

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**2+1 BOYUTTA KONFORMAL GERİLİM-ENERJİ TANSÖRLÜ BİR SKALER
ALANIN KÜTLE ÇEKİM İLE ETKİLEŞMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizik Müh. Hasan Tuncay ÖZÇELİK

(509991112)

Anabilim Dalı : FİZİK

Programı : FİZİK MÜHENDİSLİĞİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU

ARALIK 2002

**2+1 BOYUTTA KONFORMAL GERİLİM-ENERJİ TANSÖRLÜ BİR SKALER
ALANIN KÜTLE ÇEKİM İLE ETKİLEŞMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Fizik Müh. Hasan Tuncay ÖZÇELİK
(509991112)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 22 ARALIK 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 15 OCAK 2003**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ayşe Hümeysra BİLGE (İTÜ)
Yard. Doç. Dr. Meltem GÜNGÖRMEZ (İTÜ)**

ARALIK 2002

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmalarım sırasında bana yardımcı olan Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU'ya teşekkür ederim.

ARALIK 2002

Hasan Tuncay ÖZÇELİK

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
KISALTMA LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. ÜÇ BOYUTTA EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİ	3
2.1. Einstein Denklemleri ve Vakum Durumundaki Çözümü	3
2.2. Skaler Alanın Kütle Çekimi ile Etkileşmesi Durumundaki Çözümü	4
3. BTZ KARADELİKLERİ	13
3.1. Yüklü ve Dönen BTZ Kara Deliği	13
3.2. Skaler Alan ile Etkileşen BTZ Kara Deliği	18
4. BTZ KARADELİKLERİNİN TERMODİNAMİĞİ	21
4.1. Kara Delik Termodinamiği ve KKW Metodu	21
4.2. Vakum Durumunda Termodinamik Niceliklerin Bulunması	24
4.3. Dönme Durumunda Termodinamik Niceliklerin Bulunması	26
4.4. Yüklü Durumda Termodinamik Niceliklerin Bulunması	28
4.5. Skaler Alan Olması Durumunda Termodinamik Niceliklerin Bulunması	30
5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	32
EKA	33
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	35

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No.

Şekil 3.2.1.	(2.2.55) denkleminin nümerik çözümünden elde edilen grafik	19
--------------	--	----

SEMBOL LİSTESİ

- $g_{\mu\nu}$: Metrik tansörü
- $R_{\mu\nu}$: Ricci tansörü
- R : Ricci skaleri
- Λ : Kozmolojik sabit
- Θ : Skaler alan
- T_{μ}^{ν} : Gerilim-Enerji Tansörü
- M : ADM Kütlesi
- J : Açısal Momentum
- Q : Yük
- r_{+} : Dış olay ufku
- r_{-} : İç olay ufku

KISALTIMA LİSTESİ

AdS : Anti – de Sitter

BTZ : Bañados, Teitelboim ve Zanelli çözümlü

ADM : Arnowit, Deiser, Meisner

KKW : Keski-Vakkuri, Kraus ve Wilczek

2+1 BOYUTTA KONFORMAL GERİLİM-ENERJİ TANSÖRLÜ BİR SKALER ALANIN KÜTLE ÇEKİMİ İLE ETKİLEŞMESİ

ÖZET

Üç boyutlu uzay-zamanda genel görelilik, klasik ve kuantum kütle çekiminin temellerinin araştırılmasında popüler bir model olmaktadır. 2+1 boyutta kütle çekiminin 3+1 boyutlu kütle çekim sistemlerini kavramada fiziksel olarak gerçekçi olmadığına yaygın olarak inanılıyordu. Bunun nedeni 2+1 boyutta genel görelilik newtonyen limite ve yayılma serbestlik derecesine sahip olmamasıdır. Bu yüzden 1992 yılında Bañados, Teitelboim and Zanelli (BTZ) 2+1 boyutlu kütle çekiminin bir kara delik çözümüne sahip olduğunu göstermeleri çok büyük bir sürpriz oldu. BTZ çözümlerinin Schwarzschild and Kerr çözümlerinden önemli farkları vardır. BTZ çözümleri asimptotik anti-de Sitter uzayındadır ve eğrilik tekilliğine sahip değildir. Schwarzschild and Kerr çözümleri asimptotik düz uzaydadır ve eğrilik tekilliğine sahiptir. BTZ kara delikleri olay ufkuna sahiptir. Eğer Dönen durumda ise iç olay ufkuna da sahiptir.

Bizim çalışmamızda, negatif kozmolojik sabite sahip Einstein denklemlerinin çözümü olan üç boyutlu kara delik verilen konformal bir skaler alan ile kuple etmektedir. Bizim amacımız termodinamik nicelikleri hesaplamaktır. Bu nicelikler entropi, sıcaklık ve emisyon oranıdır. Entropi bulunmadan önce metrik Einstein denklemleri çözülmek zorundadır. Keski-Vakkuri, Kraus ve Wilczek tarafından bulunan KKW yöntemi entropi, sıcaklık ve emisyon oranını bulmak için kullanılır. Bu yöntemde metrik zamandan bağımsızdır.

THE INTERACTION OF A SCALAR FIELD HAVING A CONFORMAL STRESS-ENERGY TENSOR WITH GRAVITY IN 2+1 DIMENSIONS

SUMMARY

General relativity in three space-time dimensions has become an increasingly popular model in which to explore the foundations of classical and quantum gravity. It has been widely believed that (2+1)-dimensional gravity is physically unrealistic to give much insight into real gravitating systems in 3+1 dimensions. In particular, general relativity in 2+1 dimensions has no Newtonian limit and propagating degrees of freedom. It therefore came as considerable surprise when Bañados, Teitelboim, and Zanelli (BTZ) showed in 1992 that (2+1)-dimensional gravity has a black hole solution. The BTZ differs from the Schwarzschild and Kerr solutions in some important respects: it is asymptotically anti-de Sitter rather than asymptotically flat, and has no curvature singularity at the horizon. Moreover, it has an event horizon and in the rotating case, an inner horizon.

In our study, a three dimensional black hole solution of Einstein equation with negative cosmological constant coupled to conformal scalar field is given. It is our aim to find thermodynamically quantities, e.g., entropy, temperature, and emission rate. Before entropy is found, metric has to be calculated by solving Einstein equation. KKW methodology which is found by Keski-Vakkuri, Kraus and Wilczek is used for calculating entropy and temperature. In this methodology, scalar field and metric are independent of time.

