$$

yazılabildiği için şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun asal germelere göre türevleri,  $\frac{\partial W}{\partial \Lambda_l}$  ( $l = 1, 2$ ),

$$\frac{\partial W}{\partial \Lambda_l} = \frac{\partial W}{\partial \Lambda_l} \Big|_{\Lambda_k = \lambda_k} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad l = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.81)$$

şeklinde yazılabilir. Yazım kolaylığı sağlaması açısından

$$\hat{W}_l = \frac{\partial W}{\partial \Lambda_l} \Big|_{\Lambda_k = \lambda_k} \quad l = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.82)$$

tanımları yapılsın. Sonuçta sıfıncı mertebe yaklaşımda (2.37) ve (2.38) ifadeleri

$$\hat{W}_1 = 2\lambda_1 \left( 1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} \right) (W_1 + \lambda_2^2 W_2) \quad (3.83)$$

$$\hat{W}_2 = 2\lambda_2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^4} \right) (W_1 + \lambda_1^2 W_2) \quad (3.84)$$

formunu alır ve bu denklemler (3.64), (3.65) ve (3.66) denklemlerinde kullanılarak

$$S_{\Theta\theta}^{(0)} = \hat{W}_2, \quad S_{Zr}^{(0)} = \hat{W}_1 \cos \beta, \quad S_{Zz}^{(0)} = \hat{W}_1 \sin \beta \quad (3.85)$$

bağıntıları elde edilir. Sonuç olarak (3.36) ve (3.76) bağıntıları

$$T_1^{(0)} = \hat{W}_1, \quad T_2^{(0)} = \hat{W}_2 \quad (3.86)$$

bağıntılarını verir [9].

### 3.5 Asimptotik Açılım: Sıkışabilir Malzeme

Bu alt bölümde, sıkışmaz malzeme halinde yapıldığı gibi bir asimptotik açılım metodunun sıkışabilir malzeme halinde nasıl uygulanacağı tartışılmıştır.

Hatırlanacağı gibi, sıkışmazlık koşulu bünye denklemlerinin içinde basınç olarak yorumlanan skaler bir çarpanın ortaya çıkmasına neden olur. Yani asimptotik açılım metodunun sıkışabilir ve sıkışmaz hiperelastik tüplere uygulanmasındaki temel fark bünye denklemlerinin arasındaki farktan kaynaklanır. Temel olarak bir önceki bölümde sunulan yaklaşım izlenebilir. Aynı yaklaşım sergileneceği için burada kısaca elde edilmiş denklemler verilecektir. Farklı bir şekilde belirtilmedikçe aynı gösterimler kullanılacaktır.

İlk olarak, sırasıyla, (3.34) ve (3.35) denklemleri ile verilen sıfıncı mertebeye asal germe oranları ve sıfıncı mertebeye asal değişmezlerin ifadeleri, sıkışabilir hiperelastik malzemeler için de geçerlidir. Bu denklemler (3.33) denklemi kullanılarak, sırasıyla,

$$\lambda_2^2 = g^2, \quad \lambda_1^2 + \lambda_3^2 = \phi^2 + \left(\frac{\partial r^{(1)}}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^{(1)}}{\partial R}\right)^2, \quad \lambda_1^2 \lambda_3^2 = \frac{j^2}{g^2}, \quad (3.87)$$

ve

$$\begin{aligned} i_1 &= g^2 + \phi^2 + \left(\frac{\partial r^{(1)}}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^{(1)}}{\partial R}\right)^2, \\ i_2 &= \frac{j^2}{g^2} + g^2 \left[ \phi^2 + \left(\frac{\partial r^{(1)}}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^{(1)}}{\partial R}\right)^2 \right], \\ i_3 &= j^2 \end{aligned} \quad (3.88)$$

şeklinde tekrar yazılabilirler. Hatta, (3.40) denklemleri ile sıkışmaz durum için verilen hareket denklemlerinin sıfıncı mertebeye yakalaşımı, sıkışabilir hiperelastik malzemeler için de geçerlidir. Benzer şekilde, sınır koşulları (3.41)-(3.44) denklemleri ile verildiği gibidir.

Bir önceki bölümde olduğu gibi,  $W$  şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun asal değişmezlere göre türevleri (bkz. (3.47))  $\varepsilon$  parametresinin bir kuvvet serisine açılın ve  $W_l = \frac{\partial W}{\partial I_l} \Big|_{I_k=i_k}$  ( $l, k = 1, 2, 3$ ) tanımı kullanılsın. Böylece, (3.11), (3.12) ve önceki bölümde verilen denklemler kullanılarak,  $S_{\Theta\theta}$ ,  $S_{Zr}$  ve  $S_{Zz}$  bileşenlerinin sıfıncı mertebeye yaklaşımları

$$S_{\Theta\theta}^{(0)} = 2g \left[ W_1 + W_2 \left[ \left(\frac{\partial r^{(1)}}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^{(1)}}{\partial R}\right)^2 + \phi^2 \right] \right]$$



$$+ 2gW_3 \left( f' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} - g' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right)^2, \quad (3.89)$$

$$S_{Zr}^{(0)} = 2W_1 g' - 2W_2 \left[ \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} \left( g' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + f' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) - g' \left[ \left( \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right)^2 + g^2 \right] \right] - 2g^2 W_3 \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \left( f' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} - g' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right), \quad (3.90)$$

$$S_{Zz}^{(0)} = 2W_1 f' - 2W_2 \left[ \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \left( g' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + f' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) - f' \left[ \left( \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right)^2 + g^2 \right] \right] + 2g^2 W_3 \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} \left( f' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} - g' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) \quad (3.91)$$

şeklinde verilir [9].

Ayrıca, sıkışmaz hiperelastik malzemelerin durumunda olduğu gibi,  $S_{Rr}$  ve  $S_{Rz}$  bileşenlerinin açılımları  $\varepsilon$  parametresinin negatif kuvvetlerini içerir. (3.19) açılımı, nominal gerilme tansörünün bileşenlerinde  $\varepsilon$  parametresinin negatif kuvvetlerinin katsayısının sıfır olması gerektiğini söyler. Buradan şekil değiştirmiş radyal ve eksenel koordinatlar üzerine bazı kısıtlamalar gelir. Böylece,  $S_{Rr}^{(-1)} = 0$  ve  $S_{Rz}^{(-1)} = 0$  kısıtlamaları

$$W_1 \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + W_2 \left[ (g^2 + \Phi^2) \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} - g' \left( g' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + f' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) \right] + W_3 g^2 f' \left( f' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} - g' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) = 0, \quad (3.92)$$

$$W_1 \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} + W_2 \left[ (g^2 + \Phi^2) \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} - f' \left( g' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + f' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) \right] - W_3 g^2 g' \left( f' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} - g' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) = 0 \quad (3.93)$$

denklemlerini verir. Bu denklemler  $f'$  ve  $g'$  fonksiyonlarıyla çarpılıp, elde edilen denklemler toplanıp çıkartılırsa,

$$\frac{j}{g} \left( g' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + f' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) (W_2 + W_3 g^2) = 0 \quad (3.94)$$

ve

$$\frac{j}{g} \left[ W_1 + W_2 (g^2 + \phi^2) + W_3 g^2 \phi^2 \right] = 0 \quad (3.95)$$

denklemleri elde edilir. Burada (3.33) denklemi kullanılmıştır.  $j \neq 0$  olması

nedeniyle, (3.94) ve (3.95) denklemleri, sırasıyla,

$$\left( g' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + f' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} \right) (W_2 + W_3 g^2) = 0 \quad (3.96)$$

ve

$$W_1 + (g^2 + \phi^2) W_2 + g^2 \phi^2 W_3 = 0 \quad (3.97)$$

şekline indirgenir. Yukarıdaki (3.96) denklemi

$$W_2 + W_3 g^2 = 0 \quad (3.98)$$

denklemini veya

$$g' \frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} + f' \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} = 0 \quad (3.99)$$

denkleminin sağlanması koşulunda sağlanır. Ancak  $W$  fonksiyonu asal değişmezlerin keyfi bir fonksiyonu olduğu için sağlanması gereken denklem (3.99) olur. Dikkat edilirse, sıkışmaz problemde olduğu gibi yukarıdaki yaklaşımda şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu üzerine herhangi bir kısıt getirilmemiştir. (3.33) ve (3.99) kullanılarak bilinmeyen  $\frac{\partial r^{(1)}}{\partial R}$  and  $\frac{\partial z^{(1)}}{\partial R}$  fonksiyonları  $j$  Jakobyen'ine bağlı olarak

$$\frac{\partial r^{(1)}}{\partial R} = \frac{j f'}{g \phi^2}, \quad \frac{\partial z^{(1)}}{\partial R} = -\frac{j g'}{g \phi^2} \quad (3.100)$$

şeklinde belirlenebilir. Dikkat edilirse, eğer şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu özel olarak belirlenirse (3.97) kısıtı kullanılarak yukarıdaki denklemleri  $j$  teriminden kurtarmak mümkün olacaktır. (3.87) denklemlerinde (3.100) sonuçları kullanılırsa

$$\lambda_2^2 = g^2, \quad \lambda_1^2 + \lambda_3^2 = \phi^2 + \frac{j^2}{g^2 \phi^2}, \quad \lambda_1^2 \lambda_3^2 = \frac{j^2}{g^2} \quad (3.101)$$

elde edilir ve buradan

$$\lambda_1 = \phi, \quad \lambda_2 = g, \quad \lambda_3 = \frac{j}{g \phi} \quad (3.102)$$

yazılabilir. Benzer şekilde, (3.88) denklemlerinde (3.100) sonuçları kullanılırsa, sıfıncı merteye asal değişmezler

$$i_1 = \phi^2 + g^2 + \frac{j^2}{g^2 \phi^2}, \quad i_2 = \frac{j^2}{\phi^2} + \frac{j^2}{g^2} + g^2 \phi^2, \quad i_3 = j^2 \quad (3.103)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, (3.89)-(3.91) denklemlerinde yine (3.100) sonuçları kullanılarak nominal gerilme tansörünün sıfıncı mertebe bileşenlerinin,

$$S_{\Theta\theta}^{(0)} = 2g \left[ W_1 + \left( \frac{j^2}{g^2\phi^2} + \phi^2 \right) W_2 + \frac{j^2}{g^2} W_3 \right], \quad (3.104)$$

$$S_{Zr}^{(0)} = 2g' \left[ W_1 + \left( \frac{j^2}{g^2\phi^2} + g^2 \right) W_2 + \frac{j^2}{\phi^2} W_3 \right], \quad (3.105)$$

$$S_{Zz}^{(0)} = 2f' \left[ W_1 + \left( \frac{j^2}{g^2\phi^2} + g^2 \right) W_2 + \frac{j^2}{\phi^2} W_3 \right] \quad (3.106)$$

şeklinde yazılabildiği görülür. Eğer (3.104)-(3.106) denklemlerini  $W_3$  fonksiyonundan kurtarmak için (3.97) denklemini kullanılırsa

$$S_{\Theta\theta}^{(0)} = 2g \left( W_1 + W_2\phi^2 \right) \left( 1 - \frac{j^2}{g^4\phi^2} \right), \quad (3.107)$$

$$S_{Zr}^{(0)} = 2g' \left( W_1 + W_2g^2 \right) \left( 1 - \frac{j^2}{g^2\phi^4} \right), \quad (3.108)$$

$$S_{Zz}^{(0)} = 2f' \left( W_1 + W_2g^2 \right) \left( 1 - \frac{j^2}{g^2\phi^4} \right) \quad (3.109)$$

elde edilir. (3.67) bağıntısı sıkışabilir hiperelastik malzemeler için de geçerli olduğu için önceki bölümde elde edilen (3.68)-(3.69) hareket denklemleri sıkışabilir problemde de geçelidir [9].

Bu alt bölümün geri kalan kısmında, sıkışmaz problemde olduğu gibi (3.77) and (3.78) denklemlerinde bulunan  $T_1^{(0)}$  ve  $T_2^{(0)}$  Biot asal gerilme bileşenleri, şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun asal germe oranlarına göre türevlerine bağlı olarak ifade edilecektir. Bu nedenle genel bir  $F(\Lambda_1(\varepsilon), \Lambda_2(\varepsilon), \Lambda_3(\varepsilon))$  fonksiyonunun Taylor açılımı

$$F(\Lambda_1(\varepsilon), \Lambda_2(\varepsilon), \Lambda_3(\varepsilon)) = F(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) |_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.110)$$

şeklinde yazılsın. (3.28) açılımı nedeni ile

$$\Lambda_1 |_{\varepsilon=0} = \lambda_1, \quad \Lambda_2 |_{\varepsilon=0} = \lambda_2, \quad \Lambda_3 |_{\varepsilon=0} = \lambda_3 \quad (3.111)$$

yazılabilir. Buradan şekil değiştirme enerjisinin asal germe oranlarına göre olan  $\frac{\partial W}{\partial \Lambda_l}$  ( $l = 1, 2, 3$ ) türevleri

$$\frac{\partial W}{\partial \Lambda_l} = \frac{\partial W}{\partial \Lambda_l} \Big|_{\Lambda_k = \lambda_k} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad l = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.112)$$

şeklinde yazılabilir. Sıkışmaz problemde olduğu gibi

$$\hat{W}_l = \frac{\partial W}{\partial \Lambda_l} \Big|_{\Lambda_k = \lambda_k} \quad l = 1, 2, 3 \quad , \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.113)$$

tanımı yapılsın. (2.32), (2.33) ve (2.34) denklemleri sıfıncı mertebe yaklaşımda

$$\hat{W}_1 = 2\lambda_1 [W_1 + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)W_2 + \lambda_2^2\lambda_3^2W_3] \quad (3.114)$$

$$\hat{W}_2 = 2\lambda_2 [W_1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)W_2 + \lambda_1^2\lambda_3^2W_3] \quad (3.115)$$

$$\hat{W}_3 = 2\lambda_3 [W_1 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)W_2 + \lambda_1^2\lambda_2^2W_3] \quad (3.116)$$

şeklini alırlar. Bu durumda (3.97) ile verilen kısıt  $\hat{W}_3 = 0$  formunu alır. Böylece, bu denklemler (3.104), (3.105) ve (3.106) denklemlerinde kullanılarak

$$S_{\Theta\theta}^{(0)} = \hat{W}_2 \quad , \quad S_{Zr}^{(0)} = \hat{W}_1 \cos \beta \quad , \quad S_{Zz}^{(0)} = \hat{W}_1 \sin \beta \quad (3.117)$$

bağıntıları elde edilir. Sonuç olarak (3.76) bağıntıları

$$T_1^{(0)} = \hat{W}_1 \quad , \quad T_2^{(0)} = \hat{W}_2 \quad (3.118)$$

bağıntılarını verir [9].

