



TEMAS PROBLEMİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ANALİZİ

Murat Yaylacı¹, Pembe Merve Karabulut² ve Ahmet Birinci³

¹Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Rize

²Karadeniz Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon

³Karadeniz Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon

ABSTRACT

In this paper, a contact problem for two elastic layers resting on a elastic half plane and loaded by uniformly distributed load is solved using finite element method. Body forces of elastic layers are neglected in the problem. Thickness in z-direction is taken to be unit. The finite element model of the problem is constituted using ANSYS software and the two dimensional analysis of the problem is carried out. By reason of the fact that maximum value of the normal stress is on the symmetry axis, σ_x and σ_y stresses on the symmetry axis are determined for various dimensionless quantities. Finally, the results obtained from finite element method are verified by comparison with the analytical results.

ÖZET

Bu çalışmada, düzgün yayılı yük ile yüklenmiş ve yarım düzleme oturan elastik iki tabakanın temas problemi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Çözümde tabakaların kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Problem düzlem hal için incelendiğinden z eksenini doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır. Problemin sonlu eleman modeli ANSYS paket programı kullanılarak oluşturulmuş ve iki boyutlu analizi yapılmıştır. Çeşitli boyutsuz büyüklükler için normal gerilmeler elde edilmiş ve bulunan sonuçlar literatürdeki analitik sonuçlarla karşılaştırılarak doğrulanmıştır.

GİRİŞ

Temas problemleri pratik öneme sahip mühendislik yapılarında geniş uygulama alanları bulmuşlardır. Temeller, yol ve havaalanı üst yapıları, demiryolları, akaryakıt tankları, tahıl siloları, silindirik miller ve bilyeler bu uygulama alanları arasında yer aldığı söylenebilir. Bu nedenle temas problemlerine ilişkin literatürde çok sayıda analitik [1-5] ve nümerik [6-10] çalışma mevcuttur. Bu çalışmaların yanında, yarım düzleme oturan tabakalarla ilgili temas problemi çalışmaları bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir [11-18].

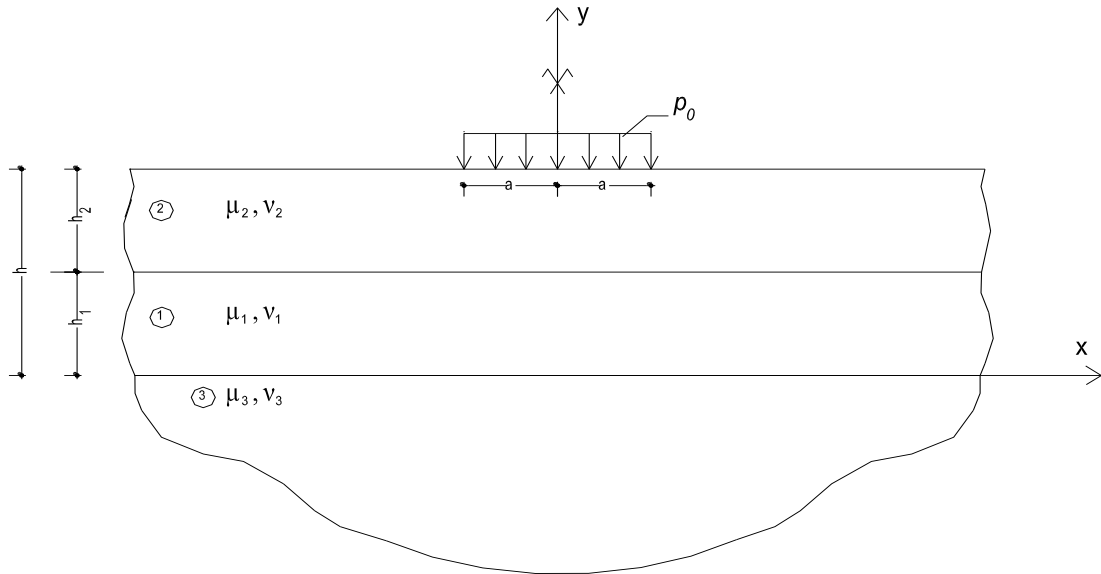
Çoğu durumda kesin çözümün mümkün olduğu uygun model şekli bulunamaz ve temas gerilmelerini belirlemek için sayısal yöntemlere ihtiyaç duyulur [19]. Bu ihtiyaçtan dolayı birçok araştırmacı tarafından temas problemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) gibi yaklaşık bir yöntemle çözümleri araştırılmıştır. Üç boyutlu sürtünmeli temas problemi sonlu elemanlar yöntemine bağlı doğrudan çözüm yöntemi olan matematiksel programlama tekniği ile Klarbring [20] tarafından incelenmiştir. Sezer [21], ANSYS Sonlu Elemanlar paket programını kullanarak temas elemanları modellemiş ve ANSYS paket programı temas elemanları kütüphanesinde bulunan değişik temas algoritmaları ve temas elemanı uygulama seçeneklerini irdelemiştir. Sonlu elemanlar yöntemini esas alan NX-NASTRAN paket programı kullanılarak ayrılmalı temas problemi Roncevic ve Siminiati [22] tarafından analiz

