

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GEÇİCİ ELEKTROMANYETİK ALAN YAYILIMININ SONLU FARKLAR  
YÖNTEMLERİYLE İKİ BOYUTLU MODELLENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Mustafa Deniz**

**Jeofizik Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Jeofizik Mühendisliği Programı**

**OCAK 2013**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GEÇİCİ ELEKTROMANYETİK ALAN YAYILIMININ SONLU FARKLAR  
YÖNTEMLERİYLE İKİ BOYUTLU MODELLENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Mustafa Deniz  
505091413**

**Jeofizik Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Jeofizik Mühendisliği Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Gülçin Özürkan Ağaçoğuz**

**17 OCAK 2013**



İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 505091413 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Mustafa DENİZ**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**GEÇİCİ ELEKTROMANYETİK ALAN YAYILIMININ SONLU FARKLAR YÖNTEMLERİYLE İKİ BOYUTLU MODELLENMESİ**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :** **Prof. Dr. Gülçin Özürkan AĞAÇGÖZGÜ** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :** **Prof. Dr. Argun KOCAOĞLU** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Doç. Dr. Emin CANDANSAYAR** .....  
Ankara Üniversitesi

**Teslim Tarihi :** 17 Aralık 2012  
**Savunma Tarihi :** 17 Ocak 2013



*Kızkardeşim Merve'ye...*





## ÖNSÖZ

Son yıllarda teknolojinin hızlı gelişimi bilgisayarların taşınabilir hale gelmesi günlük yaşamımızı önemli derecede etkilemiştir. Böyle bir yaşam, birçok insan gibi beni de bilgisayara yaklaştırmıştır. Matematik ve bilgisayara olan yoğun ilgimden dolayı böyle bir tez ortaya çıkmıştır. Bilgisayar ve matematiğin bir arada olduğu en önemli oluşumlardan biri de bilimsel hesaplamadır. Çalışma sadece bilgisayar ve matematik ağırlıklı değil biraz da yerbilimi içeriği barındırmaktadır. Çalışmanın ilk kısmı kişisel ilgi alanlarımdan bahsederken ikinci kısımda elektromanyetik teoriden ve model kavramından bahseder. Üçüncü kısmın içeriği elektromanyetik alanların belirli bir kaynaktan nasıl yayılacağını belirtmektedir. Dördüncü bölümde ise modelleme için sayısal yaklaşım yöntemleri anlatılarak beşinci bölümde uygulanacak model karşılaştırmaları için temel oluşturulmuştur. Son olarak altıncı bölümde, beşinci bölümde yapılan karşılaştırmaların sonuçları hakkında yorumlara yer verilmiştir.

Böyle bir tezin ortaya çıkmasında sadece bilimsel olarak değil aynı zamanda hayat görüşü anlamında da yol gösteren yüksek lisans tez danışmanım Prof. Dr. Güçin Özürlan Ağaçoğuz'ye, çalışmalarım esnasında yardımını hiçbir zaman esirgemeyen Didem Beşkardeş'e teşekkürü bir borç bilirim.

Aralık 2012

Mustafa Deniz



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER .....	ixx
KISALTMALAR .....	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xixiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET.....	xv xvii
SUMMARY .....	xvixviii
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. ELEKTROMANYETİK TEORİ.....</b>	<b>3</b>
2.1 Elektromanyetik Model.....	3
2.2 Maxwell Denklemleri.....	3
2.3 Elektromanyetik Sınır Koşulları.....	3
<b>3. YER İÇİNDE ELEKTROMANYETİK ALAN YAYILIMI .....</b>	<b>7</b>
3.1 Elektromanyetik Difüzyon Denklemlerinin Elde Edilmesi .....	7
3.2 Elektromanyetik Alan Yayılımı İçin Analitik İfadeler .....	8
<b>4. SONLU FARKLAR YAKLAŞIMI.....</b>	<b>11</b>
4.1 Taylor Serisi Ve Sonlu Farklar Yaklaşımları .....	12
4.2 Açık Yöntemler .....	12
4.2.1 Tam açık yöntem.....	14
4.2.1.1 Tam açık yöntem için duraylılık çözümlemesi .....	15
4.2.2 Du Fort-Frankel yöntemi .....	16
4.2.2.1 Du Fort-Frankel yöntemi için duraylılık çözümlemesi.....	17
4.3 Kapalı Yöntemler .....	18
4.3.1 Tam kapalı yöntem.....	18
4.3.1.1 Tam kapalı yöntem için duraylılık çözümlemesi .....	19
4.3.2 Crank-Nicolson yöntemi .....	20
4.3.2.1 Crank-Nicolson yöntemi için duraylılık çözümlemesi .....	21
4.4 Seyrek Doğrusal Denklem Takımlarının Çözümü .....	22
4.4.1 Eşlenik yöneleğim yöntemi.....	23
<b>5. ELEKTROMANYETİK ALANIN İKİ BOYUTLU UZAYDA YAYILIMI..</b>	<b>25</b>
5.1 Başlangıç Ve Sınır Koşulları .....	29
5.2 Sonlu Farklar Yöntemlerinin Uygulanması .....	30
<b>6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....</b>	<b>37</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>39</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>41</b>