## 4. NONLİNEER ELASTİK MAMBRAN TÜPLERDE İVME DALGALARININ YAYILIMI

### 4.1 Giriş

Bu bölümde lineer olmayan elastik malzemeden yapılmış dairesel silindirik tüplerde yayılan ivme dalgalarının büyüme ve sönmesi incelenecektir. Tüpün hiperelastik, izotrop, homojen, sıkışmaz malzemeden yapılmış bir membran tüp olduğu varsayılmaktadır. Dalga cephesi civarında açılım tekniği kullanılarak problemin bir analitik incelemesi gerçekleştirilecek ve ivme dalgalarının bir şok oluşumuna neden olup olmadığı araştırılacaktır. Elde edilen sonuçların bir ucu sabit tutulurken diğer ucu dinamik uzamaya maruz bırakılan elastik tüplerde sayısal olarak gözlenen [4] şok oluşumunu açıkladığı gösterilecektir. Alt bölüm 4.2’de, membran tüpte dalga yayılımını karakterize eden denklemler bir hiperbolik sistem olarak ifade edilecek ve literatürde incelenmiş bir dinamik uzama problemi tanımlanacaktır. Alt bölüm 4.3’te, bir başlangıç deformasyonunun olmadığı durum için dalga cephesi civarında açılım tekniği kullanılarak, membran tüpte yayılan ivme dalgalarının bir şok oluşumuna neden olup olmadığı araştırılacaktır. Alt bölüm 4.4’te, benzer bir inceleme membran tüpün bir başlangıç deformasyonuna sahip olması durumuna genişletilecektir.

### 4.2 Mambran Tüpün Dinamik Uzaması Probleminin Formülasyonu

Lineer olmayan elastik, izotrop, homojen, sıkışmaz malzemeden yapılmış membran bir tüpün doğal konumu (2.61) denklemleri ile verilmiştir. Yazımda kolaylık olması açısından, önceki bölümde membran tüp için elde edilmiş olan sıfıncı merteye hareket denklemlerindeki 0 üst indisi bu bölümde

kullanılmayacaktır. Ayrıca tüpün iç yüzeyinde teğet ve normal gerilmelerin olmadığı, yani  $P_n = 0$ ,  $P_t = 0$  olduğu varsayılmıştır. Bu durumda (3.77)-(3.78) ile verilen hareket denklemleri

$$\frac{\partial}{\partial Z} (T_1 \cos \beta) - T_2 = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} (T_1 \sin \beta) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (4.2)$$

şeklinde yazılır. Eğer

$$u = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.3)$$

tanımları yapılırsa,

$$\frac{\partial(\lambda_1 \cos \beta)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial Z}, \quad \frac{\partial(\lambda_1 \sin \beta)}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial Z}, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} = u \quad (4.4)$$

uygunluk koşulları yazılabilir. (4.1) ve (4.2) hareket denklemleri, (4.4) uygunluk koşulları ile birlikte, vektör formunda yeniden

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{Q})}{\partial Z} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \{\lambda_1 \cos \beta, \lambda_1 \sin \beta, \lambda_2, u, v\}^T, \\ \mathbf{H} &= -\{u, v, 0, T_1 \cos \beta, T_1 \sin \beta\}^T, \\ \mathbf{B} &= -\{0, 0, u, -T_2, 0\}^T \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklinde ve T gösterimi transpoze anlamındadır. (4.5) denklem sistemi

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial Z} + \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

formunda da yazılabilir. Burada

$$\mathbf{A}(\mathbf{Q}) = \partial \mathbf{H}(\mathbf{Q}) / \partial \mathbf{Q} \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlanan  $5 \times 5$  Jakobiyen matrisin sıfır olmayan elemanları

$$\begin{aligned} A_{14} &= -1, & A_{25} &= -1, & A_{41} &= -\frac{\partial T_1}{\partial \lambda_1} \cos^2 \beta - \frac{T_1}{\lambda_1} \sin^2 \beta, \\ A_{42} &= A_{51} = -\left(\frac{T_1}{\lambda_1} - \frac{\partial T_1}{\partial \lambda_1}\right) \sin \beta \cos \beta, & A_{43} &= -\frac{\partial T_1}{\partial \lambda_2} \cos \beta, \\ A_{52} &= -\frac{\partial T_1}{\partial \lambda_1} \sin^2 \beta - \frac{T_1}{\lambda_1} \cos^2 \beta, & A_{53} &= -\frac{\partial T_1}{\partial \lambda_2} \sin \beta \end{aligned} \quad (4.9)$$

şeklinde.  $\mathbf{A}$  matrisinin özdeğerleri

$$\Delta_0 = 0, \quad \Delta_{\mp 1} = \mp C_L, \quad \Delta_{\mp 2} = \mp C_T \quad (4.10)$$

olarak elde edilir. Burada

$$C_L^2 = \frac{\partial T_1}{\partial \lambda_1}, \quad C_T^2 = \frac{T_1}{\lambda_1} \quad (4.11)$$

tanımları yapılmıştır. Eğer  $\mathbf{A}$  matrisinin özdeğerleri reel ve ayrık ise, yani  $C_L^2 > 0$ ,  $C_T^2 > 0$  ve  $C_L \neq C_T$  ise, (4.7) sistemi kesin hiperbolik sistem olarak adlandırılır.

Örneğin Mooney-Rivlin malzemesi için, (2.46) şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu kullanılarak, (3.118) Biot asal gerilmeleri

$$T_1 = [\gamma + (1 - \gamma)\lambda_2^2](\lambda_1 - \lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2}), \quad T_2 = [\gamma + (1 - \gamma)\lambda_1^2](\lambda_2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3}) \quad (4.12)$$

şeklinde bulunur. Böylece (4.11) denklemleri kullanılarak Mooney-Rivlin malzemesi için

$$C_L^2 = [\gamma + (1 - \gamma)\lambda_2^2](1 + 3\lambda_1^{-4}\lambda_2^{-2}), \quad C_T^2 = [\gamma + (1 - \gamma)\lambda_1^2](1 - \lambda_1^{-4}\lambda_2^{-2}) \quad (4.13)$$

elde edilir.

Şimdi Tait ve Zhong [6, 7] ve Tüzel ve Erbay [4, 5] tarafından çeşitli yönleriyle tartışılmış olan nonlinear elastik tüpün dinamik uzaması problemi tanımlanacaktır. Bu problemde, ilk olarak,  $L$  uzunluklu bir membran tüpün  $Z = 0$  ve  $Z = L$  uçlarına  $R_i$  yarıçaplı rijid halka veya disk tutturularak uçların radyal doğrultuda hareketine engel olunur. Daha sonra tüpün  $Z = L$  ucu sabit tutulurken,  $Z = 0$  ucu negatif yönde sabit hızda çekilir.  $Z = 0$  ucuna uygulanan dinamik aksenal uzamanın membran tüpte yarattığı aksenal simetrik dalgaların yayılımının incelenmesi araştırmacıların ilgisini çekmiş bir konudur. Dalga yayılımını yöneten denklemler (4.1)-(4.5) ile verilmiş olup, bu denklemlerin uygun başlangıç ve sınır koşulları ile tamamlanması gerekir.

Referans konumu

$$g(Z, 0) = 1, \quad f(Z, 0) = Z \quad (4.14)$$

şeklinde verildiği için, problemin başlangıç koşulları  $0 \leq Z \leq L$  için

$$\lambda_1(Z, 0) = \lambda_2(Z, 0) = 1, \quad \beta(Z, 0) = \pi/2, \quad u(Z, 0) = v(Z, 0) = 0 \quad (4.15)$$

formunu alır. Sınır koşulları ise  $c_0$  bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda_2(0, t) = 1, \quad u(0, t) = 0, \quad v(0, t) = -c_0, \quad t > 0 \\ \lambda_1(L, t) = \lambda_2(L, t) = 1, \quad \beta(L, t) = \pi/2, \quad u(L, t) = 0, \quad v(L, t) = 0, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

şeklinde verilir. İnceleme sırasında dalganın verilen zaman aralığı içerisinde tüpün  $Z = L$  ucuna hiç ulaşmadığı varsayılacaktır.

Yukarıda tanımlanan problem sırasıyla sıkışmaz elastik malzemeler ve sıkışabilir elastik malzemeler için [4] ve [5]'te sayısal olarak incelenmiştir. Bir ikinci mertebe Godunov yönteminin kullanıldığı bu çalışmalarda, tüpün  $Z = 0$  ucunda aksenal hızda yaratılan süreksizliğin, yani şok dalgasının, hemen hızın türevindeki süreksizliklere yani ivme dalgalarına dönüştüğü gözlenmiştir. Hızları birbirinden farklı iki ivme dalgası bir açılma (expansion) dalgası ile birbirine bağlanmıştır. Önde giden ivme dalgası doğal durumdaki tüp içerisinde yayılmakta olup, açılma dalgasının arka ucunda oluşan ivme dalgası için aynı şeyi söylemek mümkün değildir. Ayrıca ivme dalgalarının ilerleyen zamanlarda bir şok oluşumuna yol açıp açmadığı tartışılmış ve sayısal olarak şok oluşumu gözlenmiştir. Ancak şok oluşumunun en önde giden ve dolayısıyla önü doğal durumda olan ivme dalgası için değil, arkadan gelen ivme dalgası için gözlendiğine işaret edilmelidir. [4] ve [5]'te şok oluşumu için yapılan bu gözlemleri, ivme dalgalarının yayılımının analitik incelemesi ile açıklayabilmek ilginç olacaktır. Bu düşünce ile aşağıdaki alt bölümlerde, önce doğal durumdaki bir tüpte sonra ön gerilmeli bir tüpte yayılan ivme dalgaları dalga cephesi civarında yapılan bir açılım [13] yardımıyla incelenecektir. Arkadaki ivme dalgasının yayılmasına ve şok oluşumuna bir başlangıç deformasyonuna sahip tüpte yayılan ivme dalgası için bulunan sonuçlar ile yorum getirilmeye çalışılacaktır.



### 4.3 Dalga Cephesi Civarında Açılım: Ön Deformasyonsuz Durum

Doğal durumdaki bir tüpte yayılan ivme dalgasına ait dalga cephesi  $Z = \chi(t)$  şeklinde parametrize edilmiş olsun. Dalga cephesi civarındaki açılımı gerçekleştirebilmek için,

$$\xi = Z - \chi(t) \quad (4.17)$$

şeklinde yeni bir değişken tanımlanacak ve alan büyüklüklerinin

$$\mathbf{Q}(Z, t) = \mathbf{Q}(\chi(t), t) + \left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi} \right|_{(\chi(t), t)} \xi + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial \xi^2} \right|_{(\chi(t), t)} \xi^2 + \dots \quad (4.18)$$

şeklinde bir kuvvet serisi açılımına sahip oldukları varsayılacaktır [13]. İvme dalgasının yayılımının incelenmek istenmesi nedeniyle,  $\mathbf{Q}$  büyüklüğünün birinci mertebe türevinde bir süreksizlik olduğu varsayılacak ve  $\xi > 0$  ve  $\xi < 0$  için, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(Z, t) &= \mathbf{Q}^{(0)} = \text{sabit} & \xi > 0 \text{ için} , \\ \mathbf{Q}(Z, t) &= \mathbf{Q}^{(0)} + \mathbf{Q}^{(1)}\xi + \frac{1}{2}\mathbf{Q}^{(2)}\xi^2 + \dots & \xi < 0 \text{ için} \end{aligned} \quad (4.19)$$

açılımlarının geçerli olduğu kabul edilecektir. Doğal durumda,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\beta = \pi/2$ ,  $u = v = 0$  olması nedeniyle,  $\mathbf{Q}^{(0)} = \{0, 1, 1, 0, 0\}^T$  olur. Ayrıca  $\mathbf{A}$  matrisi ve  $\mathbf{B}$  vektörü de

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(0)} + \mathbf{A}^{(1)}\xi + \mathbf{A}^{(2)}\xi^2 + \dots , \quad (4.20)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}^{(1)}\xi + \mathbf{B}^{(2)}\xi^2 + \dots \quad (4.21)$$

kuvvet serisi açılımlarına sahip olacaktır. Burada  $\xi > 0$  için (4.7) sisteminin sağlanmasının, ancak  $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{B}(\mathbf{Q}^{(0)}) \equiv \mathbf{0}$  ile mümkün olduğuna dikkat edilmelidir. (4.19)-(4.21) açılımlarının (4.7) sisteminde konulmasıyla bir denklemler hiyerarşisi elde edilir. Bu hiyerarşinin sıfıncı ve birinci mertebeye karşılık gelen denklemleri, sırasıyla,  $\dot{\chi} = d\chi/dt$  dalga hızını göstermek üzere,

$$(\mathbf{A}^{(0)} - \dot{\chi}\mathbf{I})\mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{0} , \quad (4.22)$$

$$(\mathbf{A}^{(0)} - \dot{\chi}\mathbf{I})\mathbf{Q}^{(2)} + \dot{\mathbf{Q}}^{(1)} + \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{Q}^{(1)} + \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

şeklinde verilir. Bu denklemlerde görülen  $\mathbf{Q}^{(1)}$ ,  $\mathbf{Q}^{(2)}$ ,  $\mathbf{A}^{(0)}$ ,  $\mathbf{A}^{(1)}$ ,  $\mathbf{B}^{(1)}$  büyüklükleri,  $\xi < 0$  için geçerli olan

$$\lambda_1 = 1 + \lambda_1^{(1)}(t)\xi + \frac{1}{2}\lambda_1^{(2)}(t)\xi^2 + \dots \quad (4.24)$$

$$\lambda_2 = 1 + \lambda_2^{(1)}(t)\xi + \frac{1}{2}\lambda_2^{(2)}(t)\xi^2 + \dots \quad (4.25)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \beta^{(1)}\xi + \frac{1}{2}\beta^{(2)}\xi^2 + \dots \quad (4.26)$$

$$u = u^{(1)}(t)\xi + \frac{1}{2}u^{(2)}(t)\xi^2 + \dots \quad (4.27)$$

$$v = v^{(1)}(t)\xi + \frac{1}{2}v^{(2)}(t)\xi^2 + \dots \quad (4.28)$$

açılımlarının kullanılmasıyla elde edilir. (4.22) ve (4.23) denklemlerinin çözülebilmesi için,  $\mathbf{A}^{(0)}$  matrisinin sağ ve sol özvektörlerinin belirlenmesi gerekmektedir.  $\mathbf{A}^{(0)}$  matrisinin özdeğerleri