edilmiş ve elde edilen temas mesafeleri literatürde bulunan teorik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Temas problemlerinde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılan analizlerde temas algoritmalarının (Augmented Lagrangian Method, Penalty Method, Adapted Penalty Method, Adapted Augmented Lagrangian Method) karşılaştırılması Bussetta vd. [23] tarafından ele alınmıştır. Yaylacı [24], iki elastik çeyrek düzleme oturan elastik iki tabakanın ayrılmalı temas problemini ve Öner vd. [25] Winkler zemine oturan elastik iki tabaka için ayrılmalı temas problemini analitik ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak çözmüşlerdir.

Bu çalışmada, düzgün yayılı yük ile yüklenmiş ve elastik yarım düzleme oturan iki tabakanın temas problemi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. En büyük normal gerilmelerin simetri ekseninde olduğu bilindiğinden, bu ekseninde oluşan σ_x ve σ_y normal gerilmeleri çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilmiştir. Son olarak bulunan sonuçlar literatürdeki analitik sonuçlarla Çakıroğlu [26] karşılaştırılarak doğrulanmıştır.

PROBLEMİN TANIMI

Düzgün yayılı yük ile yüklenmiş ve yarım düzleme oturan elastik iki tabakanın temas problemi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Çözümde tabakaların kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Üst tabaka $(-a, +a)$ aralığında düzgün yayılı yük ile yüklenmiştir. Tabakalar ve yarım düzlem $(-\infty, +\infty)$ aralığında uzanmaktadır. Problem düzlem hal için incelendiğinden z eksenine doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır. (Şekil 1).

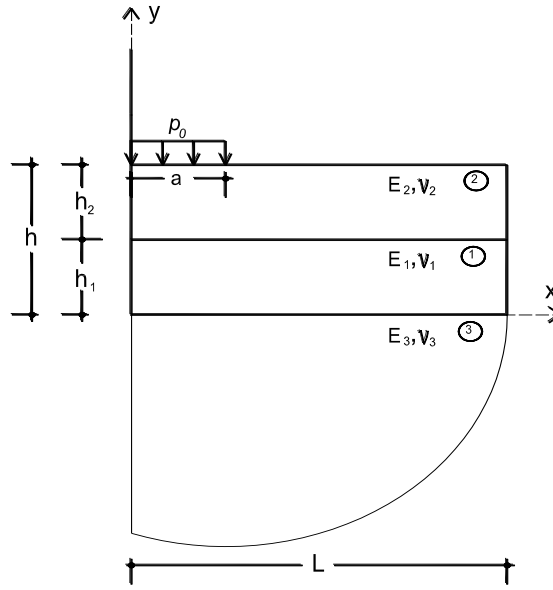


Şekil 1. Problemin Geometrisi

Burada μ_i, ν_i ($i=1,2,3$) tabakaların ve yarım düzlemin kayma modülünü ve Poisson oranını ifade etmektedir. Ayrıca h_1, h_2 ve h sırasıyla (1) nolu tabakanın yüksekliğini, (2) nolu tabakanın yüksekliğini ve tabakaların toplam yüksekliğini göstermektedir.

PROBLEMİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ANALİZİ

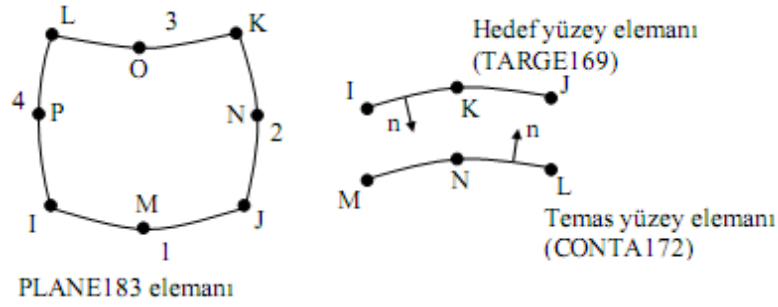
ANSYS [27] paket programıyla yapılan bu analizde, eleman tiplerinin belirlenmesi, elemanların malzeme özelliklerinin atanması, problemin geometrisinin oluşturulması, ağ yapısının oluşturulması, sınır şartlarının verilmesi, yüklemenin yapılması, problemin çözümü ve analiz sonuçlarının alınması gibi birçok işlem gerçekleştirilmiştir. Problem y eksenine göre simetrik modellenmiş olup tabakaların ağırlığı ihmal edilmiştir (Şekil 2). Sonlu elemanlar modelinin tüm parçalarında lineer, elastik ve izotropik malzeme kullanılmıştır. Analizlerde tabakaların yarı uzunluğu $L=1\text{ m}$ ve (2) nolu tabakanın yüksekliği $h_1=0.2\text{ m}$, Elastisite Modülü ve Poisson oranı sırasıyla $E_1=3 \times 10^{10}\text{ Pa}$, $\nu_1=0.34$ olarak alınmıştır. Yayıllı yük değeri ise $P_0=10 \times 10^4\text{ N/m}$ olarak alınmıştır. (2) nolu tabakaya ve yarım düzleme ilişkin değerler ise analizlerde kullanılan oranlara bağlı olarak hesaplanmış ve kullanılmıştır.



Şekil 2. Analiz geometrisi

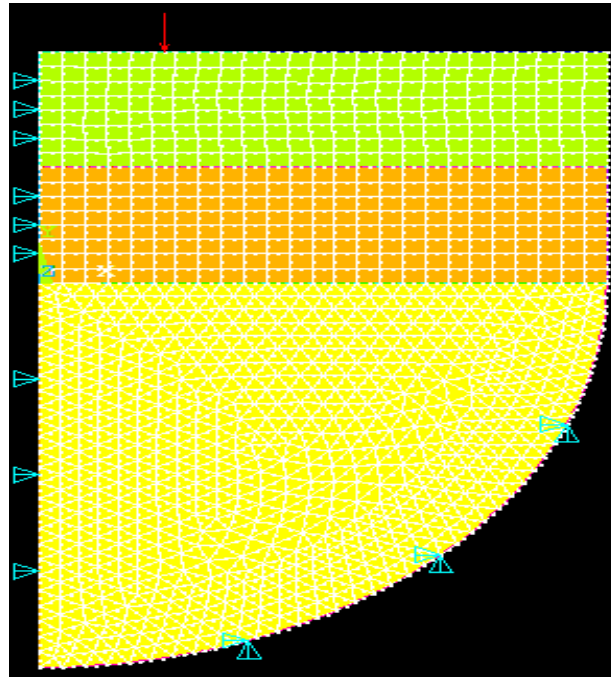
Eleman seçimi, analizde kullanılacak olan matematiksel modelin belirlenmesi açısından son derece önemlidir. Elemanlar yapılacak analizin çeşidine göre seçilir. Yani statik, termal, akışkan veya elektromanyetik analizler için farklı elemanlar kullanılır. Benzer şekilde analiz edilecek olan modelin 2 veya 3 boyutlu olması eleman seçimindeki etkenlerden biridir. Seçilen elemanın düğüm noktalarına ait serbestlik derecelerinin tipi ve sayısı analizin doğru yapılması açısından çok önemlidir. Sonlu eleman analizinde ANSYS paket programı kütüphanesinde bulunan PLANE183 tipi yapısal eleman kullanılmıştır. PLANE183 tipi eleman, sekiz düğüm noktası ile tanımlanır ve her düğüm noktasının iki serbestlik derecesi bulunmakta olup dönme serbestliği bulunmamaktadır. Dolayısıyla x ve y doğrultularında yer ve şekil değiştirebilir. Elemanın plastiklik, büyük esnemelere dayanma ve oldukça fazla şekil değiştirme özellikleri vardır. PLANE183 elemanı, karmaşık geometrilerin ağ yapısının oluşturulmasında dört bağlantı noktasına sahip iki boyutlu diğer elemanlara göre daha iyi sonuç vermektedir. Bu çalışmada yapılan analizlerde temas çiftinin modellenmesinde yüzey-yüzey (SURFACE TO SURFACE) temas modeli kullanılmıştır. Yüzey-yüzey temas modeli düğüm noktalarının üst üste gelmemesi halinde de çözüme olanak sağlamaktadır. Problemden temas eden bölgede temas çifti (Contact Pair) oluşturulmuştur. Temas çiftleri iki eleman tipinden oluşur. Bunlar TARGET ve CONTACT eleman tipleridir. Temas çiftinin oluşturulmasında hedef yüzey TARGE169 ve temas yüzey CONTA172 elemanları kullanılmıştır. TARGE169 ve CONTA172 elemanları üç düğüm noktası içeren elemanlardır.

ve bu düğüm noktaları Şekil 3'de görülebileceği gibi PLANE183 elemanının yüzeyindeki düğümlerle örtüşmektedir [27].