1. GİRİŞ

(2+1) boyutlu uzay-zamanda Einstein kütle çekimi (3+1) boyutlu uzay-zamandaki genel kovaryant teorilerde ortaya çıkan birçok kavramsal soruları incelemekte olan bir modeldir. Bu sorulardan birkaç tanesi kuantum kütle çekimi ve kara delik fiziği ile ilgilidir. Bañados, Teitelboim, and Zanelli (BTZ) (2+1) boyutlu uzay-zamanda negatif kozmolojik sabite sahip Einstein kütle çekiminin anti-de Sitter (AdS) uzayındaki çözümünün bir kara delik çözümü [1] olduğunu gösterdikten sonra 2+1 boyuttaki kara delikler ile ilgili çalışmalar mümkün olmuştur. Bu çalışmaların daha önce yapılmamasının başlıca nedeni;(2+1) boyutlu uzay-zamanda genel göreliliğin newtonyen limite ve yayılma serbestlik derecesine sahip olmamasıdır. Çünkü kuantum teorisinde d uzay –zaman boyutu olmak üzere gravitonun serbestlik derecesinin (d-3) ile hesaplanır. Bu yüzden gravitonun serbestlik derecesi sıfırdır. Kozmolojik sabitin durumuna göre uzayımız değişmektedir. Kozmolojik sabitimiz pozitif ise uzayımız de Sitter, negatif ise AdS(d) uzayıdır. Burada d uzay-zaman boyutudur. Kozmolojik yarıçap AdS(d) uzayının yarıçapı (L) cinsinden yazabiliriz.

$$\Lambda = \mu \frac{1}{L^2} \quad (1.1)$$

BTZ kara deliklerinin vakum, dönme ve yüklü durumda olanları vardır. Ayrıca kara deliğin oluşturduğu kütle çekimin herhangi bir alanla etkileşmesi gibi bir durumda vardır. BTZ kara delikleri her bir durum için ayrı ayrı incelendiği gibi iki veya daha fazla durum için beraber de incelenir. Her durumda Einstein alan denklemleri değişmektedir. Dolayısıyla elde edeceğimiz çözümlerde değişecektir. Einstein denklemlerinin çözülmesinden elde edilecek bağıntılardan biri metriktir. Metriğin bulunması ile kara delik hakkında bir çok bilgi edinebiliriz. Kara deliğe yaklaşan veya uzaklaşan bir cismin izleyeceği yolu belirleyebiliriz. Ayrıca Keski-Vakkuri, Kraus ve Wilczek (KKW) [2,3,4,5] tarafından bulunan metodu kullanarak kara deliğin temel termodinamik nicelikleri olan entropisi, sıcaklığı bulunur. Genel olarak

BTZ kara deliğin metriği onun kütlesini, açısai momentumunu ve yükünü içeren bir bağıntı ile tanımlanır.

İkinci bölümde Einstein denklemlerinin genel olarak nasıl elde edileceği ve (2+1) uzay-zaman boyutunda Einstein alan denklemlerinin vakum durumunda ve kütle çekimin konformal bir skaler alan ile etkileşmesi durumundaki çözümlerini bulacağız. Dördüncü bölümde ise bu çözümler ve üçüncü bölümde bulunan diğer BTZ cinsi çözümlerin temel termodinamik nicelikleri KKW yöntemi kullanarak hesaplanacaktır.

2. EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİ

2.1. Einstein Denklemleri ve Vakum Durumundaki Çözümü

Genel olarak Einstein denklemlerinin nasıl tanımlanacağı EK A da verilmiştir. (2+1) uzay-zaman boyutunda, Einstein denklemlerinin negatif kozmolojik sabitine ($\Lambda > 0$) sahip iken bulunacak ve vakum durumundaki çözümü incelenecektir.

Metrik bağıntımız,

$$ds^2 = -v(r) dt^2 + w(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (2.1.1)$$

şeklinde yazılır.

Metrik bağıntımızdan yararlanarak Einstein denklemleri,

$$T_1^1 = \Lambda + \frac{w'}{2rw^2} \quad (2.1.2)$$

$$T_2^2 = \Lambda - \frac{v'}{2rw^2} \quad (2.1.3)$$

$$T_3^3 = \frac{1}{4v^2w^2} (4\Lambda w^2 + wv'^2 + vv'w' - 2vwv'') \quad (2.1.4)$$

olarak bulunur.

(2.1.2), (2.1.3) ve (2.1.4) de bulunan Einstein denklemleri vakum durumunda çözülürken gerilim-enerji tansörünün bileşenleri sıfır alınır.

$$T_\mu^\nu = 0 \quad (2.1.5)$$

(2.1.2) denklemi (2.1.5) bağıntısından yararlanarak çözülür.

$$w(r) = (\Lambda r^2 - c1)^{-1} \quad (2.1.6)$$

(2.1.6) de bulunan değer (2.1.3) ve (2.1.4) de yerine yazalım.

$$2 \Lambda r v + (c1 - r^2) v' = 0 \quad (2.1.7)$$

$$4 \Lambda v^2 + (-c1 + r^2 \Lambda) v'^2 - 2 v (r \Lambda v' + (-c1 + r^2 \Lambda) v'') = 0 \quad (2.1.8)$$

(2.1.7) denklemini çözümlerse,

$$v(r) = \Lambda r^2 - c1 \quad (2.1.9)$$

olarak bulunur.

(2.1.9) bulunan $v(r)$ de (2.1.8) denklemini de sağlamaktadır.(2.1.6) ve (2.1.9) da bulunan $v(r)$ ve $w(r)$ yi (2.1.1) bağıntısında yerine yazarsak,

$$ds^2 = -(\Lambda r^2 - c1) dt^2 + (\Lambda r^2 - c1)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (2.1.10)$$

olarak bulunur.

2.2. Skaler Alanın Kütle Çekimi ile Etkileşmesi Durumundaki Çözümü

Kütlesiz zamandan bağımsız skaler alan ile kütle çekiminin etkileşmesini içeren konformal gerilim-enerji tansörünü tanımlayalım.

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & (1 - 2\xi) \partial_\mu \Theta(r) \partial_\nu \Theta(r) + \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} g^{\lambda\tau} \partial_\lambda \Theta(r) \partial_\tau \Theta(r) - \\ & 2\xi \Theta(r) (\partial_\mu \nu \Theta(r) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \Theta(r)) + \frac{2}{y} \xi g_{\mu\nu} \Theta(r) g^{\mu\nu} \Theta(r) ;_{\mu\nu} - \\ & \xi \Theta(r)^2 \left(R_{\mu\nu} - R g_{\mu\nu} \left(1 - 4\xi \frac{y-1}{y} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Burada y uzay-zaman boyutu olmak üzere,

$$\xi = \frac{1}{4} \frac{y-2}{y-1} \quad (2.2.2)$$

$$g^{\mu\nu} \Theta(r)_{;\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\partial_\lambda \sqrt{-g} g^{\lambda\tau} \partial_\tau \Theta(r) \right) \quad (2.2.3)$$

şeklinde tanımlanır.

2+1 uzay-zaman boyutunda çalışıldığı için $y=3$ alınacaktır.

Metrik tansörü,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -v(r) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{v(r)} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

şeklinde tanımlanır.

Einstein denklemleri,

$$v' \left(24 + k \Theta^2 - 2 k r \Theta \Theta' \right) - r \left(48 \Lambda + k \Theta^2 v'' \right) + 4 k v \left(-3 r \Theta'^2 + \Theta (\Theta' + r \Theta'') \right) = 0 \quad (2.2.5)$$

$$v' \left(24 + k \Theta^2 - 2 k r \Theta \Theta' \right) - r \left(48 \Lambda + k \Theta^2 v'' \right) + 4 k v \left(-6 r \Theta'^2 + \Theta (\Theta' - 2 r \Theta'') \right) = 0 \quad (2.2.6)$$

$$6 r \left(4 \Lambda + k v \Theta'^2 - 2 v'' \right) + k \Theta^2 (v' - r v'') - 2 k \Theta (r v' \Theta' + v (-2 \Theta' + r \Theta'')) = 0 \quad (2.2.7)$$

olarak bulunur.