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_{\mp 1} = \mp a_L, \quad \delta_{\mp 2} = \mp a_T \quad (4.29)$$

olup, burada

$$a_L^2 = \left. \frac{\partial T_1}{\partial \lambda_1} \right|_{\lambda_1=\lambda_2=1}, \quad a_T^2 = \left. \frac{T_1}{\lambda_1} \right|_{\lambda_1=\lambda_2=1} \quad (4.30)$$

tanımları kullanılmıştır. Bu özdeğerlerden herhangi birine karşılık gelen sağ ve sol özvektörler sırasıyla  $\mathbf{r}$  ve  $\mathbf{l}$  olsun. Ayrıca, bu özvektörlerin  $\mathbf{l}^T \mathbf{r} = 1$  olacak şekilde seçildiği varsayılacaktır. Bu durumda  $\mathbf{r}$  özvektörü  $(\mathbf{A}^{(0)} - \dot{\chi} \mathbf{I}) \mathbf{r} = \mathbf{0}$  denklemini sağlar ve (4.22) denkleminin çözümü  $\sigma(t)$  keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathbf{Q}^{(1)} = \sigma(t) \mathbf{r} \quad (4.31)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde  $\mathbf{l}$  özvektörü de  $\mathbf{l}^T (\mathbf{A}^{(0)} - \dot{\chi} \mathbf{I}) = \mathbf{0}$  denklemini sağlar.  $\mathbf{A}^{(0)}$  matrisinin  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_{\mp 1} = \mp a_L$ ,  $\delta_{\mp 2} = \mp a_T$  özdeğerlerine karşılık gelen sağ özvektörler ve sol özvektörler, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \left\{ 0, \frac{A_{53}^{(0)}}{a_L^2}, 1, 0, 0 \right\}^T, \\ \mathbf{r}_{\mp 1} &= \left\{ 0, 1, 0, 0, \mp a_L \right\}^T, \\ \mathbf{r}_{\mp 2} &= \left\{ 1, 0, 0, \mp a_T, 0 \right\}^T \end{aligned} \quad (4.32)$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{l}_0 &= \{ 0, 0, 1, 0, 0 \}^T, \\ \mathbf{l}_{\mp 1} &= \left\{ 0, \frac{1}{2}, -\frac{A_{53}^{(0)}}{\pm 2a_L^2}, 0, \frac{1}{\pm 2a_L} \right\}^T, \\ \mathbf{l}_{\mp 2} &= \left\{ \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{\pm 2a_T}, 0 \right\}^T\end{aligned}\quad (4.33)$$

şeklinde verilir. (4.23) denkleminin soldan  $\mathbf{l}^T$  vektörü ile çarpılması ve (4.31) denkleminin kullanılmasıyla,

$$\frac{d\sigma}{dt} + (\mathbf{l}^T \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{r})\sigma + \mathbf{l}^T \mathbf{B}^{(1)} = 0 \quad (4.34)$$

denkleminde ulaşılır. Bu denklemin boyuna ve enine dalgalar için aldığı şekil ayrı ayrı elde edilecektir.

*i) Boyuna dalga yayılımı:* Pozitif yönde  $a_L$  hızı ile ilerleyen bir boyuna dalganın şok oluşumuna neden olup olmadığı araştırılacaktır. Bu durumda (4.31)-(4.32) denklemlerinden

$$\lambda_1^{(1)} = \sigma, \quad v^{(1)} = -a_L \sigma, \quad \beta^{(1)} = 0, \quad u^{(1)} = 0, \quad \lambda_2^{(1)} = 0 \quad (4.35)$$

bulunur. Ayrıca  $\mathbf{r}_{+1}$  ve  $\mathbf{l}_{+1}$  sağ ve sol özvektörlerinin (4.34) denkleminde görünen  $\mathbf{l}^T \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{r}$  ve  $\mathbf{l}^T \mathbf{B}^{(1)}$  ifadelerinde kullanılması

$$\mathbf{l}^T \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{r} = \alpha \sigma, \quad \mathbf{l}^T \mathbf{B}^{(1)} = 0 \quad (4.36)$$

sonuçlarını verir. Buradaki  $\alpha$  katsayısı

$$\alpha = \frac{1}{2a_L} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \lambda_1^2} \Big|_{\lambda_1 = \lambda_2 = 1} \quad (4.37)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Örneğin Mooney-Rivlin sıkışmaz malzemesi için  $\alpha = -3$  olur. Bu durumda (4.34) denklemi

$$\frac{d\sigma}{dt} + \alpha \sigma^2 = 0 \quad (4.38)$$

şeklini alır. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$\sigma(t) = \frac{\sigma(0)}{1 + \sigma(0)\alpha t} \quad (4.39)$$

şeklindedir. Paydayı sıfır yapan

$$t_c = -\frac{1}{\alpha\sigma(0)} \quad (4.40)$$

kritik  $t_c$  zamanında  $\sigma(t)$  fonksiyonunun sınırsız şekilde büyüyeceği açıktır.  $\sigma(t)$  fonksiyonunun  $\mathbf{Q}$  büyüklüğünün birinci mertebe türevindeki süreksizliği gösterdiğine dikkat edilirse, bu durumda ivme dalgasının bir şok oluşumuna neden olduğu ifade edilir. Fakat  $t_c > 0$  olması için, eğer  $\alpha < 0$  ise, (örneğin Mooney-Rivlin sıkışmaz malzemesi için, ki o durumda  $\alpha = -3$  olur),  $\sigma(0) > 0$  olması gerektiği açıktır. Yani Mooney-Rivlin malzemesinden yapılmış bir membran tüpte şok oluşumu için,  $\sigma(0) > 0$  olmalıdır. Şimdi, ilk mertebe yaklaşıklıkta  $\xi < 0$  için

$$\lambda_1 = 1 + \sigma(t)\xi \quad ve \quad v = -a_L\sigma(t)\xi \quad (4.41)$$

olduğu hatırlanarak, bir önceki alt bölümde tanımlanan probleme şimdiki yaklaşım uygulanacaktır. [4]'teki sayısal deneylerden önde giden ivme dalgası için  $\lambda_1(0) > 1$  ve  $v(0) < 0$  olduğuna dikkat edilirse ([4]'te verilen Şekil 5 ve Şekil 6'ya bakınız),  $\sigma(0) < 0$  sonucuna ulaşılır. Bu durumda Mooney-Rivlin malzemesi için önde giden ivme dalgası bir şok oluşumuna neden olmayacaktır. Bu bulgu [4]'te bulunan sayısal sonuçlarla tamamen uyumludur.

Tersine olarak, bir şok oluşumuna neden olması için ivme dalgasının nasıl bir elastik ortamda yayılması gerektiği sorulabilir.  $\sigma(0) < 0$  kısıtlaması altında bir şok oluşumu ancak  $\alpha > 0$  ise mümkün olabilecektir.  $a_L > 0$  olması nedeniyle  $\alpha > 0$  olması, ancak

$$\left. \frac{\partial^2 T_1}{\partial \lambda_1^2} \right|_{\lambda_1=\lambda_2=1} > 0 \quad (4.42)$$

koşulunun sağlanması ile mümkün olabilecektir.

*ii) Enine dalga yayılımı:* Pozitif yönde  $a_T$  hızı ile ilerleyen bir enine dalganın şok oluşumuna neden olup olmadığı araştırılacaktır. Bu durumda (4.31)-(4.32) denklemlerinden

$$\beta^{(1)} = -\sigma, \quad u^{(1)} = a_T\sigma, \quad \lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = v^{(1)} = 0 \quad (4.43)$$

bulunur. Ayrıca  $\mathbf{r}_{+2}$  ve  $\mathbf{l}_{+2}$  sağ ve sol özvektörlerinin (4.34) denkleminde kullanılması sonucu

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad (4.44)$$

elde edilir, yani  $\sigma(t) = \sigma(0) = \text{sabit}$  olur. Bu sonuç, başlangıçta radyal hızın türevinde verilmiş olan bir süreksizliğin enine dalganın yayılımı boyunca değişmeden ilerlediği anlamına gelir. Tanımlanmış olan dinamik uzama probleminde, tüpün uçları rijid halkalara tutturulduğu ve dolayısıyla radyal harekete izin verilmediği için enine dalgalarla ilgili bu sonucu sözkonusu probleme uygulama imkanı yoktur.

#### 4.4 Dalga Cephesi Civarında Açılım: Ön Deformasyonlu Durum

Yukarıdaki alt bölümde başlangıç deformasyonunun olmadığı durum için gerçekleştirilen dalga cephesi açılımının, dinamik uzama probleminde önde giden ivme dalgası için sayısal çözüm tekniği uygulayarak yapılan gözlemlerle uyumlu sonuç verdiğinin altını çizmek gerekir. Acaba benzer bir açıklama arkada giden ivme dalgası için de getirilebilir mi diye sorulabilir.

Ön deformasyon durumunda (4.15) başlangıç koşulları,  $\lambda_{10}$ ,  $\lambda_{20}$  ve  $v_0$  sabitler olmak üzere,

$$\lambda_1(Z, 0) = \lambda_{10}, \quad \lambda_2(Z, 0) = \lambda_{20}, \quad \beta(Z, 0) = \pi/2, \quad u(Z, 0) = 0, \quad v(Z, 0) = v_0 \quad (4.45)$$

formunda verilir. Buradaki  $\lambda_{10}$  ve  $\lambda_{20}$  sabitleri, başlangıç deformasyonuna karşılık gelen Biot asal gerilmeleri  $T_{10}$  ve  $T_{20}$  olmak üzere,

$$\lambda_{10} > 0, \quad T_{10} > 0, \quad T_{20} \equiv 0 \quad (4.46)$$

koşulları sağlanacak şekilde seçilecektir. Özel olarak Mooney-Rivlin malzemesi için,  $T_{20} \equiv 0$  koşulu

$$\lambda_{10}\lambda_{20}^2 = 1 \quad (4.47)$$

denklemini verir.

Doğal durumdaki mambran tüp için yapılan analizde olduğu gibi, dalga cephesi civarında açılımı gerçekleştirebilmek için (4.17) denklemindeki gibi yeni bir  $\xi$  değişkeni tanımlanacak ve alan büyüklüklerinin (4.18) kuvvet serisi açılımına sahip oldukları varsayılacaktır. Yine  $\mathbf{Q}$  büyüklüğünün birinci mertebe türevinde bir süreksizlik olduğu varsayılacak ve (4.19)-(4.21) denklemlerinin şimdiki durum için de geçerli olduğu varsayılacaktır. Yine  $\xi > 0$  için (4.7) sisteminin sağlanması ancak  $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{B}(\mathbf{Q}^{(0)}) \equiv \mathbf{0}$  ile mümkün olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca ön gerilmeli durumda,  $\xi > 0$  için

$$\lambda_1 = \lambda_{10}, \quad \lambda_2 = \lambda_{20}, \quad \beta = \pi/2, \quad u = 0, \quad v = v_0 \quad (4.48)$$

olması nedeniyle,  $\mathbf{Q}^{(0)} = \{0, \lambda_{10}, \lambda_{20}, 0, v_0\}^T$  bulunur.

Doğal durumdaki mambran tüp için yapıldığı gibi, (4.19)-(4.21) açılımlarının (4.7) sisteminde konulmasıyla, sırasıyla, sıfıncı ve birinci mertebeye karşılık gelen (4.22) ve (4.23) denklemleri elde edilir. Yine doğal durumdaki mambran tüp için yapılan hesaplara benzer şekilde, (4.22) ve (4.23) denklemlerinde görülen  $\mathbf{Q}^{(1)}$ ,  $\mathbf{Q}^{(2)}$ ,  $\mathbf{A}^{(0)}$ ,  $\mathbf{A}^{(1)}$ ,  $\mathbf{B}^{(1)}$  büyüklükleri  $\xi < 0$  için geçerli olan

$$\lambda_1 = \lambda_{10} + \lambda_1^{(1)}(t)\xi + \frac{1}{2}\lambda_1^{(2)}(t)\xi^2 + \dots \quad (4.49)$$

$$\lambda_2 = \lambda_{20} + \lambda_2^{(1)}(t)\xi + \frac{1}{2}\lambda_2^{(2)}(t)\xi^2 + \dots \quad (4.50)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \beta^{(1)}\xi + \frac{1}{2}\beta^{(2)}\xi^2 + \dots \quad (4.51)$$

$$u = u^{(1)}(t)\xi + \frac{1}{2}u^{(2)}(t)\xi^2 + \dots \quad (4.52)$$

$$v = v_0 + v^{(1)}(t)\xi + \frac{1}{2}v^{(2)}(t)\xi^2 + \dots \quad (4.53)$$

açılımlarının kullanılmasıyla elde edilir. Yine benzer şekilde, (4.22) ve (4.23) denklemlerinin çözülebilmesi için  $\mathbf{A}^{(0)}$  matrisinin sağ ve sol özvektörlerinin belirlenmesi gerekmektedir.  $\mathbf{A}^{(0)}$  matrisinin özdeğerleri yine