Şekil 3. PLANE183 elemanı ve TARGE169/CONTA172 temas elemanları

Modelin elemanlara bölünmesi işlemi sırasında geometrideki parçalara ait malzeme özellikleri ve eleman tipleri atanmakta olup kullanılan ağ yapısı ve sıklığı belirlenmektedir. Sınır şartlarının uygulanması ve yüklemenin yapılması işlemlerinden sonra problem program yardımıyla çözülmektedir. Çıkış kısmında (General Postprocessor), çözüm kısmından elde edilen sonuçlara grafik, şekil ya da liste halinde ulaşılabilir. Problemin çözümünde 3673 düğüm noktası ve 1624 eleman kullanılmış olup analiz sonrası oluşan şekil değişikliği aşağıda verilmiştir (Şekil 4).



Şekil 4. Problemin analiz geometrisi

SONUÇLAR

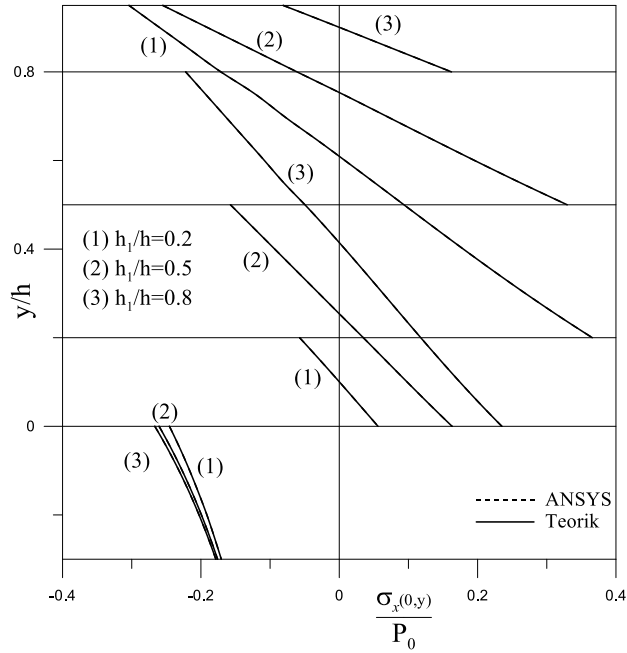
Bu çalışmada, düzgün yayılı yük ile yüklenmiş ve elastik yarım düzleme oturan elastik iki tabakanın temas problemi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. En büyük normal gerilmelerin simetri ekseninde olduğu bilindiğinden, bu ekseninde oluşan σ_x ve σ_y normal gerilmeleri çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilmiştir. Söz konusu gerilmelere ilişkin değerler iki farklı durum için hesaplanmıştır. İlk olarak yayılı yükün yarı uzunluğu (a/h) sıfıra yaklaştırılarak tekil yük durumu irdelenmiş, daha sonra ise düzgün yayılı yük olması durumu ele alınmıştır.

Tablo 1. ($x/h = 0$) simetri kesitinde (h_1/h) değişkenine göre $\sigma_x(0, y)/p_0$ normal gerilme değerleri ($a/h = 0.001, \mu_2/\mu_1 = 0.575, \mu_3/\mu_1 = 1.766, \nu_1 = 0.34, \nu_2 = 0.34, \nu_3 = 0.30$)