(2.2.5), (2.2.6) ve (2.2.7) denklemlerinden yaralanarak,

$$2 v' + r (-6 \Lambda + v'') = 0 \quad (2.2.8)$$

elde edilir.

(2.2.8) denklemi çözülürse,

$$v(r) = \Lambda r^2 - \frac{b}{r} + a \quad (2.2.9)$$

a ve b sabit olmak üzere ifadesi elde edilir.

v(r) yi (2.2.5), (2.2.6) ve (2.2.7) denklemlerinde kullanılırsa,

$$3 b k \Theta^2 - 12 \left(-2 b + k r^2 \left(-b + a r + r^3 \Lambda \right) \Theta'^2 \right) + 2 k r \Theta \left((-3 b + 2 a r) \Theta' + 2 r \left(-b + a r + r^3 \Lambda \right) \Theta'' \right) = 0 \quad (2.2.10)$$

$$3 b k \Theta^2 + 24 \left(b + k r^2 \left(-b + a r + r^3 \Lambda \right) \Theta'^2 \right) + 2 k r \Theta \left((-3 b + 2 a r) \Theta' - 4 r \left(-b + a r + r^3 \Lambda \right) \Theta'' \right) = 0 \quad (2.2.11)$$

$$-3 b k \Theta^2 - 6 \left(4 b + k r^2 \left(-b + a r + r^3 \Lambda \right) \Theta'^2 \right) + 2 k r \Theta \left((3 b - 2 a r) \Theta' + r \left(-b + a r + r^3 \Lambda \right) \Theta'' \right) = 0 \quad (2.2.12)$$

olarak bulunur.

(2.2.10) ve (2.2.11) denklemleri birbirinden çıkarılırsa,

$$(b - r(a + \Lambda))(3\Theta'^2 - \Theta\Theta'') = 0 \quad (2.2.13)$$

denklemini elde edilir.

(2.2.13) denklemi çözülürse A ve B sabit olmak üzere,

$$\Theta(r) = \sqrt{\frac{A}{r+B}} \quad (2.2.14)$$

olarak bulunur.

(2.2.14) eşitliği (2.2.10), (2.2.11) ve (2.2.12) denklemlerinde kullanılırsa,

$$24 b B^2 + 3 A^2 b B k + 48 b B r + 6 A^2 b k r + 24 b r^2 - 2 a A^2 k r^2 = 0 \quad (2.2.15)$$

denklemini bulunur.

(2.2.15) denklemindeki r nin kuvvetlerinin katsayıları sıfır olmalıdır.

$$24 b B^2 + 3 A^2 b B k = 0 \quad (2.2.16)$$

$$48 b B + 6 A^2 b k = 0 \quad (2.2.17)$$

$$24 b - 2 a A^2 k = 0 \quad (2.2.18)$$

(2.2.16), (2.2.17) ve (2.2.18) denklemleri çözülürse,

$$A = \sqrt{-\frac{B}{k}} \quad (2.2.19)$$

$$b = -\frac{2 a B}{3} \quad (2.2.20)$$

olarak bulunur.

Eğri uzaydaki Klein-Gordon denklemini,

$$g^{\mu\nu} \Theta(r)_{;\mu\nu} + \xi \Theta(r) R = 0 \quad (2.2.21)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Bulunan nicelikler (2.2.21) denkleminde yerine yazılırsa,

$$a + 3 B^2 \Lambda = 0 \quad (2.2.22)$$

denklemini bulunur.

(2.2.22) denklemini çözülürse,

$$a = -3 B^2 \Lambda \quad (2.2.23)$$

olarak bulunur.

Metrik ve skaler alan,

$$ds^2 = - \left(\frac{(r - 2B)(B + r)^2 \Lambda}{r} \right) dt^2 + \left(\frac{(r - 2B)(B + r)^2 \Lambda}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (2.2.24)$$

$$\Theta(r) = \sqrt{\frac{B}{\pi(r + B)}} \quad (2.2.25)$$

şeklinde bulunur.

Gerilim-enerji tansörünün sıfırdan farklı bileşenleri,

$$T_1^1 = - \frac{B^3 \Lambda}{r^3} \quad (2.2.26)$$

$$T_2^2 = - \frac{B^3 \Lambda}{r^3} \quad (2.2.27)$$

$$T_3^3 = \frac{2 B^3 \Lambda}{r^3} \quad (2.2.28)$$

olarak bulunur.

Gerilim-enerji tansörünün izinin sıfır olduğu ve tansörün bileşenleri arasındaki bağıntı kolayca görülmektedir.

$$T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 = 0 \quad (2.2.29)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = -2 T_3^3 = 0 \quad (2.2.30)$$

Buraya kadar kütesiz skaler alanın ve metriğin zamandan bağımsız olduğu durumu inceledik. Skaler alan ve metrik zamana bağlı olduğu durumda kütesiz skaler alan ile kütle çekimin etkileşmesini inceleyelim. Öncelikle metrik bağıntısını ve Gerilim-Enerji tansörünü tanımlayalım,

$$ds^2 = -v(r, t) w(t)^2 dt^2 + 2 w(t) dr dt + r^2 d\theta^2 \quad (2.2.31)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & (1 - 2\xi) \partial_\mu \Theta(r, t) \partial_\nu \Theta(r, t) + \left(2\xi - \frac{1}{2}\right) g_{\mu\nu} g^{\lambda\tau} \partial_\lambda \Theta(r, t) \partial_\tau \Theta(r, t) - \\ & 2\xi \Theta(r, t) (\partial_{\mu\nu} \Theta(r, t) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \Theta(r, t)) + \frac{2}{y} \xi g_{\mu\nu} \Theta(r, t) g^{\mu\nu} \Theta(r, t);_{\mu\nu} - \\ & \xi \Theta(r, t)^2 \left(R_{\mu\nu} - R g_{\mu\nu} \left(1 - 4\xi \frac{y-1}{y}\right) \right) \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

(2.2.31) ve (2.2.32) bağıntılarından yararlanarak Einstein denklemlerini ve Klein-Gordon denklemini bulalım.

$$\begin{aligned} 8k(-3r \Theta' \Theta' + \Theta(-\Theta'' + r \Theta''')) + w(-v'(24 + k\Theta^2 - 2kr\Theta\Theta') + \\ r(192\Lambda + k\Theta^2 v'') - 4kv(-3r\Theta'^2 + \Theta(\Theta'' + r\Theta'''))) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

$$\begin{aligned} 8k(-3r \Theta' \Theta' + \Theta(-\Theta'' + r \Theta''')) + w(-v'(24 + k\Theta^2 - 2kr\Theta\Theta') + \\ r(192\Lambda + k\Theta^2 v'') - 4kv(6r\Theta'^2 + \Theta(\Theta'' - 2r\Theta'''))) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

$$\begin{aligned} 8k(3r \Theta' \Theta' + \Theta(\Theta'' - r \Theta''')) + w(6r(16\Lambda + kv\Theta'^2 - 2v'') + \\ k\Theta^2(v' - rv'') - 2k\Theta(rv'\Theta' + v(-2\Theta'^2 + r\Theta'''))) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

$$\begin{aligned} 8kr\Theta w \Theta'' - 8krw(-3\Theta'^2 + \Theta'' + \Theta\Theta''') - w^2(8 + k\Theta^2 + \\ 2kr\Theta\Theta') - 2kr(6v\Theta'\Theta' + \Theta(\Theta''v' - 2v\Theta''')) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

$$-3\Theta'^2 + \Theta\Theta'' = 0 \quad (2.2.37)$$

$$16\Theta'' + 32r\Theta'' + w(\Theta(2v' + rv'') + 8(rv'\Theta' + v(\Theta' + r\Theta''))) = 0 \quad (2.2.38)$$

(2.2.33) denklemi ile (2.2.34) denklemi toplanır ve çıkan sonuç ile (2.2.35) denkleminin iki katı ile toplanırsa,

$$24 r \Lambda - 2 v' - r v'' = 0 \quad (2.2.39)$$

denklemi elde edilir.