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_{\mp 1} = \mp a_L, \quad \delta_{\mp 2} = \mp a_T \quad (4.54)$$

olup, ancak  $a_L$  ve  $a_T$  dalga hızları için burada

$$a_L^2 = \left. \frac{\partial T_1}{\partial \lambda_1} \right|_{\lambda_1=\lambda_{10}, \lambda_2=\lambda_{20}}, \quad a_T^2 = \left. \frac{T_1}{\lambda_1} \right|_{\lambda_1=\lambda_{10}, \lambda_2=\lambda_{20}} \quad (4.55)$$

tanımları kullanılmıştır. Bu özdeğerlerden herhangi birine karşılık gelen ve  $\mathbf{I}^T \mathbf{r} = 1$  koşulunu sağlayan sağ ve sol özvektörler, sırasıyla,  $\mathbf{r}$  ve  $\mathbf{l}$  olsun. Bu durumda  $\mathbf{r}$  özvektörü  $(\mathbf{A}^{(0)} - \dot{\chi} \mathbf{I}) \mathbf{r} = \mathbf{0}$  denklemini sağlar ve (4.22) denkleminin çözümü  $\sigma(t)$  keyfi bir fonksiyon olmak üzere (4.31) ile verilebilir. Benzer şekilde  $\mathbf{l}$  özvektörü de  $\mathbf{l}(\mathbf{A}^{(0)} - \dot{\chi} \mathbf{I}) = \mathbf{0}$  denklemini sağlar.  $\mathbf{A}^{(0)}$  matrisinin  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_{\mp 1} = \mp a_L$ ,  $\delta_{\mp 2} = \mp a_T$  özdeğerlerine karşılık gelen sağ ve sol özvektörler, sırasıyla, (4.32) ve (4.33) şeklinde verilir.  $\sigma(t)$  genliği ön gerilmeli durum için de yine (4.34) denklemi ile belirlenecektir. Bu denklemin enine dalgalar için aldığı şekil (4.44) ile verilen denklemdir ve şimdiki problem için de benzer bir yorum geçerli olacak, yani dalganın başlangıçtaki genliğinde zamanla herhangi bir değişiklik olmayacaktır. Şimdi, ön gerilmeli membran tüpte yayılan ve pozitif yönde  $a_L$  hızı ile ilerleyen bir boyuna dalganın şok oluşumuna neden olup olmadığı araştırılacaktır. Bu durumda  $\mathbf{r}_{+1}$  ve  $\mathbf{l}_{+1}$  sağ ve sol özvektörlerinin (4.34) denkleminde görünen  $\mathbf{I}^T \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{r}$  ve  $\mathbf{I}^T \mathbf{B}^{(1)}$  ifadelerinde kullanılması, doğal durumdaki membran tüpte olduğu gibi, (4.36) sonuçlarını verir. Ancak buradaki  $\alpha$  katsayısı

$$\alpha = \frac{1}{2a_L} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \lambda_1^2} \Big|_{\lambda_1=\lambda_{10}, \lambda_2=\lambda_{20}} \quad (4.56)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu durumda (4.34) denklemi yine doğal durumdaki membran tüpte olduğu gibi (4.38) denkleme indirgenir ve çözüm (4.39) denklemi ile verildiği gibidir. Yine paydayı sıfır yapan ve (4.40) denklemiyle verilen kritik  $t_c$  zamanında  $\sigma(t)$  fonksiyonunun sınırsız şekilde büyüyeceği açıktır. Bu durumda ivme dalgasının bir şok oluşumuna neden olduğu ifade edilir. Doğal durumdaki membran tüpte olduğu gibi ön deformasyonlu durumda da Mooney-Rivlin sıkışmaz malzemesi için  $\alpha < 0$  olur. Bu durumda  $t_c > 0$  olması için  $\sigma(0) > 0$  olması gerekmektedir. Şimdi ilk mertebe yaklaşıklıkta  $\xi < 0$  için

$$\lambda_1 = \lambda_{10} + \sigma(t)\xi \quad \text{ve} \quad v = v_0 - a_L \sigma(t)\xi \quad (4.57)$$

olduğu hatırlanarak bir önceki alt bölümde tanımlanan probleme şimdiki yaklaşım uygulanacaktır. [4]'teki sayısal deneylerden arkada giden ivme dalgası için,  $\lambda_1(0) < \lambda_{10}$  ve  $v(0) > v_0$  olduğuna dikkat edilirse ([4]'te verilen Şekil 5

ve Şekil 6'ya bakınız),  $\sigma(0) > 0$  sonucuna ulaşılır. Bu durumda Mooney-Rivlin malzemesi için arkada giden ivme dalgası bir şok oluşumuna neden olabilecektir. Bu bulgu [4]'te bulunan sayısal sonuçlarla tamamen uyumludur.

Tersine olarak, bir şok oluşumuna neden olmaması için ivme dalgasının nasıl bir elastik ortamda yayılması gerektiği sorulabilir.  $\sigma(0) > 0$  kısıtlaması altında bir şok oluşumunun meydana gelmemesi için  $\alpha > 0$  olmalıdır.  $a_L > 0$  olması nedeniyle  $\alpha > 0$  olması, ancak

$$\left. \frac{\partial^2 T_1}{\partial \lambda_1^2} \right|_{\lambda_1=\lambda_{10}, \lambda_2=\lambda_{20}} > 0 \quad (4.58)$$

koşulunun sağlanması ile mümkün olabilecektir.



## 5. HİPERBOLİK KORUNUM YASALARI İÇİN RÖLAKSASYON SAYISAL METODU

### 5.1 Giriş

Bu bölümde, hiperbolik sistemlerin sayısal çözümü için önerilen Rölaksasyon metodu tanıtılacak ve nonlinear sistemlerin sayısal çözümü için getirdiği kolaylıklar tartışılacaktır. Alt bölüm 5.2’de birinci ve ikinci mertebeli rölaksasyon metodları sunulacaktır. Alt bölüm 5.3’te sayısal metodun monotonluk ve TVD (Total Variation Diminishing) özellikleri tartışılacaktır. Alt bölüm 5.4’te bazı örnek problemler için metodun başarısı tartışılacaktır.

### 5.2 Rölaksasyon Sayısal Metodu

Korunum yasalarının hiperbolik sistemlerinin, fizik ve mühendisliğin çeşitli alanlarında çözümüne çok önem verilen problemlerde ortaya çıktığı iyi bilinmektedir. Genel olarak, hiperbolik sistemlerin çözümlerini elde etmekteki zorluklar çok az sayıda problem için karakteristikler metodunu kullanarak tam çözümlere ulaşma imkânını vermiş ve bu durum araştırmacıları yaklaşık çözümler elde edebilmek için değişik sayısal metodlar önermeye sevk etmiştir. Hiperbolik problemlerin diğer problemlerden önemli bir farkı, yeterince düzgün başlangıç koşulları için bile şok oluşumunun meydana gelmesi ve böylece sürekli olmayan çözümlerin ortaya çıkmasıdır. Hem bu durum hem de hiperbolik sistemlerin nonlinearlikleri analitik çözümlerin elde edilmesini zorlaştırmaktadır.

Korunum yasaları için önerilmiş sayısal metodlardan birisi de *Rölaksasyon Metodu*’dur [8]. Bu metodun ana fikri, verilmiş korunum yasası için tanımlanmış

Cauchy problemini çözmek yerine, rölaksasyon zamanı olarak adlandırılan bir pozitif küçük parametre yardımıyla oluşturulmuş ve nonlinear terimin türev içermediği, fakat diğer terimlerin bir lineer hiperbolik sistem oluşturduğu yeni bir sistemi çözmektir. Bu yeni sistemin özel yapısı (lineerlik ve nonlinear aşağı mertebeden terim), hem uzay koordinatında Riemann problemi çözmeye gerek kalmadan hem de zamanda bir nonlinear cebirsel denklem sistemi çözmeye gerek kalmadan problemin sayısal olarak çözülmesini sağlamaktadır. Bu iki özellik rölaksasyon metodunun diğer sayısal metodlarla karşılaştırıldığında en önemli iki artışı olarak ortaya çıkmaktadır.

Bir boyutlu korunum yasası için Cauchy problemi,  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n$  bir vektör değerli düzgün fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{f}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0}, & (x, t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_+, & \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x)\end{aligned}\tag{5.1}$$

şeklindedir. Bu korunum yasasına karşılık gelen rölaksasyon sistemi ise

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{v} &= \mathbf{0}, & \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \mathbf{A}^2 \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u} &= -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{f}(\mathbf{u}))\end{aligned}\tag{5.2}$$

şeklinde verilir [8]. Burada  $\mathbf{A}^2 := \text{diag}(a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  formunda bir sabit matris olup,  $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$  jakobiyenin her  $\mu$  özdeğeri için

$$|\mu| \leq a_i, \quad i = 1, \dots, n\tag{5.3}$$

koşulunu sağlar. Bu koşula *altkarakteristik (subcharacteristic) koşulu* denir ve kapalı olarak

$$\mathbf{A}^2 - \mathbf{f}'(\mathbf{u})^2 \geq 0 \quad \text{her } \mathbf{u} \text{ için}\tag{5.4}$$

şeklinde de yazılabilir. (5.2) rölaksasyon sistemi için başlangıç koşulu ise

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_0(x))\tag{5.5}$$

şeklinde tanımlanır. (5.2) sisteminin rölaksasyon limiti, ( yani  $\epsilon \rightarrow 0^+$  limiti)

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{u})\tag{5.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0 \quad (5.7)$$

olur. Burada (5.6) eşitliğine yerel denge (local equilibrium) denklemi denir ve (5.7) denklemi orijinal korunum yasasıdır. Chapman-Enskog [14] açılımının uygulanması ile birinci mertebede geçerli olan

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \epsilon(\mathbf{A}^2 - \mathbf{f}'(\mathbf{u})^2) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( (\mathbf{A}^2 - \mathbf{f}'(x)^2) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} \right) \quad (5.9)$$

denklemleri elde edilir.  $\epsilon$  röleksasyon parametresi sıfıra giderken (5.8)-(5.9) sisteminin (5.6)-(5.7) sistemine indirgendiği açıktır. (5.9) sisteminin disipatif olması için (5.4) koşulunun sağlanması gerektiğine dikkat edilmelidir.

Burada belirtilmesi gereken konulardan birisi de, (5.2) sisteminin uygun bir sayısal ayrıklaştırmasının çok küçük  $\epsilon$  parametresi için (5.1) korunum denkleminin veya daha doğru olarak (5.6)-(5.7) sisteminin sayısal ayrıklaştırmasına yakınsamasının beklenmesi gerektiğidir. Hem sonradan tanımlanmış  $\mathbf{v}$  değişkenine hem de röleksasyon zamanını gösteren  $\epsilon$  küçük parametresine bağlı olan (5.2) sisteminin ayrıklaştırılmasına *Relaxing şema*, (5.6)-(5.7) sisteminin ayrıklaştırılmasına *Relaxed şema* denir. Aşağıda hem birinci mertebe hem de ikinci mertebe yaklaşımlar için, röleksasyon metodunun relaxing ve relaxed şemaları sunulacaktır. Bu ayrıklaştırmalar zaman boyutunda TVD Runge-Kutta splitting ayrıklaştırmaları olacaktır. Ayrıca ayrıklaştırmaların kararlı olması için konveksiyon terimleri açık (explicit) olarak, aşağı mertebeden terimler kapalı (implicit) olarak ayrıklaştırılmıştır. Uzaysal koordinattaki ayrıklaştırmalarda, birinci mertebe için *upwind* yaklaşımı ikinci mertebe için Van Leer [15] tarafından önerilmiş olan *MUSCL* yaklaşımı kullanılacaktır.

Şimdi aşağıdaki paragraflarda kullanılacak notasyon kısaca tanıtılacaktır. (5.2) sistemini ayrıklaştırmada kolaylık olması açısından eşit uzay adımları ve eşit zaman adımları kullanılacaktır. Buna göre  $\Delta x$  uzay adımı ve  $\Delta t$  zaman adımı, sırasıyla,  $\Delta x := x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$  ve  $\Delta t := t_{n+1} - t_n$  şeklinde tanımlanır. Ayrık denklemleri yazarken bir  $w$  fonksiyonunun  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ ,  $t = t_n$  noktasındaki noktasal

değeri  $w_{i+\frac{1}{2}}^n := w(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n)$  şeklinde gösterilir.  $w$  fonksiyonunun  $x = x_i$ ,  $t = t_n$  noktasındaki değeri ise bu noktayı içeren hücre üzerindeki ortalama değeri olarak, yani

$$w_i^n := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} w(x, t_n) dx \quad (5.10)$$

olarak tanımlanır.  $\mathcal{D}_x$  ayrık fark operatörü ise

$$\mathcal{D}_x w_i := \frac{w_{i+\frac{1}{2}} - w_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad (5.11)$$

şeklinde tanımlanır.

### 5.2.1 Birinci Mertebe Rölaksasyon Şeması

(i) *Relaxing Şema:*

(5.2) sisteminin uzaysal ayrıklaştırılması

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_i + \mathcal{D}_x \mathbf{v}_i &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_i + \mathbf{A}^2 \mathcal{D}_x \mathbf{u}_i &= -\frac{1}{\epsilon} (\mathbf{v}_i - \mathbf{f}_i) \end{aligned} \quad (5.12)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\mathbf{f}_i$  fonksiyonu  $\mathbf{f}$  fonksiyonunun bir hücre üzerinde ortalamasını gösterir ve

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{f}(\mathbf{u}) dx = \mathbf{f} \left( \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{u} dx \right) + O(\Delta x^2) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_i) + O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (5.13)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece (5.12) yarı-ayrık sistemi  $\mathbf{f}_i$  yerine  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_i)$  yazıldığı zaman  $O(\Delta x^2)$  mertebesinde doğru olacaktır.

Birinci mertebe rölaksasyon şemasında upwind yaklaşımı uygulanacaktır. Ancak upwind yaklaşımı  $\mathbf{u}_{i+1/2}$  ve  $\mathbf{v}_{i+1/2}$  büyüklükleri yerine (5.2) rölaksasyon sisteminin sabit  $\pm \mathbf{A}$  hızlarına sahip *karakteristik değişkenleri*'ni gösteren

$$\mathbf{v} \pm \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (5.14)$$

değişkenlerine uygulanacaktır. Eğer  $\mathbf{v} \pm \mathbf{A} \mathbf{u}$  ifadelerine upwind şeması uygulanırsa,

$$(\mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{u})_{i+1/2} = (\mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{u})_i, \quad (\mathbf{v} - \mathbf{A} \mathbf{u})_{i+1/2} = (\mathbf{v} - \mathbf{A} \mathbf{u})_{i+1} \quad (5.15)$$

elde edilir. Bu iki denklemden  $\mathbf{u}_{i+1/2}$  ve  $\mathbf{v}_{i+1/2}$  bilinmeyenleri

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i+1}) - \frac{1}{2}\mathbf{A}(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) \\ \mathbf{v}_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1}) - \frac{1}{2}\mathbf{A}(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i)\end{aligned}\quad (5.16)$$

olarak bulunur. (5.16) denklemleri (5.12) sisteminde yazılırsa, (5.2) röleksasyon sisteminin birinci merteye yarı-ayrık upwind yaklaşımı

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_i + \frac{1}{2\Delta x}(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_{i-1}) - \frac{1}{2\Delta x}\mathbf{A}(\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_i + \frac{1}{2\Delta x}\mathbf{A}^2(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}) - \frac{1}{2\Delta x}\mathbf{A}(\mathbf{v}_{i+1} - 2\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i-1}) &= -\frac{1}{\epsilon}(\mathbf{v}_i - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i))\end{aligned}\quad (5.17)$$

şeklinde elde edilir [8].