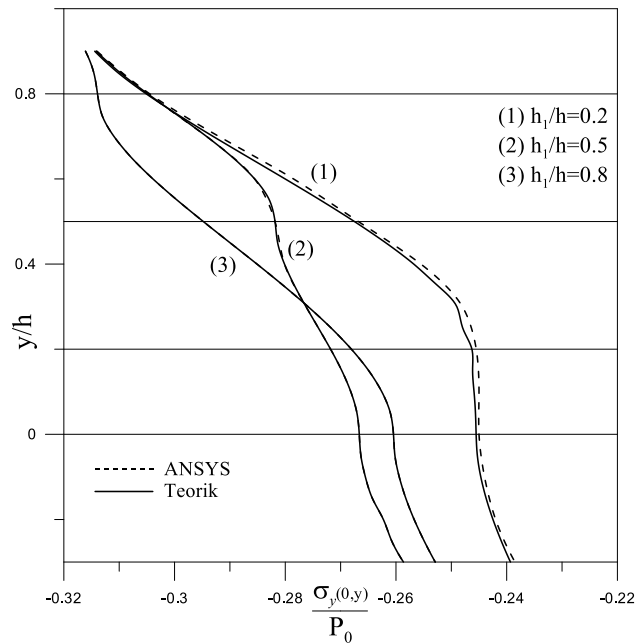
$\frac{y}{h}$ ↓	$h_1/h = 0.2$			$h_1/h = 0.5$		
	σ_x/P_0			σ_x/P_0		
	Çakıroğlu	FEM	Hata (%)	Çakıroğlu	FEM	Hata (%)
0.9	-0.06582	-0.065	1.25	-0.03826	-0.038	0.68
0.8	-0.04805	-0.048	0.10	-0.00967	-0.0095	1.76
0.7	-0.02991	-0.03	0.30	0.00970	0.0095	2.06
0.6	0.00954	0.009	5.66	0.03833	0.038	0.86
0.5	0.02958	0.03	1.42	0.06701	0.067	0.01
0.5	0.02958	0.03	1.42	-0.06698	-0.066	1.46
0.4	0.04782	0.047	1.71	-0.03839	-0.038	1.02
0.3	0.06544	0.065	0.67	-0.00981	-0.0095	3.16
0.2	0.08357	0.085	1.71	0.00999	0.0095	4.90
0.2	-0.02990	-0.03	0.33	0.00999	0.0095	4.90
0.1	0.00052	0.0005	3.85	0.03840	0.038	1.04
0.0	0.02775	0.027	2.70	0.06766	0.068	0.50
0.0	-0.28366	-0.285	0.47	-0.29199	-0.291	0.34
-0.1	-0.24326	-0.245	0.72	-0.24868	-0.248	0.27
-0.2	-0.21035	-0.215	2.21	-0.21376	-0.213	0.36
-0.3	-0.18328	-0.185	0.94	-0.18528	-0.185	0.15

Tablo 2. ($x/h = 0$) simetri kesitinde (h_1/h) değişkenine göre $\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilme değerleri ($a/h = 0.001, \mu_2/\mu_1 = 0.575, \mu_3/\mu_1 = 1.766, \nu_1 = 0.34, \nu_2 = 0.34, \nu_3 = 0.30$)

$\frac{y}{h}$ ↓	$h_1/h = 0.2$			$h_1/h = 0.5$		
	σ_y/P_0			σ_y/P_0		
	Çakıroğlu	FEM	Error (%)	Çakıroğlu	FEM	Error (%)
0.9	-0.31607	-0.315	0.34	-0.31605	-0.316	0.02
0.8	-0.31102	-0.311	0.01	-0.31221	-0.312	0.07
0.7	-0.30488	-0.305	0.04	-0.30777	-0.305	0.90
0.6	-0.29866	-0.295	1.23	-0.30431	-0.304	0.10
0.5	-0.29302	-0.29	1.03	-0.30291	-0.303	-0.03
0.4	-0.28846	-0.286	0.85	-0.30158	-0.301	0.19
0.3	-0.28538	-0.285	0.13	-0.29869	-0.298	0.23
0.2	-0.28424	-0.284	0.08	-0.29552	-0.295	0.18
0.1	-0.28394	-0.283	0.33	-0.29301	-0.292	0.34
0.0	-0.28366	-0.282	0.59	-0.29199	-0.291	0.34
-0.1	-0.28255	-0.281	0.55	-0.29040	-0.29	0.14
-0.2	-0.27866	-0.278	0.24	-0.28640	-0.285	0.49
-0.3	-0.27366	-0.273	0.24	-0.28085	-0.28	0.30



Şekil 5. ($x/h = 0$) simetri kesitinde (h_1/h) değişkenine göre $\sigma_x(0, y)/p_0$ normal gerilme değerleri ($a/h = 0.001, \mu_2/\mu_1 = 1.766, \mu_3/\mu_1 = 0.575, \nu_1 = 0.34, \nu_2 = 0.3, \nu_3 = 0.34$)



Şekil 6. ($x/h = 0$) simetri kesitinde (h_1/h) değişkenine göre $\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilme değerleri ($a/h = 0.001, \mu_2/\mu_1 = 1.766, \mu_3/\mu_1 = 0.575, \nu_1 = 0.34, \nu_2 = 0.3, \nu_3 = 0.34$)

Şekil 5-6 ve Tablo 1-2' de üst tabakanın tekil yükle yüklenmesi durumunda ($a/h=0.001$) simetri ekseninde meydana gelen σ_x ve σ_y normal gerilmelerinin çeşitli boyutsuz büyüklükler için değişimleri verilmiştir.