(2.2.37) ve (2.2.39) denklemleri çözümlerse,

$$v(r, t) = 4 r^2 \Lambda - \frac{b(t)}{r} + a(t) \quad (2.2.40)$$

$$\Theta(r, t) = \sqrt{\frac{A(t)}{r + B(t)}} \quad (2.2.41)$$

sonuçları elde edilir.

(2.2.40) ve (2.2.41) de bulunan değerler (2.2.33), (2.2.34), (2.2.35) ve (2.2.38) denklemlerinde yerlerine yazılırsa,

$$2 k r^2 a A w - 3 b (8(r + B)^2 + k A(2 r + B)) w - 4 k r^2 (B \dot{A} - A \dot{B}) = 0 \quad (2.2.42)$$

$$a A (r - 2 B) w + 4 B (r + B) \dot{A} + A(-3 b w + 12 r \Lambda B^2 w + 8 r \dot{B} - 4 B \dot{B}) = 0 \quad (2.2.43)$$

denklemleri edilir.

(2.2.42) ve (2.2.43) denklemlerinde A, B ve w yalnızca zamana bağlı olduklarından radyal koordinatın kuvvetlerinin katsayıları sıfır olmalıdır.

$$2 k a A w - 24 b w - 4 k B \dot{A} + 4 k A \dot{B} = 0 \quad (2.2.44)$$

$$6 k A b w + 48 b B w = 0 \quad (2.2.45)$$

$$3 k A b B w + 24 b B^2 w = 0 \quad (2.2.46)$$

$$a A w + 12 \Lambda A B^2 w + 4 B \dot{A} + 8 A \dot{B} = 0 \quad (2.2.47)$$

$$3 A b w + 2 a A B w - 4 B^2 \dot{A} + 4 A B \dot{B} = 0 \quad (2.2.48)$$

(2.2.45) denkleminde A ile B arasındaki ilişki bulunur.

$$A(t) = -\frac{8 B(t)}{k} \quad (2.2.49)$$

(2.2.49) bağıntısı kullanılarak (2.2.44) ve (2.2.47) denklemleri çözülürse,

$$b(t) = -\frac{2}{3} a(t) B(t) \quad (2.2.50)$$

$$w(t) = -\frac{12 \dot{B}(t)}{a(t) + 12 \Lambda B(t)^2} \quad (2.2.51)$$

bağıntıları elde edilir.

(2.2.49) , (2.2.50) ve (2.2.51) bağıntılarını (2.2.36) denkleminde kullanılırsa,

$$768 \dot{B}^2 (-2 B \dot{A} + a \dot{B}) = 0 \quad (2.2.52)$$

elde edilir.

(2.2.49) denklemini çözülürse,

$$B(t) = a(t)^2 c_1 \quad (2.2.53)$$

olarak elde edilir.

(2.2.53) denklemini (2.2.51) denkleminde kullanılırsa,

$$w(t) = -\frac{24 c_1 \dot{A}}{1 + 12 c_1^2 \Lambda a^3} \quad (2.2.54)$$

olarak bulunur.

(2.2.54) denkleminde $w(t)=1$ alınırsa (2.2.54) denklemi,

$$24 c_1 \dot{a} + 12 c_1^2 \Lambda a^3 + 1 = 0 \quad (2.2.55)$$

şeklinde olur.

Bulunan değerler (2.2.31) ve (2.2.41) bağıntılarında yerlerine konulursa metrik ve skaler alan,

$$ds^2 = - \left(4 r^2 \Lambda - \frac{2 a(t)^3 c_1}{3 r} + a(t) \right) dt^2 + 2 dr dt + r^2 d\theta^2 \quad (2.2.56)$$

$$\Theta(r, t) = \sqrt{\frac{a(t)^2 c_1}{\pi (r + a(t)^2 c_1)}} \quad (2.2.57)$$

olarak bulunur.

(2.2.55) diferansiyel denklemi analitik yöntemlerle çözülemediğinden dolayı nümerik yöntemlerle 3.2. de çözülecektir.

3. BTZ KARADELİKLERİ

3.1. Yüklü ve Dönen BTZ Kara Deliği

Bu kısımda Q yüküne ve J açısal momentumuna sahip bir BTZ kara deliği incelenecektir. Metrik bağıntısı,

$$ds^2 = -v(r)dt^2 + \frac{1}{v(r)}dr^2 + r^2(d\theta + N(r)dt)^2 \quad (3.1.1)$$

şeklinde verilmektedir.

Gerilim-enerji tansörü,

$$T_{\mu\nu} = 2(F_{\mu\lambda}F_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}) \quad (3.1.2)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

(3.1.2) denkleminde,

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\nu}A_{\mu} - \partial_{\mu}A_{\nu} \quad (3.1.3)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B(r) & 0 \\ -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.4)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Maxwell bağıntısı,

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = 0 \quad (3.1.5)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Einstein denklemleri,

$$4 \Lambda r + 4 k r B^2 - r^3 N'^2 - 2 v' - 2 r^2 N (3 N' + r N'') = 0 \quad (3.1.6)$$

$$4 \Lambda r + 4 k r B^2 - r^3 N'^2 - 2 v' = 0 \quad (3.1.7)$$

$$4 \Lambda - 4 k B^2 + 3 r^2 N'^2 + 2 r N (3 N' + r N'') - 2 v'' = 0 \quad (3.1.8)$$

$$(3 N' + r N'')(r^2 N^2 + v) + N(-4 k r B^2 + 2 r^3 N'^2 + v' - r v'') = 0 \quad (3.1.9)$$

$$3 N' + r N'' = 0 \quad (3.1.10)$$

olarak bulunur.

(3.1.10) numaralı denklem çözülürse,

$$N(r) = \frac{J}{2 r^2} + J_1 \quad (3.1.11)$$

olarak bulunur.

$J_1 = 0$ olarak alınır.[9]

(3.1.11) bağıntısı Einstein denklemlerinde yerleştirilirse,

$$-\frac{J^2}{r^3} + 4 \Lambda r + 4 k r B^2 - 2 v' = 0 \quad (3.1.12)$$

$$\frac{3 J^2}{r^4} + 4 \Lambda - 4 k B^2 - 2 v'' = 0 \quad (3.1.13)$$

$$\frac{2 J^2}{r^3} - 4 k r B^2 + v' - r v'' = 0 \quad (3.1.14)$$

olarak bulunur.

(3.1.5) bağıntısından,

$$B + r B' = 0 \quad (3.1.15)$$

$$-\frac{J B}{r^2} + \frac{J}{r^2} (B + r B') = 0 \quad (3.1.16)$$

(3.1.15) denklemini çözülürse,

$$B(r) = \frac{Q}{r} \quad (3.1.17)$$

olarak bulunur.