Daha önce belirtildiği gibi, birinci merteye zaman ayrıklaştırması TVD Runge-Kutta splitting metodu yardımıyla gerçekleştirilecektir. Bu metodun uygulanmasında, ilk olarak zaman türevini içeren terim ve aşağı mertebeli terim dikkate alınacaktır. Zaman türevi için ön fark (forward difference) kullanılarak bir kapalı şema oluşturulacaktır. İkinci olarak, zaman ve uzay türevlerini içeren terimler aşağı merteye terim olmaksızın dikkate alınacaktır. Bir önceki yaklaşımdan elde edilen sonuç, burada başlangıç datası olarak kullanılacaktır. Yine zaman türevi için açık ön fark şema yazılacaktır. Birinci aşamada bir kapalı şemanın, ikinci aşamada bir açık şemanın kullanılmasının iki yararı vardır. Birincisi, aşağı mertebeden bir nonlinear terimin varlığı bir nonlinear cebirsel denklem çözümünü gerektirmez. İkincisi, şema bir aşamada kapalı olmasına rağmen bir lineer cebirsel denklem sistemi çözülmesini gerektirmez. Sonuç olarak bir  $t_n$  zamanında verilmiş bir  $\{\mathbf{u}_i^n, \mathbf{v}_i^n\}$  çifti için  $t_{n+1}$  zamanına karşılık gelen  $\{\mathbf{u}_i^{n+1}, \mathbf{v}_i^{n+1}\}$  çifti

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i^* &= \mathbf{u}_i^n, \\ \mathbf{v}_i^* &= \mathbf{v}_i^n - \frac{\Delta t}{\epsilon}(\mathbf{v}_i^* - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^*)), \\ \mathbf{u}_i^{(1)} &= \mathbf{u}_i^* - \Delta t \mathcal{D}_x \mathbf{v}_i^*, \\ \mathbf{v}_i^{(1)} &= \mathbf{v}_i^* - \Delta t \mathbf{A}^2 \mathcal{D}_x \mathbf{u}_i^*,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{u}_i^{(1)}, \\ \mathbf{v}_i^{n+1} &= \mathbf{v}_i^{(1)}.\end{aligned}\tag{5.18}$$

algoritması yardımıyla hesaplanır. Aşağı mertebeden terim kapalı formda yazıldığı için, birinci aşamaya karşılık gelen zaman ayrıklaştırması  $\epsilon$  parametresinden bağımsız olarak kararlıdır. İkinci aşamaya karşılık gelen zaman ayrıklaştırması ise, konveksiyon terimleri nedeniyle

$$\max\{a_p^2\} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad 1 \leq p \leq n\tag{5.19}$$

şeklinde verilen CFL (Courant, Friedrichs, Lewy [16]) koşulunu sağlamalıdır.

(ii) *Relaxed Şema:*

Yukarıda verilen (5.18) birinci mertebeli Runge-Kutta şemasının kararlılığı onun doğru çözümlere yakınsayacağını garanti etmez. Doğru çözüme yakınsamanın koşulu sıfır rölaksasyon limitinde, yani  $\epsilon \rightarrow 0^+$  limiti için, (5.18) şemasının (5.6)-(5.7) sisteminin bir uyumlu (consistent) ve kararlı ayrıklaştırmasına indirgenmesidir. Şimdi  $\epsilon \ll 1$ ,  $\frac{\epsilon}{\Delta x} \ll 1$ ,  $\frac{\epsilon}{\Delta t} \ll 1$  olduğu ve başlangıç durumunun yerel denge olduğu, yani  $\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, 0))$ , varsayalım. [8]'de iki ara zaman adımında çözümlerin  $O(\Delta t^2)$  mertebesinde bir hata ile yerel dengede olduğu, yani

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{f}(\mathbf{u}^*) + O\left(\frac{\epsilon}{\Delta t}\right)\tag{5.20}$$

olduğu ifade edilmiştir. Bu durumda birinci mertebeli bir şema için

$$\epsilon = o(\Delta t^2)\tag{5.21}$$

seçimi uygun olacaktır. (5.20)-(5.21) denklemlerinin (5.18) algoritmasında kullanılması ve  $O\left(\frac{\epsilon}{\Delta t}\right)$  mertebesindeki terimlerin ihmal edilmesi sonucu (5.18) şeması

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i^{(1)} &= \mathbf{u}_i^n - \Delta t \mathcal{D}_x \mathbf{v}_i^n \Big|_{\mathbf{v}_i^n = \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^n)} \\ \mathbf{u}_i^{(n+1)} &= \mathbf{u}_i^{(1)}\end{aligned}\tag{5.22}$$

formuna indirgenir. (5.22) ile verilen şema, (5.1) sistemini ayrıklaştırması olup *Relaxed Şema* adını alır. Burada (5.22) relaxed şemasının açık bir şema olduğuna

ve buradan bir CFL koşulu geleceğine dikkat edilmelidir. Yukarıda görünen  $\mathcal{D}_x \mathbf{v}_i$  ifadesi,  $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$  olması ve (5.16) denklemi kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_x \mathbf{v}_i &= \frac{1}{\Delta x} (\mathbf{v}_{i+1/2} - \mathbf{v}_{i-1/2}) \\
&= \frac{1}{2\Delta x} (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_{i-1}) - \frac{1}{2\Delta x} \mathbf{A}(\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}) \\
&= \frac{1}{2\Delta x} (\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1})) - \frac{1}{2\Delta x} \mathbf{A}(\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}).
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Benzer şekilde (5.16) kullanılarak,  $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$  şeklinde verilen yerel dengenin birinci mertebe upwind şeması

$$\mathbf{f}_{i+1/2} = \mathbf{v}_{i+1/2} \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{f}(\mathbf{u})} = \frac{1}{2} (\mathbf{f}(\mathbf{u}_i) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1})) - \frac{1}{2} \mathbf{A}(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) \tag{5.24}$$

şeklinde olur.

## 5.2.2 İkinci Mertebe Rölaksasyon Şeması

(i) *Relaxing Sema:*

İkinci mertebe Rölaksasyon şemasında, uzaysal ayrıklaştırma için çözüme parça-parça sabit fonksiyonlarla yaklaşan birinci mertebe upwind yaklaşımı yerine, parça-parça lineer fonksiyonlarla yaklaşan MUSCL şeması kullanılacaktır. Zaman ayrıklaştırmasında ise, ikinci mertebe TVD Runge-Kutta splitting metodu kullanılacaktır [8]. Eğer  $\mathbf{v} \pm \mathbf{A}\mathbf{u}$  karakteristik değişkenlerinin  $p$ . bileşenlerine MUSCL uygulanırsa,  $u$  ve  $v$ , sırasıyla,  $\mathbf{u}$  ve  $\mathbf{v}$  değişkenlerinin  $p$ . bileşenleri olmak üzere,

$$\begin{aligned}
(v + a_p u)_{i+1/2} &= (v + a_p u)_i + \frac{1}{2} \Delta x \sigma_i^+, \\
(v - a_p u)_{i+1/2} &= (v - a_p u)_{i+1} - \frac{1}{2} \Delta x \sigma_{i+1}^-
\end{aligned} \tag{5.25}$$

olur. Burada  $\sigma_i^\pm$  fonksiyonu  $v \pm a_p u$  değişkeninin  $i$ . alt aralıktaki eğimidir ve

$$\begin{aligned}
\sigma_i^\pm &= \frac{1}{\Delta x} (v_{i+1} \pm a_p u_{i+1} - v_i \mp a_p u_i) \phi(\theta_i^\pm), \\
\theta_i^\pm &= \frac{v_i \pm a_p u_i - v_{i-1} \mp a_p u_{i-1}}{v_{i+1} \pm a_p u_{i+1} - v_i \mp a_p u_i}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\phi$  fonksiyonu eğim sınırlayıcı (slope limiter) fonksiyon olarak adlandırılır ve  $\phi$  için en basit seçim

$$\phi(\theta) = \max(0, \min(1, \theta)) \quad (5.27)$$

şeklinde verilen minmod fonksiyonudur. Daha keskin bir eğim sınırlayıcı fonksiyon van Leer tarafından [15]'de

$$\phi(\theta) = \frac{|\theta| + \theta}{1 + |\theta|} \quad (5.28)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Sayısal şemaların TVD özelliği bir sonraki alt bölümde tartışılacaktır. Ancak, şimdilik (5.25) şemasının TVD özelliği taşıması için  $\phi$  fonksiyonunun

$$0 \leq \frac{\phi(\theta)}{\theta} \leq 2 \quad \text{ve} \quad 0 \leq \phi(\theta) \leq 2 \quad (5.29)$$

koşullarını sağlaması gerektiğini belirtmek uygun olacaktır. (5.25) şemasında  $u_{i+1/2}$  ve  $v_{i+1/2}$  bilinmeyenleri çözümlürse

$$\begin{aligned} u_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(u_i - u_{i+1}) - \frac{1}{2a_p}(v_{i+1} - v_i) + \frac{1}{4a_p}(\sigma_i^+ + \sigma_{i+1}^-), \\ v_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(v_i - v_{i+1}) - \frac{a_p}{2}(u_{i+1} - u_i) + \frac{1}{4}(\sigma_i^+ - \sigma_{i+1}^-) \end{aligned} \quad (5.30)$$

bulunur. (5.30) ayrıklaştırması (5.12) yarı-ayrık sisteminde kullanılırsa, (5.2) rölaksasyon sistemi için MUSCL şeması, bileşen bazında,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{1}{2\Delta x}(v_{i+1} - v_{i-1}) - \frac{a_p}{2\Delta x}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \\ - \frac{1}{4}(\sigma_{i+1}^- - \sigma_i^+ - \sigma_i^- + \sigma_{i-1}^+) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} v + \frac{a_p^2}{2\Delta x}(u_{i+1} - u_{i-1}) - \frac{a_p}{2\Delta x}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) \\ + \frac{a_p}{4}(\sigma_{i+1}^- + \sigma_i^+ - \sigma_i^- - \sigma_{i-1}^+) &= -\frac{1}{\epsilon}(v_i - f^{(p)}(\mathbf{u}_i)) \end{aligned} \quad (5.31)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $f^{(p)}$  ile,  $\mathbf{f}$  fonksiyonunun  $p$ . bileşeni gösterilmiştir. (5.31) denklemlerinde eğimlerin sıfır alınması halinde, yani  $\sigma_i^\mp = 0$  için, (5.17) denklemlerine ulaşılabacağına dikkat edilmelidir.



İkinci merteye TVD Runge-Kutta splitting şeması Jin tarafından [17]'de ayrıntılı olarak verilmiştir. Bu ikinci merteye şemada yine birinci merteye benzer olarak nonlinear terimlere kapalı şema, konveksiyon terimlerine açık şema ile yaklaşılacaktır. Ancak nonlinear adımda bir yerine iki zaman adımı kullanılacaktır. Buna göre  $\{\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n\}$  çiftinin verilmesi halinde  $\{\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}^{n+1}\}$  çifti

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_i^* &= \mathbf{u}_i^n, \\
\mathbf{v}_i^* &= \mathbf{v}_i^n - \frac{\Delta t}{\epsilon} (\mathbf{v}_i^* - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^*)), \\
\mathbf{u}_i^{(1)} &= \mathbf{u}_i^* - \Delta t \mathcal{D}_x \mathbf{v}_i^*, \\
\mathbf{v}_i^{(1)} &= \mathbf{v}_i^* - \Delta t \mathbf{A}^2 \mathcal{D}_x \mathbf{u}_i^*, \\
\mathbf{u}_i^{**} &= \mathbf{u}_i^{(1)}, \\
\mathbf{v}_i^{**} &= \mathbf{v}_i^{(1)} - \frac{\Delta t}{\epsilon} (\mathbf{v}_i^{**} - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^{**})) - 2 \frac{\Delta t}{\epsilon} (\mathbf{v}_i^* - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^*)), \\
\mathbf{u}_i^{(2)} &= \mathbf{u}_i^{**} - \Delta t \mathcal{D}_x \mathbf{v}_i^{**}, \\
\mathbf{v}_i^{(2)} &= \mathbf{v}_i^{**} - \Delta t \mathbf{A}^2 \mathcal{D}_x \mathbf{u}_i^{**}, \\
\mathbf{u}_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_i^{(2)}), \\
\mathbf{v}_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_i^n + \mathbf{v}_i^{(2)})
\end{aligned} \tag{5.32}$$

algoritması kullanılarak bulunacaktır [8]. Bu ikinci merteye şemada da, birinci mertebeye olduğu gibi, hem bir lineer denklem sistemi çözmek gerekmediğine hem de bir nonlinear cebirsel denklem sistemi oluşmadığına dikkat edilmelidir.

