



AKIM POTANSİYELİ TANIMI İLE YERALTI SUYU PROBLEMLERİNE ÖRNEK ÇÖZÜMLER

Serdar Korkmaz¹

¹ Uludağ Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Bursa

ABSTRACT

In this study, solutions to several groundwater flow problems were obtained using the concept of discharge potential. In this method, the discharge vector is defined as the negative gradient of the discharge potential. When written in terms of discharge potential, the governing equation of flow gives the same linear equation for both confined and unconfined aquifers. As a result, the potential flow theory is applicable and the method of superposition can be used. Through superposition of several independent solutions, the solution of a more complex problem can be reached. Using discharge potential, a flownet can be formed by drawing equipotential and stream lines in horizontally two-dimensional groundwater flow problems. Example solutions are presented in the study.

ÖZET

Bu çalışmada akım potansiyeli kavramı kullanılarak bazı yeraltı suyu problemlerine çözümler üretilmiştir. Bu yöntemde akım vektörü, akım potansiyelinin negatif gradyanı şeklinde tanımlanmıştır. Akımı yöneten denklem, akım potansiyeli cinsinden yazıldığında hem basınçlı hem de basınçsız akiferler için aynı lineer denklemi vermektedir. Böylece potansiyel akım teorisi geçerli olur ve süperpozisyon prensibi kullanılabilir. Bu şekilde birbirinden bağımsız çözümler süperpoze edilerek daha karmaşık bir problemin çözümüne ulaşılabilir. Akım potansiyeli kullanılarak yatay düzlemde iki boyutlu yeraltı suyu problemlerinde eşpotansiyel ve akım çizgilerini çizip akım ağı oluşturmak mümkündür. Çalışmada örnek çözümlere yer verilmiştir.

GİRİŞ

Yeraltı suyu akım problemlerinin çözümüne yönelik birçok sayısal ve analitik yöntem bulunmaktadır. En fazla kullanılan sayısal metodlar sonlu farklar ve sonlu elemanlar metodlarıdır. Sayısal modelleme için en yaygın kullanılan yazılımlara örnek olarak MODFLOW [1], MIKE-SHE [2] veya FEFLOW [3] gösterilebilir. Bilgisayar teknolojisinin ilerlemesi ile yüksek çözünürlüklü gridlerde çözüm yapmak mümkündür. Ancak bazı durumlarda sayısal modeller halen yetersiz kalmaktadır. Örnek olarak sonsuz akifer modellemesinden bahsedilebilir. Sayısal modelleme programı ile problem çözülmeden önce oluşturulan gridin sonucu etkilemeyecek kadar büyük olmadığı ancak problem çözüldükten sonra anlaşılmakta ve bazı durumlarda tüm modellemenin baştan yapılması gerekmektedir. Bu problem, genelde, aşırı büyük gridler oluşturulmasıyla aşılmaya çalışılmaktadır. Bu da, fazladan hesaplama zamanı anlamına gelmektedir.

Bu çalışmada, akım potansiyeli tanımı kullanılarak bazı yeraltı suyu problemlerine analitik çözümler sunulmuştur. Akım potansiyeli kavramı ilk olarak Strack [4,5] tarafından kullanılmıştır. Haitjema [6] bu kavramı, geliştirdiği analitik element metodun temeli olarak kullanmıştır. Akım potansiyeli kullanımının avantajı, Laplace denklemini sağlaması ve potansiyel teorisinin uygulanabilir olmasıdır. Böylece süperpozisyon tekniği kullanılarak karmaşık problemlerin çözümüne ulaşılabilmektedir.