(3.1.17) bağıntısı (3.1.12), (3.1.13), (3.1.14) ve (3.1.16) denklemlerinde yerleştirilirse,

$$-\frac{J^2}{r^3} + 4 \Lambda r + \frac{4 k Q^2}{r} - 2 v' = 0 \quad (3.1.18)$$

$$\frac{3 J^2}{r^4} + 4 \Lambda - \frac{4 k Q^2}{r^2} - 2 v'' = 0 \quad (3.1.19)$$

$$\frac{2 J^2}{r^3} - \frac{4 k Q^2}{r} + v' - r v'' = 0 \quad (3.1.20)$$

$$J Q = 0 \quad (3.1.21)$$

denklemleri elde edilir.

(3.1.18) denklemini çözülürse,

$$v(r) = \frac{J^2}{4 r^2} + \Lambda r^2 - C_1 + 2 k Q^2 \text{Log } r \quad (3.1.22)$$

olarak bulunur.

(3.1.21) denkleminin sağlanması için J ve/veya Q sıfıra eşit olmalıdır.[6],[7],[8].

$J=0$ ve $C_1 = M + 2 k Q^2 \text{Log } r_+$ olarak alınırsa yalnızca yüklü durumdaki çözüm bulunur.

$$v(r) = \Lambda r^2 - M + 2 k Q^2 \text{Log } \frac{r}{r_+} \quad (3.1.23)$$

Metrik bağıntısı,

$$ds^2 = - \left(\Lambda r^2 - M + 2 k Q^2 \text{Log } \frac{r}{r_+} \right) dt^2 + \left(\Lambda r^2 - M + 2 k Q^2 \text{Log } \frac{r}{r_+} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (3.1.24)$$

olarak bulunur.

(3.1.24) bağıntısındaki metriğin tekil oldu noktaları,

$$\Lambda r^2 - M + 2 k Q^2 \text{Log } \frac{r}{r_+} = 0 \quad (3.1.25)$$

denklemini çözerek bulabiliriz.

(3.1.25) denklemini çözümlerse BTZ kara deliğin olay ufku bulunur.

$$r_+ = \sqrt{\frac{M}{\Lambda}} \quad (3.1.26)$$

Gerilim-enerji tansörü,

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{k Q^2}{r^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.27)$$

şeklinde bulunur.

$Q=0$ ve $C_1 = M$ olarak alınırsa yalnızca dönen durumdaki çözüm bulunur.

$$v(r) = \frac{J^2}{4 r^2} + \Lambda r^2 - M \quad (3.1.28)$$

Metrik bağıntısı,

$$ds^2 = - \left(\frac{J^2}{4 r^2} + \Lambda r^2 - M \right) dt^2 + \left(\frac{J^2}{4 r^2} + \Lambda r^2 - M \right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta + \frac{J}{2 r^2} dt \right)^2 \quad (3.1.29)$$

olarak bulunur.

(3.1.29) bağıntısındaki metriğin tekil oldu noktaları,

$$\frac{J^2}{4 r^2} + \Lambda r^2 - M = 0 \quad (3.1.30)$$

denklemini çözerek bulabiliriz.

(3.1.30) denklemini çözümlerse BTZ kara deliğin dış olay ufku ve iç olay ufku bulunur.

$$r_+^2 = \frac{M + \sqrt{M^2 - 4 J^2 \Lambda}}{2 \Lambda} \quad (3.1.31)$$

$$r_-^2 = \frac{M - \sqrt{M^2 - 4 J^2 \Lambda}}{2 \Lambda} \quad (3.1.32)$$

$J=0$, $Q=0$ ve $C_1 = M$ olarak alınırsa yalnızca vakum durumundaki çözüm bulunur.

$$v(r) = \Lambda r^2 - M \quad (3.1.33)$$

(3.1.33) bağıntısından metrik bağıntısı yeniden yazılabilir.

$$ds^2 = -(\Lambda r^2 - M)dt^2 + (\Lambda r^2 - M)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 \quad (3.1.34)$$

(3.1.34) bağıntısındaki metriğin tekil oldu noktaları,

$$\Lambda r^2 - M = 0 \quad (3.1.35)$$

denklemini çözerek bulabiliriz.

(3.1.35) denklemi çözülürse BTZ kara deliğin olay ufku bulunur.

$$r_+ = \sqrt{\frac{M}{\Lambda}} \quad (3.1.36)$$

3.2. Skaler Alan ile Etkileşen BTZ Kara Deliği

Zamandan bağımsız metrik ve skaler alan (2.2.24) ve (2.2.25) bağıntılarında bulunmuştu. Metriğin tekil olduğu yerleri,

$$(r - 2B)(r + B)^2 \Lambda = 0 \quad (3.2.1)$$

denklemini çözerek bulabiliriz.

(3.2.1) denklemi çözülürse fiziksel olarak geçerli olan olay ufku,

$$r_+ = 2B \quad (3.2.2)$$

olarak bulunur.

(2.2.23) bağıntısında $a = -M$ olarak seçilirse,

$$B = \sqrt{\frac{M}{3\Lambda}} \quad (3.2.3)$$

olarak bulunur.

Zamana bağlı oldu durumda metrik ve skaler alan (2.2.56) ve (2.2.57) denklemlerinde bulunmuştu. (2.2.54) diferansiyel denklemi nümerik yöntemlerle

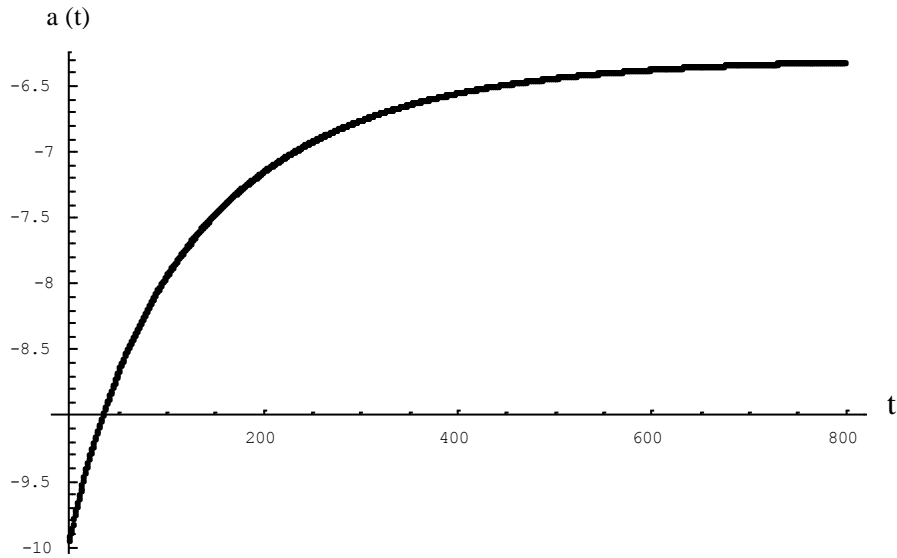
çözülecektir. Başlangıç koşullarını (3.2.3) ve (3.2.53) bağıntılarından yararlanarak bulunabiliriz.

$$a(0) = -M \quad (3.2.4)$$

$$B(0) = \sqrt{\frac{M}{3\Lambda}} \quad (3.2.5)$$

$$c1 = \sqrt{\frac{1}{3M^3\Lambda}} \quad (3.2.6)$$

Bu başlangıç koşulları altında (2.2.54) diferansiyel denklemi nümerik yöntemlerle çözülür. Çözümlerden elde edilen grafik ise,



Şekil 3.2.1. $M=10, \Lambda=0.01$

şeklinde olur.