(ii) *Relaxed Şema:*

İkinci merteye relaxing şemadan relaxed şemaya geçmek için birinci merteye de uygulanan yaklaşım takip edilecektir. Birinci mertebeye olduğu gibi başlangıç durumunun yerel denge durumu olduğu varsayılırsa,

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{f}(\mathbf{u}^*) + O\left(\frac{\epsilon}{\Delta t}\right), \quad \mathbf{v}^{**} = \mathbf{f}(\mathbf{u}^{**}) + O\left(\frac{\epsilon}{\Delta t}\right) \tag{5.33}$$

eşitlikleri yazılabilir [8]. Bu durumda ikinci merteye bir yaklaşım için, iki zaman adımı olmasına dikkat ederek

$$\epsilon = o(\Delta t^3) \tag{5.34}$$

seçiminin uygun olacağı açıktır. (5.33) ve (5.34) denklemleri (5.32) algoritmasında kullanılır ve  $O\left(\frac{\epsilon}{\Delta t}\right)$  merteye terimler ihmal edilirse (5.32) şeması

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i^{(1)} &= \mathbf{u}_i^n - \Delta t \mathcal{D}_x \mathbf{v}_i^n \Big|_{\mathbf{v}_i^n = \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^n)} , \\ \mathbf{u}_i^{(2)} &= \mathbf{u}_i^{(1)} - \Delta t \mathcal{D}_x \mathbf{v}_i^{(1)} \Big|_{\mathbf{v}_i^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^{(1)})} , \\ \mathbf{u}_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_i^{(2)})\end{aligned}\quad (5.35)$$

formuna indirgenir. Yine (5.35) ile verilen şemanın açık şema olduğuna ve buradan bir CFL koşulu geleceğine dikkat edilmelidir. Ayrıca yine kolayca görülebileceği gibi,  $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$  şeklinde verilen yerel denge kullanılarak ikinci merteye relaxed şema için  $f_{i+1/2}^{(p)}$

$$\begin{aligned}f_{i+1/2}^{(p)} = v_{i+1/2} \Big|_{v=f^{(p)}(\mathbf{u})} &= \frac{1}{2}(f^{(p)}(\mathbf{u}_i) + f^{(p)}(\mathbf{u}_{i+1})) - \frac{1}{2}a_p(u_{i+1} - u_i) \\ &\quad + \frac{\Delta x}{4}(\sigma_i^+ - \sigma_{i+1}^-) \Big|_{v=f^{(p)}(\mathbf{u})}\end{aligned}\quad (5.36)$$

ile verilir. Burada

$$\begin{aligned}\sigma_i^\pm \Big|_{v=f^{(p)}(\mathbf{u})} &= \frac{1}{\Delta x} \left( f^{(p)}(\mathbf{u}_{i+1}) \pm a_p u_{i+1} - f^{(p)}(\mathbf{u}_i) \mp a_p u_i \right) \phi(\theta_i^\pm) , \\ \theta_i^\pm &= \frac{f^{(p)}(\mathbf{u}_i) \pm a_p u_i - f^{(p)}(\mathbf{u}_{i-1}) \mp a_p u_{i-1}}{f^{(p)}(\mathbf{u}_{i+1}) \pm a_p u_{i+1} - f^{(p)}(\mathbf{u}_i) \mp a_p u_i}\end{aligned}\quad (5.37)$$

olarak verilir. (5.35), (5.36) ve (5.37) denklemleri ikinci merteye relaxed şemayı oluşturur. Ayrıca bu şemanın (5.1) denkleminin ayrıklaştırması ile uyumlu olduğuna dikkat edilmelidir.

### 5.3 Relaxed Şemanın TVD Özelliği

Bu bölümde, ilk olarak, fark şemalarının monotonluk özelliği anlatılacak ve bir şemanın TVD özelliğinin olması için gerek ve yeter şartlar sunulacaktır. Daha sonra, önceki alt bölümde tanımlanan Rölaksasyon şemasının, daha doğrusu relaxed şemanın, TVD özelliğini sağladığı gösterilecektir ([17], [18]).

### 5.3.1 Fark Şemalarının Monotonluk Özelliği

Fark şemalarının monotonluk özelliğini açıklamak için  $a$  bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned}u_t + au_x &= 0 \\u(x, 0) &= u_0(x)\end{aligned}\tag{5.38}$$

başlangıç-değer problemi ele alınsın. Bu problemin analitik çözümü  $u(x, t) = u_0(x - at)$  şeklinde verilir. Dikkat edilirse  $u_0(x)$  fonksiyonun, artan (azalan) fonksiyon olması durumunda bir  $t \geq 0$  zamanındaki çözüm de  $x$  değişkeninin bir artan (azalan) fonksiyonu olacaktır. Bu durumda, karşılık gelen fark denklemlerinin çözümünün de benzer bir özelliğe sahip olmasını beklemek yerinde olacaktır.

(5.38) problemine

$$u^{n+1} = Su^n\tag{5.39}$$

şeklinde verilen bir sonlu fark şemasıyla yaklaşılmış olsun. Burada  $S$  adım operatörü,  $u^n$  grid fonksiyonudur. Eğer her  $j$  için  $u_j^n \leq u_{j+1}^n$  ise  $u^n$  fonksiyonuna *monoton artan*,  $u_j^n \geq u_{j+1}^n$  ise *monoton azalan* denir. Ayrıca, eğer  $S$  adım operatörü monoton  $u^n$  grid fonksiyonunu yine monoton olan  $u^{n+1}$  grid fonksiyonuna artma veya azalma yönünü değiştirmeden dönüştürüyorsa, (5.39) sonlu fark şemasına '*monotondur*' denir. Daha pratik olması açısından monotonluk; eğer  $u_j^n$  büyüklüğü,  $u_{j-1}^n$  ve  $u_{j+1}^n$  arasında bulunuyorsa,  $u_j^{n+1}$  büyüklüğü de  $u_{j-1}^{n+1}$  ve  $u_{j+1}^{n+1}$  arasında bulunur şeklinde de tanımlanabilir.

Lineer şemaların monotonluğuyla ilgili aşağıdaki teorem verilebilir [18]:

**Teorem:**

$$u_j^{n+1} = \sum_{k=-p}^q \alpha_k u_{j+k}^n, \quad p, q \geq 0, \quad p + q > 0\tag{5.40}$$

şeklinde verilen lineer fark şeması, ancak ve ancak bütün  $\alpha_k$  katsayıları negatif değilse monotondur.

Bu teoremin ispatı [18]'da verilmektedir (sf 69-70). Ayrıca dikkat edilirse,

şemanın  $u^n = \text{sabit}$  durumu için de çalışması ancak  $\alpha_k$  katsayıları üzerinde

$$\sum_{k=-p}^q \alpha_k = 1 \quad (5.41)$$

şeklinde bir kısıtlama olmasıyla mümkündür.

Yukarıda verilen monotonluk tanımı nonlineer şemalara da genişletilebilir. Buna göre

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-p}^n, u_{j-p+1}^n, \dots, u_{j+q}^n) \quad (5.42)$$

şeklinde verilen bir fark şemasına, eğer  $H$  fonksiyonu argümanlarının herbirinin monoton artan bir fonksiyonu ise monotondur denir. Ayrıca ortalama değer teoremine göre,  $X_k = u_{j+k-1}^n + \Theta_k(u_{j+k}^n - u_{j+k-1}^n)$ ,  $0 < \Theta_k < 1$ ,  $k = -p, \dots, q$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} &= H(u_{j-p}^n, u_{j-p+1}^n, \dots, u_{j+q}^n) - H(u_{j-p-1}^n, u_{j-p}^n, \dots, u_{j+q-1}^n) \\ &= \sum_{k=-p}^q \frac{\partial H(X_{-p}, \dots, X_q)}{\partial u_{j+k}^n} (u_{j+k}^n - u_{j+k-1}^n) \end{aligned} \quad (5.43)$$

yazılabilir. Bu durumda (5.42) şemasının monoton olması için,

$$\frac{\partial H(u_{j-p}, u_{j-p+1}, \dots, u_{j+q})}{\partial u_{j+k}} \geq 0, \quad k = -p, \dots, q \quad (5.44)$$

eşitsizliğinin her  $u_{j-p}, \dots, u_{j+q}$  için sağlanması yeterli olacaktır.

### 5.3.2 TVD Şemaların Özellikleri

Hipebolik korunum yasaları için önerilmiş upwind yaklaşımı gibi birinci mertebeye metodların en tipik özelliği, doğruluğun birinci mertebeye ile sınırlı olması yanında disipasyonun belirleyici olmasıdır. Bu disipatif etkiler sonucu ortaya çıkan dalga genliğinin azalması olayı, birinci mertebeye metodlar için ortadan kaldırılması gereken en önemli sakıncayı oluşturur. Daha doğru çözümler elde etmek için daha yukarı mertebeye metodlara, öncelikle ikinci mertebeye metodlara, başvurulur. Fakat ikinci mertebeye metodlarda da, dispersiyonun belirleyici olduğu gözlenir. İkinci mertebeye metodlarda dispersif etkiler sonucu ortaya çıkan salınımlar bu metodlar için en önemli sakıncayı oluşturur. Bu fiziksel olmayan salınımları yok

etmek için kullanılan yaklaşımlardan biri, yapay viskozite terimleri ilave etmek olmuştur. Ancak bu durumda, hem salınımları yok edecek hem de sayısal metoda en az ölçüde disipatif etki ilave edecek şekilde viskozite terimlerini belirlemek bir problem olarak ortaya çıkar.

Yüksek mertebe fark şemalarının bir özel çözümünün monotonluğu koruyabildiği gözlenmiştir. Bu gözlem araştırmacıları monotonluk özelliğini koruyan yüksek mertebeden şemalar önermeye yöneltmiştir. Bu geliştirilen şemalar arasında günümüzde en çok kullanılanlar FCT (Flux-Corrected Transport) şemaları, TVD (Total Variation Diminishing) şemaları ve ENO (Essentially Non-Oscillatory) şemaları sayılabilir. Bu alt bölümde literatürde yaygın olarak kullanılan TVD şemaların kısa bir tanıtımı gerçekleştirilecektir.

TVD şemaların teorisi (5.38) problemi yardımıyla tanıtılacaktır. Öncelikle (5.38) başlangıç-değer probleminde,  $u_0(x)$  fonksiyonunun *toplam varyasyonunun* sınırlı düzgün bir fonksiyon olduğu varsayalım:

$$TV[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right| dx \leq C < \infty . \quad (5.45)$$

Buradan (5.38) probleminin çözümünün  $TV[u(x, t)]$  toplam varyasyonunun, herhangi bir  $t = t^* > 0$  zamanında

$$TV[u(x, t^*)] = TV[u_0(x)] \quad (5.46)$$

koşulunu sağlayacağı açıktır. (5.38) problemi ile uyumlu ve eşit zaman ve uzay adımları için tanımlanmış bir açık şema,  $p, q \geq 0$  ve  $p + q > 0$  olmak üzere,

$$u_j^{n+1} = u_j^n - H(u_{j-p}^n, u_{j-p+1}^n, \dots, u_{j+q}^n) \quad (5.47)$$

şeklinde verilmiş olsun. Burada sabit fonksiyonun türevinin sıfır olması dolayısıyla  $H(u, \dots, u, \dots, u) = 0$  koşulunun sağlandığı varsayılmaktadır. (5.47) denklemi  $S$  adım operatörü olmak üzere

$$u^{n+1} = Su^n \quad (5.48)$$

şeklinde yeniden yazılsın. Bu şema için,  $n$ . zaman adımından  $(n + 1)$ . zaman adımına geçerken  $u^n$  sayısal çözümünün toplam varyasyonunun en azından

artmaması istenecektir. Sayısal çözümün toplam varyasyonunun artmaması koşulunu, yani

$$TV(u^{n+1}) = TV(Su^n) \leq TV(u^n) \quad (5.49)$$

koşulunu, sağlayan şemalara *TVD şema* denir. Burada

$$\begin{aligned} TV(u^n) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Delta_{j+1/2}u^n| \\ \Delta_{j+1/2}u^n &= u_{j+1}^n - u_j^n \end{aligned} \quad (5.50)$$

tanımları yapılmıştır. Monoton ve TVD şemalar arasındaki ilişki aşağıdaki teorem yardımıyla verilir [18]:

**Teorem:**

- (i) TVD şemalar monotonluk özelliği taşır.
- (ii) Monoton şemalar TVD koşulunu sağlar.

Bu teoremin ispatı [18]'de ayrıntılı biçimde verilmiştir (sf 73-75).

### 5.3.3 Relaxed Şemanın TVD Olması

Yeterince küçük ve pozitif olan  $\epsilon$  rölaksasyon zamanı parametresine bağlı olarak yazılan relaxing şemanın ilk teriminin, yani relaxed şemanın, davranışını incelemek sayısal şemayı anlamak açısından önemlidir. Bu alt bölümde (5.1) korunum yasasının skaler haline karşılık gelen relaxed şemanın TVD özelliği taşıdığı gösterilecektir [8]. Skaler korunum yasası için Cauchy problemi

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}f(u) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad u \in \mathbb{R} \quad (5.51)$$

şeklinde olup, bu korunum yasasına karşılık gelen rölaksasyon sistemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}v &= 0, \quad v \in \mathbb{R}^1 \\ \frac{\partial}{\partial t}v + a^2 \frac{\partial}{\partial x}u &= -\frac{1}{\epsilon}(v - f(u)) \end{aligned} \quad (5.52)$$

şeklinde verilir. Aşağıda bu rölaksasyon sistemi için birinci ve ikinci mertebeye şemalar ayrı ayrı ele alınacaktır.

(i) *Birinci Mertebe Relaxed Şema*

(5.17) denklemleriyle verilmiş olan yarı-ayrık relaxing şemanın, skaler korunum yasası için, tek zaman adımlı ayrıklaştırılması

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2\Delta x}(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) - \frac{a}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) &= 0, \\ \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + \frac{a^2}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \frac{a}{2\Delta x}(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) &= -\frac{1}{\epsilon}(v_i^n - f(u_i^n)) \end{aligned} \quad (5.53)$$

şeklinde yazılabilir.  $\epsilon$  parametresi sıfıra giderken yapılan açılımın sonucu ilk terim,  $\lambda = \Delta t/\Delta x$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} v_i^n &= f(u_i^n) \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\lambda}{2}(f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)) + \frac{a\lambda}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (5.54)$$

şeklinde verilir. Burada (5.54) relaxed şemasının (5.42) formunda olduğuna dikkat edilmelidir. (5.54) şemasının monoton olması için (5.44) koşulu sağlanmalıdır. (5.44) koşulunun (5.54) relaxed şemasına uygulanması ile,  $a\lambda \leq 1$  ve  $-a \leq f'(u) \leq a$  koşulları elde edilir. Bu koşullardan birincisi iyi bilinen CFL koşulu, diğeri ise altkarakteristik koşuldur. Sonuç olarak, bu iki koşulu sağlayan birinci mertebe relaxed şema monotonluk özelliğine sahip olacaktır. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir konu da, (5.54) sisteminin konveksiyon kısmının sabit katsayılı ve lineer olması dolayısıyla, problemi karakteristik metotla çözenin daha doğru olabileceğinin düşünülmemesi gerektiğidir. Çünkü karakteristik metotta  $a\lambda \leq 1$  koşulundan farklı olarak  $a\lambda = 1$  alınır ve bu duruma karşı gelen relaxed şema

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2}(f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)) + \frac{1}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (5.55)$$

şeklinde verilir. (5.55) denklemleriyle verilen şema orijinal Lax-Friedrichs şemasıdır ve literatürde tüm birinci mertebe şemalar içinde maksimum disipasyona sahip olan olarak bilinir.