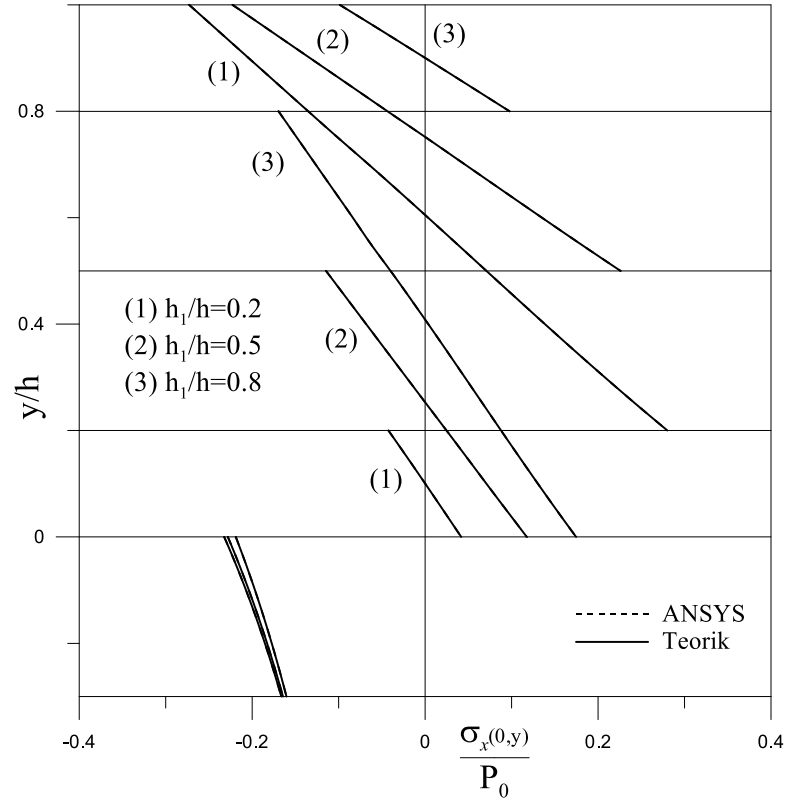
Üst tabakanın yayılı yükle yüklenmesi durumunda ($a/h=1$) simetri ekseninde meydana gelen σ_x ve σ_y normal gerilmelerinin çeşitli boyutsuz büyüklükler için değişimleri Tablo 3-4 ve Şekil 7-8' da verilmiştir. Sonuç olarak sonlu elemanlar metoduyla yapılan çözümden elde edilen sonuçların literatürdeki analitik sonuçlara [26] çok yakın olduğu görülmüştür.

Tablo 3. ($x/h = 0$) simetri kesitinde (h_1/h) değişkenine göre $\sigma_x(0, y)/p_0$ normal gerilme değerleri ($a/h = 1, \mu_2/\mu_1 = 0.575, \mu_3/\mu_1 = 1.766, \nu_1 = 0.34, \nu_2 = 0.34, \nu_3 = 0.30$)