Zaman belli bir değerden büyük olduğu durumda,

$$a(t) = \frac{M}{\sqrt[3]{4}} \quad (3.2.7)$$

olmaktadır.

Skaler alanın zamandan bağımsız olduğu bölgedeki çözümü,

$$\Theta(r, t) = \sqrt{\frac{1}{\pi (\sqrt[3]{16} \sqrt{3} M \Lambda r + 1)}} \quad (3.2.8)$$

olmaktadır.

4. BTZ KARADELİKLERİNİN TERMODİNAMIĞI

4.1. Kara Delik Termodinamiği ve KKW Metodu

Kara delik fiziği ile termodinamik arasında bir çok benzerlik vardır. En belirgin özellik; kara deliğin olay ufku alanının davranışı ile entropisi arasındadır. İki nicelik geri dönüşü olmaksızın artmaktadır. Kara deliğin entropisi, dışarıda bulunan bir gözlemcinin göremeyeceği iç bölge hakkında bilgi verir. Kara deliğin entropisi alanı ile doğru orantılıdır. Kara deliğin entropisinin fiziksel içeriği ikinci yasanın genelleştirilmesi ile elde edilmiştir. İki kara delik birleştiği zaman toplam entropi birleşmeden önceki toplam entropiden büyüktür.

Kara deliklerin entropisini hesaplamakta kullanılan yöntemler arasında en sık kullanılan olanı KKW yöntemidir. Bu yöntem Keski-Vakkuri, Kraus ve Wilczek tarafından bulunmuştur. Bu yöntem metriğimizde bulunan tekiliği bir koordinat dönüşümü ile kaldırmaktadır. Bu koordinat dönüşümü 80 yıl önce Painleve tarafından bulunmuştur. Bulunduktan sonra fazla kullanılmadığı için unutulmuştur. Kara delik kuantum mekaniği keşfedildikten sonra yeniden kullanılmıştır.

Simetrik metrik,

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + F(r)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Metrik üzerinde,

$$\sqrt{F(r)} dt = \sqrt{F(r)} d\tau - \frac{\sqrt{1-F(r)}}{F(r)} dr \quad (4.1.2)$$

şeklinde bir koordinat dönüşümü yapılırsa metrik ifadesi,

$$ds^2 = -F(r)d\tau^2 + dr^2 + 2\sqrt{1-F(r)}drd\tau + r^2d\theta^2 \quad (4.1.3)$$

şeklinde olur.

Bu dönüşüm sayesinde metrikte bulunan tekillik ortadan kalmıştır. Ayrıca bu dönüşümün sayesinde kara deliğin Hawking ışıması adı verilen bir olay sonucunda yayımladığı kütesiz parçacıkların izleyeceği yolun belirlenebilmesidir.

Hawking ışıması; boşluk dalgalanmaları sonucunda oluşan parçacık-antiparçacık çiftleri birleşip yok olmadan önce parçacıklardan bir tanesinin kara delik tarafından yutulması ve diğer parçacığın boşluğa gitmesidir. Parçacığın kara delik tarafından yutulması için kara deliğin sıcaklığının Hawking sıcaklığında olması ve parçacık-anti parçacık çiftlerinin olay ufkunun hemen yanında olması gerekir. Boşluğa doğru bir parçacık yayımlandığı için gözlemci kara delik tarafından parçacık yayımlamış gibi görüyor. Bu yüzden kara olma özelliğini yitiriyor ve gri olarak nitelendiriliyor. Bu ışınım enerjisini kara delikten alıyor. Dolayısıyla kara delik gittikçe küçülüyor. Kara deliğin kütesi azaldıkça yaptığı ışınım da o ölçüde artıyor.

Kara delikten ω enerjisiyle ayrılan parçacıkların izlediği yolu bulurken,

$$ds = 0 \quad (4.1.4)$$

$$d\theta = 0 \quad (4.1.5)$$

olarak alınır.

(4.1.4) ve (4.1.5) ü (4.1.3) denkleminde kullanırsak,

$$-F(r)d\tau^2 + dr^2 + 2\sqrt{1-F(r)}drd\tau = 0 \quad (4.1.6)$$

olarak bulunur.

(4.1.6) denklemini,

$$\frac{dr}{d\tau} + 2\sqrt{1-F(r)} - F(r) = 0 \quad (4.1.7)$$

olarak yazabiliriz.

(4.1.7) denklemi çözümlerse,

$$\dot{r} = \mu \sqrt{1 - F(r)} \quad (4.1.8)$$

olarak bulunur.

(+) işareti giden parçacıkların izlediği yolun denklemi iken (-) işareti gelen parçacıkların izlediği yolun denklemi olmaktadır. Giden parçacıklar ile ilgilenildiği için (+) işaretli denklemi kullanılacaktır. ω enerjisiyle yayımlanan parçacık enerjisini kara delikten almaktadır. Bu yüzden kara deliğin kütlesi M den $(M - \omega)$ ya düşecektir.

(4.1.8) denklemi,

$$\dot{r}_{(r, M - \omega)} = \mu \sqrt{1 - F(r, M - \omega)} \quad (4.1.9)$$

şeklinde yazabiliriz.

Eylemin sanal kısmı ile kara deliğin entropisindeki değişim arasında,

$$\text{Im } S = \Delta S_{\text{BH}} \quad (4.1.10)$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

Entropideki değişim, emisyonun sonraki entropisi ile önceki entropinin farkıdır.

$$\Delta S_{\text{BH}} = S_{\text{BH}}(M - \omega) - S_{\text{BH}}(M) \quad (4.1.11)$$

Parçacıklar için tünelleme olasılığı,

$$\Gamma = \exp(\Delta S_{\text{BH}}) = \exp\left(-\frac{\omega}{T}\right) \quad (4.1.12)$$

olarak tanımlanır.

r_+ dış olay ufku olmak üzere eylemin sanal kısmı

$$\text{Im } S = \int_{r_+(M)}^{r_+(M-\omega)} \int_0^\omega \frac{d\omega' dr}{f(r, M-\omega')} \quad (4.1.13)$$

olarak tanımlanır.

4.2. Vakum Durumunda Termodinamik Niceliklerin Bulunması

Vakum durumunda bulunan kara deliğin BTZ çözümleri (3.1.34) ve (3.1.36) bağıntılarında bulunmuştur.

$$F(r) = \Lambda r^2 - M \quad (4.2.1)$$

(4.2.1) bağıntısını (4.1.9) bağıntısında kullanırsak,

$$f(r, M-\omega) = 1 - \sqrt{1 - \Lambda r^2 + (M-\omega)} \quad (4.2.2)$$

olarak bulunur.

(4.2.2) bağıntısını (4.1.13) bağıntısında kullanılırsa ,

$$\text{Im } S = \int_{r_+(M)}^{r_+(M-\omega)} \int_0^\omega \frac{d\omega' dr}{1 - \sqrt{1 - \Lambda r^2 + (M-\omega')}} \quad (4.2.3)$$

olarak bulunur.