(ii) İkinci Mertebe Relaxed Şema

İkinci mertebe yaklaşımda kullanılan (5.30) denklemleri, verildiği biçiminden daha genel olarak,

$$\begin{aligned} u_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(u_i - u_{i+1}) - \frac{1}{2a_p}(v_{i+1} - v_i) + \frac{1-\beta}{4a_p}(\sigma_i^+ + \sigma_{i+1}^-), \\ v_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(v_i - v_{i+1}) - \frac{a_p}{2}(u_{i+1} - u_i) + \frac{1-\beta}{4}(\sigma_i^+ - \sigma_{i+1}^-) \end{aligned} \quad (5.56)$$

şeklinde kullanılacaktır. Burada  $\sigma_j^\pm$  eğimleri (5.26) denklemleriyle verildiği gibidir. Ayrıca  $\beta$

$$\beta = \begin{cases} a\lambda \equiv \nu \leq 1 & \text{ileri fark (Euler) zaman ayrıklaştırması için} \\ \beta = 0 & \text{alt bölüm (5.2.2)'deki metod için} \end{cases} \quad (5.57)$$

şeklinde verilen bir pozitif sabittir. Şimdiki analiz  $\beta = \nu$  durumu için yapılp,  $\beta = 0$  durumu yorumlanacaktır. Skaler korunum yasası için ikinci mertebe relaxed şema

$$\begin{aligned} v_i^n &= f(u_i^n) \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\lambda}{2}(f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)) + \frac{a\lambda}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \\ &\quad + \frac{1-\beta}{4}(\sigma_{i+1}^- - \sigma_i^- + \sigma_{i-1}^+ - \sigma_i^+) \end{aligned} \quad (5.58)$$

şeklinde verilir. Bundan sonra ifadeleri basitleştirmek için  $t = t_n$  zamanına karşılık gelen  $n$  indisi kullanılmayacaktır. Bu şemanın (5.50) ile tanımlanan toplam varyasyonu zamanla azalır, yani (5.49) koşulu sağlanırsa, o zaman şema TVD özelliği taşır denir. Yine ifadeleri basitleştirmek için,  $C_i$  ve  $D_i$  sabitleri

$$\begin{aligned} C_i &= \frac{1}{2}\lambda \left( a + \frac{f(u_{i+1}) - f(u_i)}{u_{i+1} - u_i} \right) \geq 0 \\ D_i &= \frac{1}{2}\lambda \left( a - \frac{f(u_{i+1}) - f(u_i)}{u_{i+1} - u_i} \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (5.59)$$

şeklinde tanımlansın. Burada  $C_i$  ve  $D_i$  sabitleri *altkarakteristik* koşul nedeniyle pozitif olurlar. Böylece (5.58) denklemleri

$$u_i^{n+1} = u_i - C_{i-1}(u_i - u_{i-1}) + D_i(u_{i+1} - u_i) + \frac{\Delta t}{4}(1-\beta)(\sigma_{i+1}^- - \sigma_i^- + \sigma_{i-1}^+ - \sigma_i^+) \quad (5.60)$$



formuna indirgenir. Buradan

$$E_{i+1/2} = \frac{\Delta t}{4}(1-\beta) \left[ (\sigma_{i+2}^- - \sigma_{i+1}^-) - (\sigma_{i+1}^- - \sigma_i^-) \right] - \frac{\Delta t}{4}(1-\beta) \left[ (\sigma_{i+1}^+ - \sigma_i^+) - (\sigma_i^+ - \sigma_{i-1}^+) \right] \quad (5.61)$$

olmak üzere,

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = (1 - C_i - D_i)(u_{i+1} - u_i) + C_{i-1}(u_i - u_{i-1}) + D_{i+1}(u_{i+2} - u_{i+1}) + E_{i+1/2} \quad (5.62)$$

yazılabilir. Ayrıca (5.59) kullanılarak eğimler

$$\sigma_i^+ = \frac{2}{\lambda h} C_i \phi_i^+(u_{i+1} - u_i), \quad \sigma_i^- = -\frac{2}{\lambda h} D_i \phi_i^-(u_{i+1} - u_i) \quad (5.63)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu durumda

$$E_{i+1/2} = \frac{1}{2}(1-\beta) \left[ -\phi_{i+2}^- D_{i+2}(u_{i+3} - u_{i+2}) + (2\phi_{i+1}^- D_{i+1} - \phi_{i+1}^+ C_{i+1})(u_{i+2} - u_{i+1}) + (2\phi_i^+ C_i - \phi_i^- D_i)(u_{i+1} - u_i) - \phi_{i-1}^+ C_{i-1}(u_i - u_{i-1}) \right] \quad (5.64)$$

yazılabilir. Böylece (5.62) denklemi

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = \left( 1 - [1 - (1-\beta)\phi_i^+] C_i - [1 + \frac{1}{2}(1-\beta)\phi_i^-] D_i \right) (u_{i+1} - u_i) + [1 + \frac{1}{2}(1-\beta)\phi_{i-1}^+] C_{i-1}(u_i - u_{i-1}) + \left( [1 - (1-\beta)\phi_{i+1}^-] D_{i+1} - \frac{1}{2}(1-\beta)\phi_{i+1}^+ C_{i+1} \right) (u_{i+2} - u_{i+1}) - \frac{1}{2}(1-\beta)\phi_{i+2}^- D_{i+2}(u_{i+3} - u_{i+2}) \quad (5.65)$$

biçimine dönüşür. Ayrıca

$$\theta_i^+ C_i(u_{i+1} - u_i) = C_{i-1}(u_i - u_{i-1}), \quad \theta_i^- D_i(u_{i+1} - u_i) = D_{i-1}(u_i - u_{i-1}) \quad (5.66)$$

olduğuna dikkat edilirse,

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = \left( 1 - \left[ 1 - (1-\beta)\phi_i^+ + \frac{1}{2}(1-\beta)\frac{\phi_{i+1}^+}{\theta_{i+1}^+} \right] C_i \right) (u_{i+1} - u_i) + \dots$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ 1 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_i^- \right] D_i \Big) (u_{i+1} - u_i) \\
& + \left[ 1 - \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_{i-1}^+ \right] C_{i-1} (u_i - u_{i-1}) \\
& + \left[ 1 + (1 - \beta)\phi_{i+1}^- - \frac{1}{2}(1 - \beta)\frac{\phi_{i+2}^-}{\theta_{i+2}^-} \right] D_{i+1} (u_{i+2} - u_{i+1})
\end{aligned} \tag{5.67}$$

yazılabilir. Eğim sınırlayıcılar üzerindeki (5.29) koşulları ve  $\beta \leq 1$  CFL koşulu, (5.67) eşitliğinin sağ tarafındaki katsayıların negatif olmasını engeller, yani

$$1 - \left[ 1 - (1 - \beta)\phi_i^+ + \frac{1}{2}(1 - \beta)\frac{\phi_{i+1}^+}{\theta_{i+1}^+} \right] C_i - \left[ 1 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_i^- \right] D_i \geq 0, \tag{5.68}$$

$$1 - \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_{i-1}^+ \geq 0, \tag{5.69}$$

$$1 + (1 - \beta)\phi_{i+1}^- - \frac{1}{2}(1 - \beta)\frac{\phi_{i+2}^-}{\theta_{i+2}^-} \geq 0 \tag{5.70}$$

olur. (5.69) eşitsizliğini göstermek için  $\beta \leq 1$  şeklinde verilen CFL koşulunun ve (5.29)<sub>2</sub> koşulunun kullanılması yeterli olacaktır:

$$1 - \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_{i-1}^+ \geq 1 - (1 - \beta) \geq \beta \geq 0. \tag{5.71}$$

(5.70) eşitsizliğini göstermek için (5.29) koşulları kullanılır:

$$\begin{aligned}
& 1 + (1 - \beta)\phi_{i+1}^- - \frac{1}{2}(1 - \beta)\frac{\phi_{i+2}^-}{\theta_{i+2}^-} \\
& = 1 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_{i+1}^- + \frac{1}{2}(1 - \beta) \left( \phi_{i+1}^- - \frac{\phi_{i+2}^-}{\theta_{i+2}^-} \right) \\
& \geq 1 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_{i+1}^- + (1 - \beta) = 2 - \beta \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.72}$$

(5.68) eşitsizliğini göstermek için, ilk olarak eşitsizlik

$$1 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_i^+ C_i - (C_i + D_i) - \frac{1}{2}(1 - \beta) \left[ \left( \frac{\phi_{i+1}^+}{\theta_{i+1}^+} - \phi_i^+ \right) C_i + \phi_i^- D_i \right] \tag{5.73}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Ayrıca  $C_i + D_i = a\lambda = \nu \leq 1$  ve

$$\frac{1}{2}(1 - \beta) \left[ \left( \frac{\phi_{i+1}^+}{\theta_{i+1}^+} - \phi_i^+ \right) C_i + \phi_i^- D_i \right] \leq (1 - \beta)(C_i + D_i) \tag{5.74}$$

olduğuna dikkat edilirse,

$$\begin{aligned}
1 & - \left[ 1 - (1 - \beta)\phi_i^+ + \frac{1}{2}(1 - \beta)\frac{\phi_{i+1}^+}{\theta_{i+1}^+} \right] C_i - \left[ 1 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_i^- \right] D_i \\
& \geq 1 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_i^+ C_i - (C_i + D_i) - (1 - \beta)(C_i + D_i) \\
& = 1 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_i^+ C_i - (2 - \nu)\nu \\
& \geq 1 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_i^+ C_i - \max_{0 \leq \nu \leq 1} (2 - \nu)\nu = \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_i^+ C_i \geq 0 \quad (5.75)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece (5.67) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
|u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| & \leq \left( 1 - \left[ 1 - (1 - \beta)\phi_i^+ + \frac{1}{2}(1 - \beta)\frac{\phi_{i+1}^+}{\theta_{i+1}^+} \right] C_i \right. \\
& \quad \left. - \left[ 1 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_i^- \right] D_i \right) |u_{i+1} - u_i| \\
& \quad + \left[ 1 - \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_{i-1}^+ \right] C_{i-1} |u_i - u_{i-1}| \\
& \quad + \left[ 1 + (1 - \beta)\phi_{i+1}^- - \frac{1}{2}(1 - \beta)\frac{\phi_{i+2}^-}{\theta_{i+2}^-} \right] D_{i+1} |u_{i+2} - u_{i+1}| \quad (5.76)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada (5.66) özelliği kullanılarak bulunan

$$\begin{aligned}
\phi_i^+ C_i |u_{i+1} - u_i| & = \frac{\phi_i^+}{\theta_i^+} C_{i-1} |u_i - u_{i-1}|, \\
\phi_i^- D_i |u_{i+1} - u_i| & = \frac{\phi_i^-}{\theta_i^-} D_{i-1} |u_i - u_{i-1}| \quad (5.77)
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklerin (5.76) eşitsizliğinde kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}
|u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| & \leq \left( 1 - \left[ 1 - (1 - \beta)\phi_i^+ \right] C_i - \left[ 1 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_i^- \right] D_i \right) |u_{i+1} - u_i| \\
& \quad + \left[ 1 - \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_{i-1}^+ \right] C_{i-1} |u_i - u_{i-1}| \\
& \quad + \left[ 1 + (1 - \beta)\phi_{i+1}^- \right] D_{i+1} |u_{i+2} - u_{i+1}| \\
& \quad + \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_i^+ C_i |u_{i+1} - u_i| \\
& \quad + \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_{i+1}^+ C_{i+1} |u_{i+2} - u_{i+1}| \\
& \quad + \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_{i+1}^- D_{i+1} |u_{i+2} - u_{i+1}| \\
& \quad - \frac{1}{2}(1 - \beta)\phi_{i+2}^- D_{i+2} |u_{i+3} - u_{i+2}| \quad (5.78)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. (5.78) eşitsizliği tüm  $i$  değerleri üzerinde toplanırsa ulaşılmak istenen TVD özelliği, yani

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n), \quad \text{her } n \geq 0 \text{ için} \quad (5.79)$$

sağlanmış olur. Yukarıdaki analizin sonucunu şu teorem ile ifade etmek mümkündür.

**Teorem:** Skaler korunum yasası için (5.29) koşullarını sağlayan eğim sınırlayıcıları kullanılarak oluşturulmuş (5.58) ikinci mertebe relaxed şeması,  $a\lambda \leq 1$  CFL koşulunun ve  $-a \leq f'(u) \leq a$  altkarakteristik koşulunun sağlanması kısıtlamaları altında TVD özelliğine sahiptir.

İkinci mertebe relaxed şemasının skaler korunum yasası ile uyumlu olması ve TVD özelliği, şemanın yakınsak olduğunu ve skaler korunum yasasının zayıf çözümüne yakınsadığını gösterir [16].

Son olarak belirtilmesi gereken bir nokta da  $\beta = 0$  durumunda şemanın hangi koşullarda TVD özelliğini koruyacağıdır. Bu koşulun

$$a\lambda \leq \frac{1}{2} \quad (5.80)$$

olması gerektiği, (5.75) eşitsizliğinden kolaylıkla bulunur.

#### 5.4 Sayısal Deneyler

Bu alt bölümde, kesin çözümleri bilinen bazı problemler birinci mertebe rölaksasyon metodu kullanılarak yaklaşık olarak çözülecektir. Bütün örneklerde zaman adımlarının sayısı olan  $M$  değeri, uzaydaki alt aralık sayısı olan  $N$  değerine bağlı olarak (5.80) koşulu sağlanacak şekilde seçilmiştir. Sayısal şemanın yakınsama hızı

$$\frac{\ln(E(N_2)/E(N_1))}{\ln(N_1/N_2)} \quad (5.81)$$

formülü kullanılarak hesaplanmıştır. Burada  $E(N_j)$  ile  $N_j$  sayıda alt aralık kullanıldığında bulunan  $L_\infty$ -hatası gösterilir.