METODOLOJİ

Yeraltı suyu akımını tanımlayan iki ana denklemden birincisi Darcy kanunundan [7] türetilmiş özgül debi ve ikincisi ise süreklilik denklemdir. Bu denklemler birleştirilerek homojen ve izotropik ortamlar için aşağıdaki denklem elde edilebilir:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Akım potansiyeli cinsinden yazıldığından denklem (1) aşağıdaki hale dönüşür:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

Burada, akım potansiyeli $\Phi(x, y)$, basınçlı akifer için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Phi = Kbh - \frac{1}{2}Kb^2 \quad (3)$$

Basınçsız akifer durumunda ise

$$\Phi = \frac{1}{2}Kh^2 \quad (4)$$

ifadesi kullanılır. Akım vektörü, akım potansiyeli ile aşağıdaki şekilde ilişkilidir.

$$Q_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{ve} \quad Q_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (5)$$

Potansiyel akım teorisine göre, vektör alanı, skaler potansiyel bir fonksiyonun gradyanı olarak tanımlanır. Bu durumda akım vektör alanını oluşturan Q_x ve Q_y , akım potansiyeli $\Phi(x, y)$ 'nin negatif gradyanına eşittir ve dolayısıyla potansiyel akım teorisi geçerlidir. Süperpozisyon prensibinin uygulanması ile çeşitli yeraltı suyu problemlerinin çözümlerini gerçekleştirmek mümkün olmaktadır.

1-Boyutlu Yeraltı Suyu Akımı:

Her iki tarafında Dirichlet sınır koşulu bulunan basınçlı veya basınçsız bir akiferde yeraltı suyu akım denklemi, akım potansiyeli $\Phi(x)$ cinsinden çözüldüğünde aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\Phi = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{L} x + \Phi_1 \quad (6)$$

Bu denklemde Φ_1 ve Φ_2 sınır koşulları olup basınçlı akifer için denklem (3) ve basınçsız akifer için denklem (4) kullanılarak hesaplanır. Sonuca hidrolik yük $h(x)$ cinsinden ulaşmak için denklem (6)'nın sol tarafına benzer şekilde denklem (3) veya (4) konularak hesap yapılır.

Birleşik Basınçlı ve Basınçsız Akım:

Başlangıçta basınçlı ve her iki tarafında Dirichlet sınır koşulu bulunan bir akiferden, aşırı miktarda su çekildiğinde akiferin bir tarafındaki basınç akifer kalınlığının altına düşer ve o bölgede basınçsız akım oluşur. Bu durumda akiferde oluşan akıma birleşik basınçlı ve basınçsız akım denir. Yine bu problemde de denklem (6) çözümü verecektir. Hidrolik yük dağılımı hesaplanırken basınçlı akım kısmı için denklem (3) ve basınçsız akım kısmı için denklem (4) kullanılır. Tam arayüzde ise $h(x)=b$ olduğundan $\Phi_t = \frac{1}{2}Kb^2$ değeri elde edilecektir.

2-Boyutlu Yeraltı Suyu Akımı:

2-boyutlu bir akım probleminde $\Phi(x, y)$ değeri akım alanı içinde herhangi bir noktada hesaplanabilir. Belli aralıklarla akım potansiyeli hesaplanarak eşpotansiyel konturlar çizmek mümkündür. $\Phi(x, y)$ Laplace denklemini sağladığı için potansiyel teori geçerlidir. Bu durumda yine Laplace denklemini sağlayan bir akım fonksiyonu $\Psi(x, y)$ da mevcuttur. Potansiyel fonksiyon ve akım fonksiyonu aşağıdaki Cauchy-Riemann denklemleri ile birbirine bağlıdır.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (8)$$

Benzer şekilde akım alanında farklı noktalarda akım fonksiyonunun değerini hesaplayarak akım çizgilerini çizmek mümkündür. Akım çizgileri, akım vektörlerine teğet olup eşpotansiyel konturları dik olarak keser. İki akım çizgisinin değerleri arasındaki fark bu iki çizgi arasından geçen akımın debisine eşittir.

Pompaj Kuyusu Civarındaki Yeraltı Suyu Akımı:

Bu problem polar koordinat sistemi kullanılarak ve kuyuyu merkez kabul ederek $r-\alpha$ düzleminde çözülür. Sonsuz büyüklükteki bir akiferde tek bir pompaj kuyusu bulunduğunda ve pompaj debisi Q ile ifade edildiğinde:

$$Q_r = \frac{-Q}{2\pi r} \quad (9)$$

Bu denklemde r kuyudan dışarıya doğru ölçülen radyal mesafeyi ve Q_r bu mesafede kuyuya doğru olan ve birim genişlikten geçen akımı ifade eder. Burada eksi işareti akımın kuyuya doğru olduğunu gösterir. Bu durumda akım potansiyeli aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Q_r = -\frac{d\Phi}{dr} \quad (10)$$

Akım alanı içersindeki bir gözlem kuyusundaki değer sınır koşulu olarak kullanılıp denklem çözüldüğünde aşağıdaki sonuç bulunur.