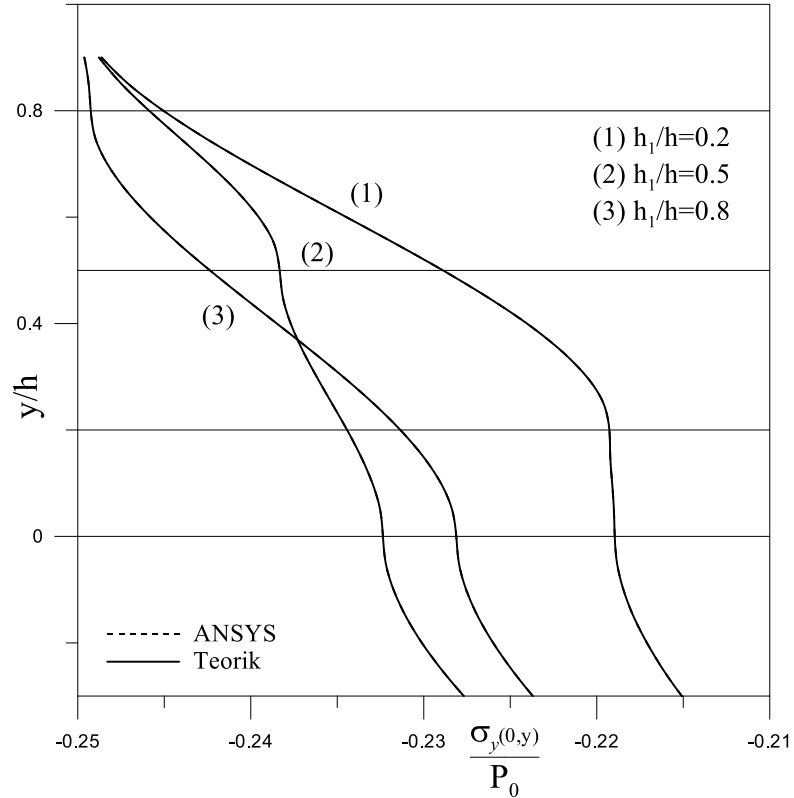
$\frac{y}{h}$ ↓	$h_1/h = 0.2$			$h_1/h = 0.5$		
	σ_x/P_0			σ_x/P_0		
	Çakıroğlu	FEM	Error (%)	Çakıroğlu	FEM	Error (%)
1.0	-0.05386	-0.053	1.60	-0.04129	-0.041	0.70
0.9	-0.04230	-0.042	0.71	-0.02615	-0.026	0.57
0.8	-0.03032	-0.03	1.06	-0.01015	-0.01	1.48
0.7	-0.01766	-0.018	1.93	0.01012	0.01	1.19
0.6	-0.00396	-0.004	1.01	0.02615	0.026	0.57
0.5	0.01767	0.017	3.79	0.04129	0.041	0.70
0.5	0.01767	0.018	1.87	-0.04458	-0.044	1.30
0.4	0.03034	0.03	1.12	-0.02594	-0.026	0.23
0.3	0.04233	0.042	0.78	-0.00729	-0.007	3.98
0.2	0.05399	0.054	0.02	0.00727	0.007	3.71
0.2	-0.01904	-0.019	0.21	0.00727	0.007	3.71
0.1	0.00025	0.00025	0.00	0.02589	0.025	3.44
0.0	0.01804	0.018	0.22	0.04451	0.045	1.10
0.0	-0.24087	-0.24	0.36	-0.24447	-0.245	0.22
-0.1	-0.21353	-0.215	0.69	-0.21617	-0.216	0.08
-0.2	-0.19000	-0.19	0.00	-0.19189	-0.191	0.46
-0.3	-0.16969	-0.17	0.18	-0.17100	-0.17	0.58

Table 4. ($x/h = 0$) simetri kesitinde (h_1/h) değişkenine göre $\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilme değerleri ($a/h = 1, \mu_2/\mu_1 = 0.575, \mu_3/\mu_1 = 1.766, \nu_1 = 0.34, \nu_2 = 0.34, \nu_3 = 0.30$)

$\frac{y}{h}$ ↓	$h_1/h = 0.2$			$h_1/h = 0.5$		
	σ_y/P_0			σ_y/P_0		
	Çakıroğlu	FEM	Error (%)	Çakıroğlu	FEM	Error (%)
1.0	-0.99998	-0.999	0.10	-0.99998	-0.999	0.10
0.9	-0.24957	-0.249	0.23	-0.24972	-0.249	0.29
0.8	-0.24847	-0.248	0.19	-0.24907	-0.2485	0.23
0.7	-0.24697	-0.247	-0.01	-0.24830	-0.248	0.12
0.6	-0.24530	-0.245	0.12	-0.24766	-0.2475	0.06
0.5	-0.24369	-0.243	0.28	-0.24741	-0.247	0.17
0.4	-0.24232	-0.242	0.13	-0.24708	-0.2465	0.23
0.3	-0.24138	-0.241	0.16	-0.24633	-0.246	0.13
0.2	-0.24103	-0.241	0.01	-0.24547	-0.245	0.19
0.1	-0.24095	-0.24	0.39	-0.24476	-0.2445	0.11
0.0	-0.24087	-0.239	0.78	-0.24447	-0.244	0.19
-0.1	-0.24018	-0.238	0.91	-0.24374	-0.243	0.30
-0.2	-0.23833	-0.237	0.56	-0.24179	-0.242	0.09
-0.3	-0.23559	-0.235	0.25	-0.23891	-0.238	0.38



Şekil 7. ($x/h = 0$) simetri kesitinde (h_1/h) değişkenine göre $\sigma_x(0, y)/p_0$ normal gerilme değerleri ($a/h = 1, \mu_2/\mu_1 = 1.766, \mu_3/\mu_1 = 0.575, \nu_1 = 0.34, \nu_2 = 0.3, \nu_3 = 0.34$)



Şekil 8. ($x/h = 0$) simetri kesitinde (h_1/h) değişkenine göre $\sigma_y(0, y)/p_0$ normal gerilme değerleri ($a/h = 1, \mu_2/\mu_1 = 1.766, \mu_3/\mu_1 = 0.575, \nu_1 = 0.34, \nu_2 = 0.3, \nu_3 = 0.34$)