### 5.4.1 Lineer Dalga Denklemi

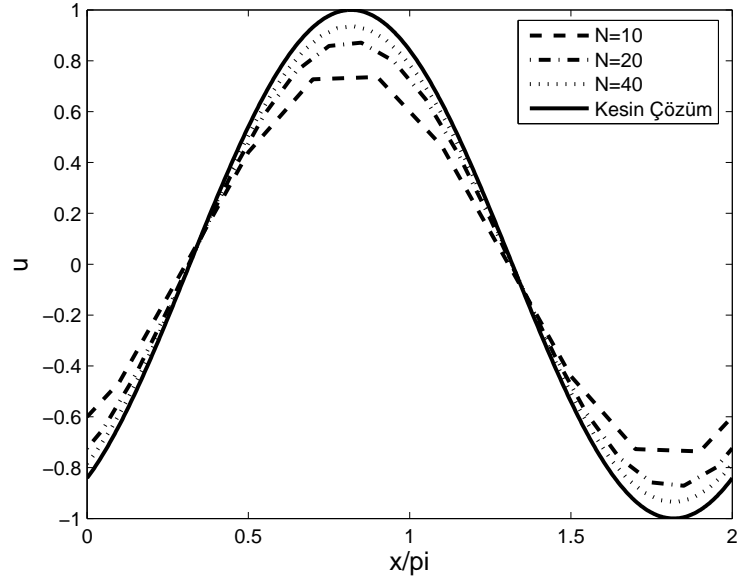
İlk olarak,  $u_t + u_x = 0$  şeklindeki lineer dalga denklemi ve  $u(x, 0) = \sin x$  başlangıç koşulu ile tanımlanmış başlangıç-değer problemi için, hem kesin çözüm hem de birinci mertebe rölaksasyon metodu kullanılarak elde edilmiş yaklaşık çözümler sunulacaktır. Şekil 5.1'de problemin kesin çözümü ve  $N = 10$ ,  $N = 20$ ,  $N = 40$  değerlerine karşılık gelen yaklaşık çözümler,  $t = 1$  zamanı için karşılaştırılmıştır. Metodun yakınsama hızının yaklaşık olarak birinci mertebe olduğu Tablo 5.1'de sunulan sayısal sonuçlardan açıktır.

**Tablo 5.1** Lineer dalga problemi için  $t = 1$  zamanında  $L_\infty$ -hata normları ve yakınsama hızı.

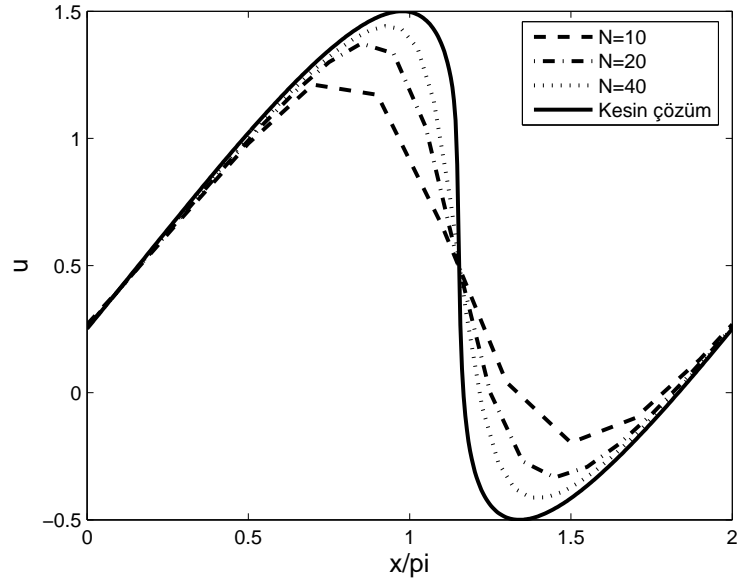
$N$	$L_\infty$ -hatası	Mertebe
40	0,063916	-
80	0.032462	0.977
160	0.016374	0.988
320	0.008221	0.995

### 5.4.2 Viskoz Olmayan Burgers Denklemi

İkinci olarak,  $u_t + (u^2/2)_x = 0$  şeklindeki viskoz olmayan Burgers denklemi ve  $u(x, 0) = 0.5 + \sin x$  başlangıç koşulu ile tanımlanmış başlangıç-değer problemi için, hem kesin çözüm hem de birinci mertebe rölaksasyon metodu kullanılarak elde edilmiş sonuçlar sunulacaktır. Şekil 5.2'de problemin kesin çözümü ve  $N = 10$ ,  $N = 20$ ,  $N = 40$  değerlerine karşılık gelen yaklaşık çözümler,  $t = 1$  zamanı için karşılaştırılmıştır. Metodun yakınsama hızının ise yaklaşık olarak birinci mertebe olduğu Tablo 5.2'de sunulan hata analizinden açıktır.



**Şekil 5.1:** Lineer dalga denklemi için kesin çözümün ve birinci merteye rölaksasyon metodu kullanılarak bulunmuş yaklaşık çözümlerin  $t = 1$  zamanı için karşılaştırılması ( $N = 10$ ,  $N = 20$  ve  $N = 40$  alt aralık alınmıştır).



**Şekil 5.2:** Viskoz olmayan Burgers denklemi için kesin çözümün ve birinci merteye rölaksasyon metodu kullanılarak bulunmuş yaklaşık çözümlerin  $t = 1$  zamanı için karşılaştırılması ( $N = 10$ ,  $N = 20$  ve  $N = 40$  alt aralık alınmıştır).

**Tablo 5.2** Viskoz olmayan Burgers problemi için  $t = 0.5$  zamanında  $L_\infty$ -hata normları ve yakınsama hızı.

$N$	$L_\infty$ -hatası	Mertebe
40	0.071801	-
80	0.036453	0.978
160	0.018292	0.995
320	0.009165	0.997

### 5.4.3 Homojen Olmayan Burgers Denklemi

Üçüncü olarak,  $u_L$ ,  $u_R$ ,  $\alpha$  ve  $x_m$  sabitler olmak üzere, [19]'da tanıtilan

$$u_t + uu_x = \alpha u, \quad \alpha > 0 \quad (5.82)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L & \text{eğer } x < x_m \\ u_R & \text{eğer } x > x_m \end{cases} \quad (5.83)$$

başlangıç-değer problemi için, hem kesin çözüm hem de birinci mertebe rölaksasyon metodu kullanılarak elde edilmiş sonuçlar sunulacaktır. Eğer  $u_L > u_R$  ise çözüm

$$s = \frac{u_L + u_R}{2} e^{\alpha t} \quad (5.84)$$

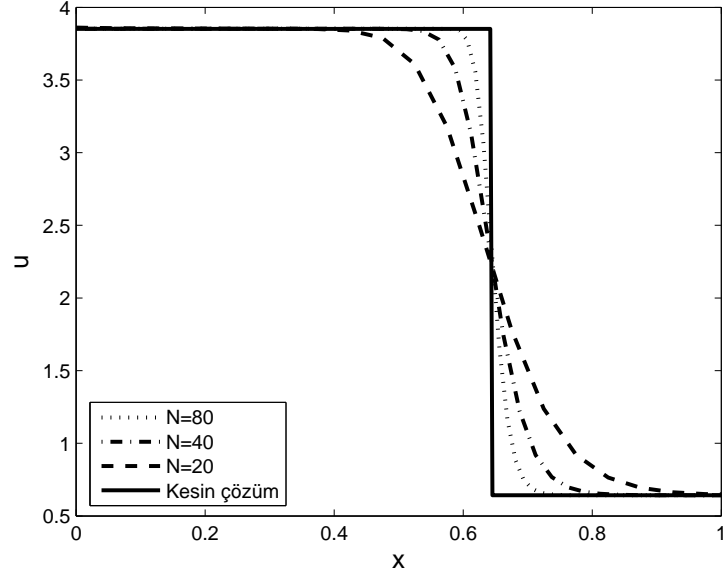
hızıyla yayılan bir şok dalgasıdır. Bir  $t$  anında şok dalgasının bulunduğu nokta

$$x_p = x_m + \frac{u_L + u_R}{2\alpha} (e^{\alpha t} - 1) \quad (5.85)$$

ile verilir. Bu durumda analitik çözüm

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L e^{\alpha t} & \text{eğer } x < x_p \\ u_R e^{\alpha t} & \text{eğer } x > x_p \end{cases} \quad (5.86)$$

şeklinde olur. Şekil 5.3'de problemin kesin çözümü ve  $N = 20$ ,  $N = 40$ ,  $N = 80$  değerlerine karşılık gelen yaklaşık çözümler,  $t = 0.25$  zamanı ve  $u_L = 3$ ,  $u_R = 0.5$ ,  $\alpha = 1$  değerleri için karşılaştırılmıştır.



**Şekil 5.3:** Homojen olmayan Burgers denklemi için kesin çözümün ve birinci mertebe rölaksasyon metodu kullanılarak bulunmuş yaklaşık çözümlerin  $t = 0.25$  zamanı için karşılaştırılması ( $N = 20$ ,  $N = 40$  ve  $N = 80$  alt aralık alınmıştır).



## 6. SONUÇ

Bu tezde ince hiperelastik tüplerin mambran denklemlerini veren varyasyonel formülasyon bir asimptotik açılım tekniği yardımıyla türetilmiştir. Hiperelastik mambran tüplerde yayılan ivme dalgalarının büyüme ve sönmesi üzerine başlangıç deformasyonunun etkisi tartışılmıştır.

Mambran denklemlerinin bu tezde sunulan türetmesinin literatürde sunulanlar ile [4, 5] en önemli farkı, şimdiki türetmenin üç boyutlu elastisite teorisinin virtüel iş ilkesi üzerine inşa edilmiş olmasıdır. Böylece literatürdeki çalışmalardan farklı olarak, mambran denklemlerini Euler-Lagrange denklemleri olarak veren virtüel iş ilkesini yazabilmek mümkün olmuştur.

Şimdiki tez çalışmasında ayrıca, bir nonlinear elastik mambran tüpte yayılan ivme dalgasının dalga cephesi civarında açılım tekniği yardımıyla incelenmesi sonucu iki önemli tespit yapılmıştır. Bu tespitlerden birincisi, ivme dalgalarının genliğinin ancak ortamda bir başlangıç deformasyonu mevcut ise sınırsız şekilde büyüyebileceğidir. İkinci olarak bu durumun, Tüzel ve Erbay [4] tarafından sayısal olarak incelenen elastik mambran tüpün dinamik uzaması probleminde gözlenen şok oluşumunu tamamen açıklayabildiğidir.

İvme dalgalarının yayılımının incelenmesiyle ulaşılan sonucu, [4] ve [5]'de kullanılan farklı bir sayısal metod kullanarak sayısal olarak yeniden gözlemek amaçlanmıştır. Bunun için Riemann problemi çözümüne gerek kalmadan sonuca ulaşmamızı sağlayan ve bu nedenle literatürde giderek daha yaygın olarak kullanılan Rölaksasyon sayısal metodu seçilmiştir. Birinci mertebe Rölaksasyon metodunun bilgisayar programı haline getirilmesi tamamlanmış ve sayısal deneylerle test edilmiş ancak, ikinci mertebe rölaksasyon metodunun uygulandığı sayısal örneklerde ikinci mertebe doğruluğa sahip bir bilgisayar programı haline

getirilmesi yetiştirilememiştir. İvme dalgalarının genliğinin büyümesinden kaynaklanan şok oluşumunu, rölaksasyon sayısal metodunu kullanarak gözlemek araştırılması gereken bir problem olarak beklemektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] **Ogden, R.W.**, 1984. Non-linear Elastic Deformations, Ellis Horwood Limited, Chichester.
- [2] **Haughton, D.M.**, 2001. Elastic membranes in Nonlinear Elasticity: Theory and Applications, LMS lecture notes No.283, ed. Ogden, R.W, Fu, Y.B., pp. 233-267, Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] **Erbay, H.A. and Demiray, H.**, 1995. Finite axisymmetric deformations of elastic tubes: An approximate method, *J. Eng. Math.*, **29**, 451-472.
- [4] **Tüzel, V.H. and Erbay, H.A.**, 2004. The dynamic response of an incompressible non-linearly elastic membrane tube subjected to a dynamic extension, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **39**, 515-537.
- [5] **Erbay, H.A. and Tüzel, V.H.**, 2005. Dynamic extension of a compressible non-linearly elastic membrane tube, *IMA Journal of Applied Mathematics*, **70**, 25-38.
- [6] **Tait, R.J. and Zhong, J.L**, 1994. Wave propagation in a non-linear elastic tube, *Bull. Tech. Univ.*, **47**, 127-150.
- [7] **Tait, R.J. and Zhong, J.L**, 1994. Dynamic extension and twist of a nonlinear elastic tube, *J. Non-Linear Mech.*, **30**, 6, 887-898.
- [8] **Jin, S. and Xin, Z.**, 1995. The Relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions, *Comm. Pure Appl. Math*, **48**, 235-276.
- [9] **Tüzel, V.H.**, 2001. An Asymptotic Membrane Theory of Nonlinearly Elastic Tubes And a Godunov-Type Finite Volume Method for an Impact Problem, M.Sc. Thesis, Istanbul Technical University.
- [10] **Narasimhan, Maysore N.L.**, 1993. Principles of Continuum Mechanics, John Wiley, New York.
- [11] **Blatz, P.J. and Ko, W.L.**, 1962. Applications of finite elasticity theory to deformation of rubbery materials, *Trans. Soc. Rheology*, **6**, 223-251.

- [12] **Holzappel, G. A.**, 2000. *Nonlinear Solid Mechanics*, John Wiley & Sons, England.
- [13] **Whitham, G. B.**, 1974. *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley&Sons, New York.
- [14] **Chapman, S. and Cowling T.G.** , 1970. *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases*, 3rd Edition, Cambridge Univ. Press.
- [15] **van Leer, B.**, 1979. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method, *J. Comput. Phys.*, **32**, 101-136.
- [16] **Leveque, R.J.**, 1992. *Numerical Methods for Conservation Laws*, Second edition, Birkhauser, Basel .
- [17] **Jin, S.**, 1995. Runge-Kutta Methods for Hyperbolic Conservation Laws with Stiff Relaxation Terms, *J. Comput. Phys.*, **122**, 51-67.
- [18] **Ganzha, V.G. and Vorozhtsov E.V.**, 1996. *Numerical Solutions for Partial Differential Equations*, CRC Press, Boca Raton.
- [19] **Chalabi, A.**, 1992. Stable upwind schemes for hyperbolic conservation laws with source terms, *IMA J. Num. Anal.*, **12**, 217-241.

## ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Adana'da doğdu. İlköğretimi Atatürk İlkokulu'nda ortaokul eğitimini Sıtkı Kulak İlköğretim okulunda lise eğitimini ise Şehit Temel Cingöz Lisesi'nde tamamladı. 1998-2003 yılları arasında İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği programına devam etti ve Haziran 2003'te mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü'nde lisans üstü eğitimine başladı.