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} + \Phi_0 \quad (11)$$

Akım ağı oluşturabilmek için akım çizgilerinin de çizilmesi gerekir. Akım çizgileri eşit açı aralıklarıyla kuyuya doğru çizilir. Bunun için aşağıdaki denklem kullanılır.

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \alpha \quad (12)$$

Eğer akım alanında birden fazla pompaj kuyusu varsa, akım potansiyeli süperpozisyon tekniği ile bulunur. Örneğin iki pompaj kuyusu olduğu durumda potansiyel fonksiyon ve akım fonksiyonu aşağıdaki denklemler ile bulunur.

$$\Phi = \frac{Q_1}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_0^{(1)}} + \frac{Q_2}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_0^{(2)}} + \Phi_0 \quad (13)$$

$$\Psi = \frac{Q_1}{2\pi} \alpha_1 + \frac{Q_2}{2\pi} \alpha_2 \quad (14)$$

Denklem (13)'de $r_0^{(1)}$ ve $r_0^{(2)}$ gözlem kuyusunun 1. ve 2. kuyudan uzaklığını, denklem (14)'de α_1 ve α_2 kuyuları merkez alarak +x ekseninden ölçülen açığı ifade eder. Gözlem kuyuları dışında akiferde bir üniform akım da mevcut olabilir. +x yönünde Q_0 büyüklüğündeki bir üniform akım aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Q_0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (15)$$

Denklem (15)'in integrali alındığında potansiyel fonksiyon,

$$\Phi = -Q_0 x + c \quad (16)$$

ve akım fonksiyonu,

$$\Psi = -Q_0 y \quad (17)$$

denklemleri ile hesaplanır. Üniform akıma ek olarak bir pompaj kuyusu da bulunduğu zaman süperpozisyon prensibi ile aşağıdaki denklemler bulunur.

$$\Phi = -Q_0 x + \frac{Q}{2\pi} \ln r + c \quad (18)$$

$$\Psi = -Q_0 y + \frac{Q}{2\pi} \alpha \quad (19)$$

UYGULAMA

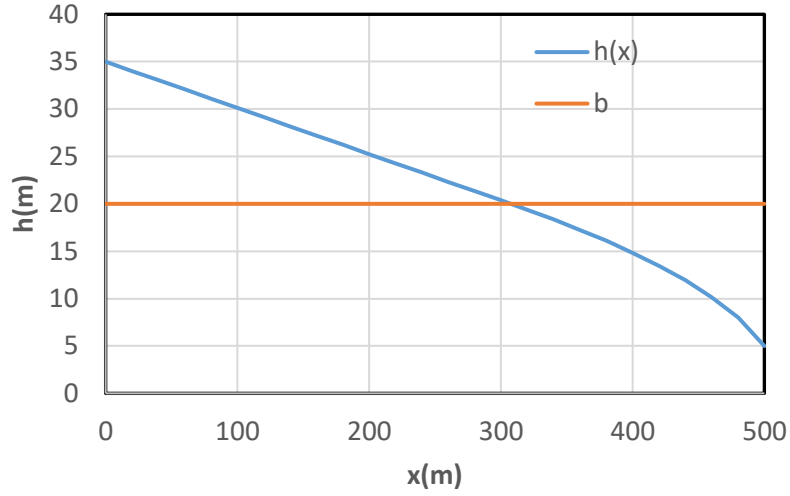
Birleşik Basıncılı ve Basıncısız Akım:

L=500 m uzunluğundaki bir basınçlı akifer, b=20 m kalınlığındadır ve K=0.002 m/s'lik hidrolik iletkenlik değerine sahiptir. Aşırı su çekimi sonucunda sınır koşulları $h(0)=35$ m and $h(500)=5$ m haline gelmektedir ve bu da akiferin bir kısmında basınçsız akım görülmesine neden olmaktadır. Problem, akım potansiyeli tanımı kullanılarak denklem (6) yardımıyla çözülmüştür. Arayüz potansiyeli $\Phi_i=0.4$ olarak hesaplanmış ve hidrolik yükler denklem (3) ve (4)'den çekilerek bulunmuştur. Hidrolik yük dağılımı Şekil 1'de verilmektedir. Arayüz x=308 m'de olup bu noktanın sağ tarafında basınçsız akım görülmektedir.