KAYNAKLAR

- [1] Y. Weitsman, On the unbonded contact between plates and an elastic half space, *Journal of Applied Mechanics-ASME*. 36:2 (1969) 198–202.
- [2] L.M. Keer, J. Dundurs, K.C. Tsai, Problems involving a receding contact between a layer and a half space, *Journal of Applied Mechanics-ASME*. 39:4 (1972) 1115–1120.
- [3] M. Ratwani, F. Erdogan, On the plane contact problem for a frictionless elastic layer, *International Journal of Solids and Structures*. 9:8 (1973) 921–936.
- [4] M.R. Geçit, Axisymmetric contact problem for an elastic layer and elastic foundation, *International Journal of Engineering Science*. 19:6 (1981) 747–755.
- [5] D. Nowell, D.A. Hills, Contact problems incorporating elastic layers, *International Journal of Solids and Structures*. 24 (1988) 105-115.
- [6] S.K. Chan, I.S. Tuba, A finite element method for contact problems of solid bodies -part I: theory and validation, *International Journal of Mechanical Sciences*. 13:7 (1971) 615–625.
- [7] A. Francavilla, O.C. Zienkiewicz, A note on numerical computation of elastic contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 9 (1975) 913–924.
- [8] H.-S. Jing, M.-L. Liao, An improved finite element scheme for elastic contact problems with friction, *Computers & Structures*. 35:5 (1990) 571–578.
- [9] J.A. Garrido, A. Foces, F. Paris, BEM applied to receding contact problems with friction, *Mathematical and Computer Modelling*. 15 (1991) 143–154.
- [10] J.A. Garrido, A. Lorenzana, Receding contact problem involving large displacements using the BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 21:4 (1998) 295–303.
- [11] M.B. Civelek, F. Erdoğan, The axisymmetric double contact problem for a frictionless elastic layer, *International Journal of Solids and Structures*, 10 (1974) 639-659.
- [12] H. Boduroğlu, F. Delale, Elastik bir tabakanın sürtünmeli değme problemi, *DOĞA:MAG/ÇAG*, (1980) 17-26.
- [13] R.B. King, T.C. O'Sullivan, Sliding contact stresses in a two-dimensional layered elastic half-space, *International Journal of Solids and Structures*, 23:5 (1987) 581-597.
- [14] M.J. Pindera, M.S. Lane, Frictionless contact of layered half-planes, Part-I: analysis, *Journal of Applied Mechanics*. 60 (1993) 5633-5639.
- [15] A.A. Elsharkawy, Effect of Friction on Subsurface Stresses in Sliding Line Contact of Multilayered Elastic Solids, *International Journal of Solids and Structures*. 36 (1999) 3903-3915.
- [16] İ. Çömez, R. Erdöl, Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılmış, Elastik Yarım Düzleme Tam Yapışık Tabakanın Sürtünmeli Değme Problemi, *XV. Ulusal Mekanik Kongresi*. Eylül (2007) Isparta Bildiriler Kitabı 309-320.
- [17] V. Kahya, A. Birinci, R. Erdöl, Frictionless contact problem between two orthotropic elastic layers, *International Journal of Computational Mathematical Sciences*. (2007) 121-27.
- [18] E. Öner, *Rijit dairesel bir pançla bastırılan elastik tabaka ve yarım düzlemin sürtünmeli değme problemi*, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon 2013.
- [19] S.K. Chan, I.S. Tuba, A finite element method for contact problems of solid bodies Part I. theory and validation, *International Journal of Mechanical Sciences*. 13 (1971) 615 - 625.
- [20] A. Klarbring, A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58:2 (1986) 175-200.

- [21] S. Sezer, *an evaluation of ANSYS contact elements*, Master of Science in Mechanical Engineering, Louisiana State University, 2005.
- [22] B. Roncevic, D. Siminiati, Two dimensional receding contact problem analysis with NX-NASTRAN, *Advanced Engineering*, 4 (2010) 1846-5900.
- [23] P. Bussetta, D. Marceau, J.P. Ponthot, The adapted augmented lagrangian method: a new method for the resolution of the mechanical frictional contact problem, *Comput. Mech.* 49 (2012) 259-275.
- [24] M. Yaylacı, *İki elastik çeyrek düzleme oturan iki elastik tabakanın temas problemi*, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 2013.
- [25] E. Oner, M. Yaylacı A. Birinci, Solution of a receding contact problem using an analytical method and a finite element method. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 9 (2014) 333-345.
- [26] F.L. Çakıroğlu, *İki elastik çeyrek düzleme oturan iki elastik tabakanın temas problemi*, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 2013.
- [27] ANSYS, Swanson Analysis Systems Inc., Houston PA, USA (2007).