Olay ufku (3.1.36) bağıntısında verilmiştir.

(4.2.3) bağıntısında bulunan entegrali kontur entegrali ile çözülebiliriz. Entegral yarı ω düzlemi üzerinden alınır. Bu entegral çözüldürse,

$$\text{Im } S = 2\pi \left(\sqrt{\frac{M}{\Lambda}} - \sqrt{\frac{M-\omega}{\Lambda}} \right) \quad (4.2.4)$$

olarak bulunur.

(4.1.10), (4.1.11) ve (4.2.4) bağıntılarından yararlanarak kara deliğin entropisi bulunur.

$$S_{\text{BH}} = 4\pi \sqrt{\frac{M}{\Lambda}} \quad (4.2.5)$$

Tünelleme olasılığı (4.1.12) bağıntısından

$$\Gamma = \exp \left(4\pi \left(\sqrt{\frac{M - \omega}{\Lambda}} - \sqrt{\frac{M}{\Lambda}} \right) \right) \quad (4.2.6)$$

olarak bulunur.

BTZ kara deliğin sıcaklığı (4.1.12) bağıntısından,

$$T = \frac{\omega}{4\pi} \left(\sqrt{\frac{M}{\Lambda}} - \sqrt{\frac{M - \omega}{\Lambda}} \right)^{-1} \quad (4.2.7)$$

olarak bulunur.

(4.2.7) bağıntısı $\omega = 0$ civarında seriye açılırsa ve ilk terim alınırsa Hawking sıcaklığı ile aynı olan bir ifade elde edilir.

$$T_{\text{H}} = \frac{\sqrt{M \Lambda}}{2\pi} \quad (4.2.8)$$

Bulunan bu ifadeleri aynı zamanda kara delik fiziği ile termodinamik arasındaki ilişkiden yararlanarak da bulabiliriz.

$$dM = T dS \quad (4.2.9)$$

(4.2.5) bağıntısından,

$$dM = 2 \Lambda r_+ dr_+ \quad (4.2.10)$$

olarak bulunur.

Eylemin varyasyonu sonucunda olay ufkunda bir tekillik olmaması için [6],

$$F'(r)_{r=r_+} = 4\pi T \quad (4.2.11)$$

olması gerekir.

(4.2.11) bağıntısından sıcaklık,

$$T = \frac{\Lambda r_+}{2\pi} \quad (4.2.12)$$

olarak bulunur.

(4.2.10) ve (4.2.12) bağıntıları (4.2.9) bağıntısında kullanılırsa,

$$2 \Lambda r_+ dr_+ = \frac{\Lambda r_+}{2\pi} dS_{BH} \quad (4.2.13)$$

olarak bulunur.

(4.2.13) denkleminde kara deliğin entropisini bulabiliriz.

$$S_{BH} = 4 \pi r_+ \quad (4.2.14)$$

4.3. Dönme Durumunda Termodinamik Niceliklerin Bulunması

Dönen durumda bulunan bir kara deliğin BTZ çözümü (3.1.29) bağıntısıyla bulunmuştur. Bu bağıntıdan,

$$F(r) = \Lambda r^2 - M + \frac{J^2}{r^2} \quad (4.3.1)$$

olarak bulunur.

(4.2.9) bağıntısında ki ifadeyi,

$$dM = T dS_{BH} + A(J) dJ \quad (4.3.2)$$

şeklinde yazabiliriz.

(3.1.31) bağıntısından,

$$dM = 2 \left(\Lambda r_+ - \frac{J^2}{r_+^3} \right) dr_+ + \frac{J^2}{r_+^3} dJ \quad (4.3.3)$$

olarak bulunur.

(4.3.2) ile (4.3.3) bağıntıları karşılaştırılırsa,

$$T dS_{\text{BH}} = 2 \left(\Lambda r_+ - \frac{J^2}{r_+^3} \right) dr_+ \quad (4.3.4)$$

olarak bulunur.

(4.2.11) bağıntısından yararlanarak,

$$T = \frac{\Lambda r_+^4 - J^2}{2\pi r_+^3} \quad (4.3.5)$$

olarak bulunur.

(4.3.5) bağıntısı (4.3.4) bağıntısında yerleştirilirse kara deliğin entropisi bulunur.

$$S_{\text{BH}} = 4\pi r_+ \quad (4.3.6)$$

(4.3.6) bağıntısını,

$$S_{\text{BH}} = 4\pi \sqrt{\frac{M + \sqrt{M^2 - 4\Lambda J^2}}{2\Lambda}} \quad (4.3.7)$$

şeklinde yazabiliriz.

Tünelleme olasılığı (4.1.12) bağıntısından,

$$\Gamma = \exp(S_{\text{BH}}(M - \omega) - S_{\text{BH}}(M)) \quad (4.3.8)$$

olarak bulunur.

BTZ kara deliğin düzeltilmiş sıcaklığı (4.1.12) bağıntısından,

$$T = -\frac{\omega}{S_{\text{BH}}(M - \omega) - S_{\text{BH}}(M)} \quad (4.3.9)$$

olarak bulunur.

(4.3.9) bağıntısı $\omega=0$ civarında seriye açılırsa ve ilk terimi alınırsa (4.3.5) bağıntısında bulunan Hawking sıcaklığı,

$$T_H = \frac{\sqrt{M^2 - 4J^2\Lambda}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{M + \sqrt{M^2 - 4\Lambda J^2}}{\Lambda}}} \quad (4.3.10)$$

olarak elde edilir.

(4.3.10) bağıntısını,

$$T_H = \frac{\Lambda}{\sqrt{2\pi}} \frac{r_+^2 - r_-^2}{r_+} \quad (4.3.11)$$

şeklinde yazabiliriz.

4.4. Yüklü Durumda Termodinamik Niceliklerin Bulunması

Yüklü durumunda bulunan bir kara deliğin BTZ çözümü (3.1.24) bağıntısıyla bulunmuştur. Bu bağıntıdan,

$$F(r) = \Lambda r^2 - M - 2Q^2 \text{Log} \frac{r}{r_+} \quad (4.4.1)$$

olarak bulunur.

(4.2.9) bağıntısında ki ifadeyi,

$$dM = T dS_{BH} + B(Q) dQ \quad (4.4.2)$$

şeklinde yazabiliriz.

(3.2.26) bağıntısından,

$$dM = 2\Lambda r_+ dr_+ \quad (4.4.3)$$

olarak bulunur.

(4.4.2) ile (4.4.3) bağıntıları karşılaştırılırsa,

$$T dS_{BH} = 2\Lambda r_+ dr_+ \quad (4.4.4)$$

olarak bulunur.

(4.2.11) bağıntısından yararlanarak,

$$T = \frac{\Lambda r_+}{2\pi} \quad (4.4.5)$$

olarak bulunur.

(4.4.5) bağıntısı (4.4.4) bağıntısında yerleştirilirse kara deliğin entropisi bulunur.

$$S_{\text{BH}} = 4\pi r_+ \quad (4.4.6)$$

(4.4.6) bağıntısını,

$$S_{\text{BH}} = 4\pi \sqrt{\frac{M}{\Lambda}} \quad (4.4.7)$$

şeklinde yazabiliriz.

Tünelleme olasılığı (4.1.12) bağıntısından,

$$\Gamma = \exp \left(4\pi \left(\sqrt{\frac{M - \omega}{\Lambda}} - \sqrt{\frac{M}{\Lambda}} \right) \right) \quad (4.4.8)$$

olarak bulunur.