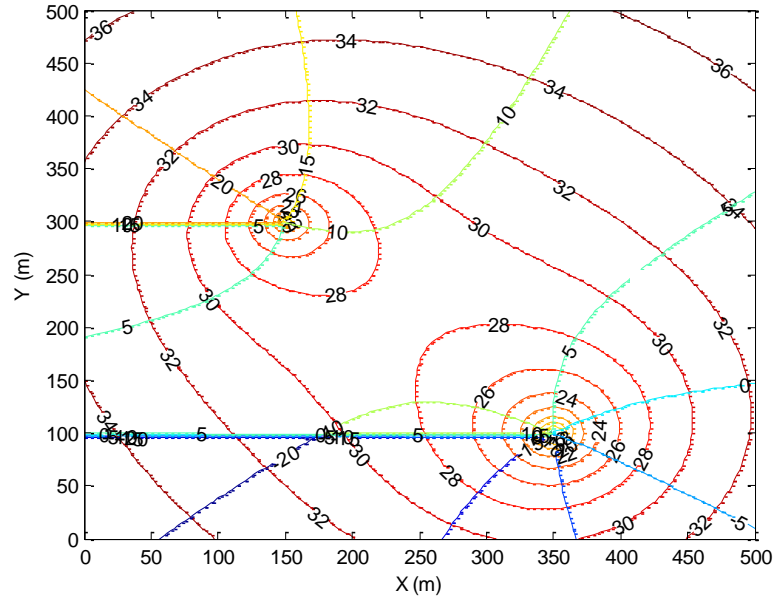
Çoklu Pompaj Kuyuları Etrafındaki Akım:

Yatayda sonsuz büyüklüğe sahip basınçsız bir akiferde iki adet pompaj kuyusu açılmıştır. Bu kuyuların yarattığı alçalma neticesinde oluşan eşpotansiyel ve akım çizgilerinin çizilmesi hedeflenmektedir. Pompaj debileri sırasıyla $Q_1=22$ m³/s ve $Q_2=30$ m³/s'dir. Kuyulardan ilki (x, y)=(150, 300) noktasında ve ikincisi (x, y)=(350, 100) noktasındadır. (x, y)=(400, 300) noktasında bulunan bir gözlem kuyusunda $h_0=80$ m'lik bir yeraltı suyu seviyesi ölçülmüştür. Çözüm aşamasında potansiyel fonksiyon $\Phi(x, y)$ ve akım fonksiyonu $\Psi(x, y)$, 500 m x 500 m

büyükliğünde bir alanda yatayda ve düşeyde 5 m aralıklarla hesaplanmıştır. Buna göre oluşturulan akım ağı Şekil 2’de gösterilmektedir.