BTZ kara deliğin düzeltilmiş sıcaklığı (4.1.12) bağıntısından,

$$T = \frac{\omega}{4\pi} \left(\sqrt{\frac{M}{\Lambda}} - \sqrt{\frac{M - \omega}{\Lambda}} \right)^{-1} \quad (4.4.9)$$

olarak bulunur.

(4.4.9) bağıntısı $\omega = 0$ civarında seriye açılırsa ve ilk terim alınrsa Hawking sıcaklığı ile aynı olan bir ifade elde edilir.

$$T_{\text{H}} = \frac{\sqrt{M \Lambda}}{2\pi} \quad (4.4.10)$$

4.5. Skaler Alan Olması Durumunda Termodinamik Niceliklerin Bulunması

Zamandan bağımsız olan bir skaler alan ile etkileşen bir kara deliğin çözümü (2.2.24) ve (3.2.3) bağıntılarında bulunmuştur. Bu bağıntılardan,

$$F(r) = \Lambda r^2 - \frac{2}{3\sqrt{3}\Lambda} \frac{\sqrt{M^3}}{r} - M \quad (4.5.1)$$

olarak bulunur.

(3.2.2) ve (3.2.3) bağıntılarından,

$$dM = \frac{3 r_+ \Lambda}{2} dr_+ \quad (4.5.2)$$

olarak bulunur.

(4.2.11) bağıntısından,

$$T = \frac{9 r_+ \Lambda}{16 \pi} \quad (4.5.3)$$

olarak bulunur.

(4.2.9) bağıntısından,

$$\frac{3 r_+ \Lambda}{2} dr_+ = \frac{9 r_+ \Lambda}{16 \pi} dS_{\text{BH}} \quad (4.5.4)$$

olarak bulunur.

(4.5.4) denkleminde,

$$S_{\text{BH}} = \frac{8 \pi}{3} r_+ \quad (4.5.5)$$

olarak elde edilir.

(4.5.5) bağıntısını,

$$S_{\text{BH}} = \frac{16 \pi}{3\sqrt{3}\Lambda} \sqrt{M} \quad (4.5.6)$$

şeklinde yazabiliriz.

Tünelleme olasılığı (4.1.12) bağıntısından,

$$\Gamma = \exp \left(\frac{16 \pi}{3 \sqrt{3} \Lambda} (\sqrt{M - \omega} - \sqrt{M}) \right) \quad (4.5.7)$$

olarak bulunur.

BTZ kara deliğın düzeltilmiş sıcaklığı (4.1.12) bağıntısından,

$$T(\omega) = \frac{3 \omega \sqrt{3} \Lambda}{16 \pi} (\sqrt{M} - \sqrt{M - \omega})^{-1} \quad (4.5.8)$$

olarak bulunur.

(4.5.8) bağıntısı $\omega = 0$ civarında seriye açılırsa ve ilk terimi alınırsa (4.5.3) bağıntısı ile aynı olan Hawking sıcaklığı,

$$T_H = \frac{3 \sqrt{3} M \Lambda}{8 \pi} \quad (4.5.9)$$

olarak elde edilir.

2. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada genel olarak bilinen BTZ kara delik çeşitlerini inceledik. Bu kara delik çeşitlerinden birisi dönen kara delik diğeri yüklü olan kara deliktir. Kara delik hem yüklü hem de dönme durumunda olamaz. Yüklü kara deliğın entropisi ile vakum durumundaki kara deliğın entropisi, sıcaklığı ve emisyon oranı aynıdır.

Diğeri bir kara delik çeşidi skaler alan ile etkileşen kara deliktir. Zamana bağlı olan skaler alan ile ilgili kara delik çözümünde kara deliğın kütesinin değişimi ilginç bir sonuçtur. Belli bir zamandan sonra kara deliğın kütesi zamana bağlı olmamaktadır. Ama kütenin son değeri ilk değerinden daha azdır. Kara deliğın kütesi onun toplam enerjisine eşittir. Kara deliğın kütesi azaldığına göre enerjide azalmak zorundadır. Enerji korunumu olduğuna göre azalan bu enerji nereye gitmektedir? Bu sorunun cevabı belli bir zaman aralığında yayımlanan kütesiz ama enerji taşıyan bir tür parçacık olabilir mi?

Kara deliğın entropisi ile kütesi arasındaki ilişki bu çalışmada defalarca vurgulanmıştır. KKW yöntemi ile bulunan entropi ile kara delik fiziği ile termodinamik arasındaki ilişkiden yararlanılarak bulunan entropi aynıdır. Yalnız KKW yöntemi bize kara deliğın sıcaklığının Hawking ışıması neticesinde yayımlanan parçacıkların enerjisine bağlı olduğunu göstermiştir. Bu sıcaklığa düzeltilmiş sıcaklık demiştik. Bu sıcaklık seriye açılırsa ve ilk terimi alınırsa Hawking sıcaklığı bulunur. Hawking sıcaklığını eylemin varyasyonu neticesinde bulunan (4.2.11) bağıntısı yardımıyla hesaplamıştık.

EK A

EİNSTEİN ALAN DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Öncelikle Einstein tansörünü tanımlayalım.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (\text{A.1})$$

Ricci tansörü,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\tau \Gamma_{\tau\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\tau \Gamma_{\tau\nu}^\lambda \quad (\text{A.2})$$

şekindedir.

Ricci eğrilik skaleri,

$$R = g^{\mu\tau} R_{\tau\mu} \quad (\text{A.3})$$

şeklindedir.

Christoffel sembolü,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\tau} (\partial_\mu g_{\tau\nu} + \partial_\nu g_{\mu\tau} - \partial_\tau g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.4})$$

olarak tanımlanır.

Negatif kozmolojik sabite sahip Einstein alan denklemleri,

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = kT_{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

KAYNAKLAR

- [1] **M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli**, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1849
- [2] **E. Keski-Vakkuri, P. Kraus**, Phys. Rev. D **54** (1996) 7407
- [3] **P. Kraus, F. Wilczek**, Nucl. Phys. **B433** (1995) 403
- [4] **P. Kraus, F. Wilczek**, Nucl. Phys. **B437** (1995) 231
- [5] **E. Keski-Vakkuri, P. Kraus**, Nucl. Phys. **B491** (1997) 249
- [6] **C. Martinez, J. Zanelli**, Phys. Rev. D **54** (1996) 3830
- [7] **C. Martinez, J. Zanelli**, Phys. Rev. D **61** (2000) 104013
- [8] **M. Kamara, T. Koikawa**, Phys. Lett. B **533** (1995) 196
- [9] **A. Garcia** hep-th/990911

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Tokat'da doğdu. İzzet Ünver Lisesi'nden 1992 yılında mezun olduktan sonra 1993 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Maden Fakültesi Maden Mühendisliği bölümüne girdi. Bir yıl İ. T. Ü. Dil-İnkılap Fakültesi'nde okuduğu İngilizce hazırlık sınıfından sonra 1995 yılında Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Mühendisliği bölümüne yatay geçiş yaptı. 1999 kış yarı yılında lisans öğrenimini tamamladı. Aynı yıl İ. T. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Mühendisliği Programı Fizik Mühendisliği yüksek lisans öğrenimine başladı..