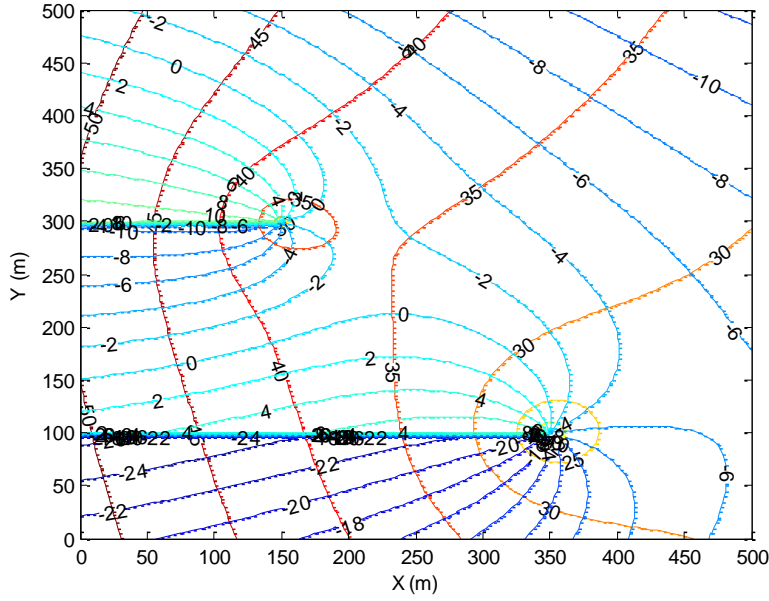
Şekil 1. Birleşik basınçlı-basınçsız akım problemine örnek çözüm



Şekil 2. Basınçsız akiferde 2 pompaj kuyusu için eşpotansiyel ve akım çizgileri

Üniform Akım Alanında Pompaj Kuyuları:

Bu örnekte, yukardaki probleme ek olarak +x yönünde $Q_0=0.04 \text{ m}^2/\text{s}$ büyüklüğünde bir üniform akım süperpoze edilmiştir. Çözüm için denklem (18) ve (19) iki kuyulu duruma göre düzenlenip kullanılmıştır. Akım ağı Şekil 3’de sunulmuştur. Buradan görülebildiği gibi +x yönündeki üniform akımdan dolayı kuyuların sağ tarafındaki etki alanları oldukça küçülmüştür.



Şekil 3. Üniorm akım bulunan akiferde 2 pompaj kuyusunun oluşturduğu akım ağı

SONUÇLAR

Akım potansiyeli kavramı kullanılarak bazı yeraltı suyu akım problemlerinin çözümleri sunulmuştur. Akım potansiyeli kullanmanın avantajı, basınçlı veya basınçsız tüm akiferlerde yöneten denklemin lineer hale gelmesine olanak sağlamasıdır. Bu da süperpozisyon prensibini uygulanabilir kılmaktadır. 2 boyutlu akımlarda, eşpotansiyel ve akım çizgilerinden oluşan bir akım ağı üretmek mümkündür. Kuyu problemlerinde, pompaj yapılan kuyunun etki alanı ve de akım yönleri kolayca belirlenebilir. Bu metodun sayısal yöntemlere göre avantajı, yatayda sonsuz büyüklüğe sahip akiferlerin herhangi bir sınır koşulu varsayımı yapmadan modellenebilmesidir. Çünkü çözüm, hesaplama alanının büyüklüğünden bağımsızdır. Bu gibi sonsuz akifer durumlarında çözüme ulaşabilmek için yalnızca bir adet noktasal gözlem değeri yeterlidir. Bunlara ek olarak, çözümün analitik denklemlerden oluşması sebebiyle hesaplama yapılan noktaların sıklığı da çözümü etkilememektedir.

KAYNAKLAR

- [1] McDonald, M. G., and Harbaugh, A. W., 1988. "A modular threedimensional finite-difference ground-water flow model." *Techniques of water-resources investigations*, U.S. Geological Survey, Denver, 586.
- [2] Refsgaard, J. C., and Storm, B. J., 1995. "MIKE SHE." *Computer models of watershed hydrology*, V. P. Singh, ed., Water Resources Publications, Littleton, CO, 809–846.
- [3] Diersch, H.G., 2014. *FEFLOW – Finite element modeling of flow, mass and heat transport in porous and fractured media*, Springer, Berlin Heidelberg, XXXV, 996p.,
- [4] Strack, O. D. L., 1981a. "Flow in aquifers with clay lamina. I. The comprehensive potential". *Water Resour. Res.*,17, 985-992.
- [5] Strack, O. D. L., 1981b. "Flow in aquifers with clay lamina. II. Exact solution". *Water Resour. Res.*, 17, 993-1004.

- [6] Haitjema, H.M. 1995. *Analytic Element Modeling of Groundwater Flow*, Academic Press, CA.
- [7] Darcy, H., 1856. “Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon”, Dalmont, Paris.