## KISALTMALAR

<b>1B</b>	: Bir boyutlu
<b>2B</b>	: İki boyutlu
<b>A</b>	: Amper
<b>B</b>	: Manyetik akı yoğunluğu
<b>BTSC</b>	: Zamanda Geri Adımla Sonlu Farklar
<b>C</b>	: Coulomb
<b>CPU</b>	: Merkezi işlem birimi
<b>D</b>	: Elektrik akı yoğunluğu
<b>E</b>	: Elektrik alan
<b>FTSC</b>	: Zamanda İleri Adımla Sonlu Farklar
<b>GB</b>	: Gigabyte
<b>H</b>	: Manyetik alan
<b>J</b>	: Toplam akım yoğunluğu
<b>KB</b>	: Kilobyte
<b>m</b>	: metre
<b>ms</b>	: milisaniye
<b><math>\Omega</math>m</b>	: Özdirenç (ohm-metre)
<b>r</b>	: Courant Sabiti
<b>q</b>	: Yük
<b>TE</b>	: Transverse Electric
<b>TEM</b>	: Transient Electromagnetic Method
<b>Wb</b>	: Weber



## ÇİZELGE LİSTESİ

### Sayfa

Çizelge 5.1 : Courant sabitinin 0.25 değeri için işlem süresi ve hata oranı.....	34
Çizelge 5.2 : Courant sabitinin 0.5 değeri için işlem süresi ve hata oranı.....	34
Çizelge 5.3 : Sonlu Farklar yöntemleri için karşılaştırma .....	36





## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 4.1	: Zamanda ileri adımla merkezi fark yöntemi için hesaplama işleci .....	14
Şekil 4.2	: Du Fort-Frankel yöntemi için hesaplama işleci .....	16
Şekil 4.3	: Zamanda ileri adımla merkezi fark yöntemi için hesaplama işleci .....	18
Şekil 4.4	: Crank-Nicolson yöntemi için hesaplama işleci .....	20
Şekil 5.1	: 10 $\Omega$ m özdirence sahip ortamda elektromanyetik alan yayılımı için yer modeli .....	25
Şekil 5.2	: 10 $\Omega$ m özdirence sahip ortamda 0.01 ms sonra elektromanyetik alan yayılımı .....	26
Şekil 5.3	: 10 $\Omega$ m özdirence sahip ortamda 0.015 ms sonra elektromanyetik alan yayılımı .....	26
Şekil 5.4	: 10 $\Omega$ m özdirence sahip ortamda 0.02 ms sonra elektromanyetik alan yayılımı .....	27
Şekil 5.5	: 100 $\Omega$ m özdirence sahip ortamda elektromanyetik alan yayılımı için yer modeli .....	27
Şekil 5.6	: 100 $\Omega$ m özdirence sahip ortamda 0.01 ms sonra elektromanyetik alan yayılımı .....	28
Şekil 5.7	: 100 $\Omega$ m özdirence sahip ortamda 0.015 ms sonra elektromanyetik alan yayılımı .....	28
Şekil 5.8	: 100 $\Omega$ m özdirence sahip ortamda 0.02 ms sonra elektromanyetik alan yayılımı .....	28
Şekil 5.9	: Sonlu Farklar katsayılar dizeyinin seyrek yapısı .....	30
Şekil 5.10	: M20 istasyonunda sonlu farklar yöntemleri için duyarlılık analizi .....	31
Şekil 5.11	: M200 istasyonunda sonlu farklar yöntemleri için duyarlılık analizi .....	32
Şekil 5.12	: Sonlu farklar yöntemleri için duyarlılık analizi .....	33
Şekil 5.13	: Sonlu farklar yöntemleri için Courant sabiti-mutlak ortalama hata değişimi .....	35



## GEÇİCİ ELEKTROMANYETİK ALAN YAYILIMININ SONLU FARKLAR YÖNTEMLERİYLE İKİ BOYUTLU MODELLENMESİ

### ÖZET

Bu çalışma, geçici elektromanyetik yöntemde iki-boyutlu düz çözümde kullanılan difüzyon denkleminin farklı sayısal yöntemlerle çözümleri, çözüm gücü ve hesaplama zamanı bakımından karşılaştırılmıştır. Bu yöntemler sonlu farklar yaklaşımları olan; zamanda geri adımla merkezi fark, zamanda ileri adımla merkezi fark, Du Fort-Frankel yöntemi ve Crank-Nicolson yöntemidir. Model olarak yer yüzeyinde zıt işaretli iki çizgisel kaynağın, yer içinde oluşturduğu elektromanyetik alan yayılımı incelenmiştir. Elektromanyetik alanın ‘transverse electric (TE)’ modu esas alınmıştır. Karşılaştırmalar iki boyutlu tekdüze ortam ve bir boyutlu (1B) model için yapılmıştır. Tek çizgisel kaynak için verilen iki boyutlu (2B) analitik bağıntı, zıt işaretli iki çizgisel kaynağa uygulanarak model oluşturulmuştur.

Geçici elektromanyetik alanların farklı sonlu farklar teknikleriyle hesaplanması amacıyla yazılan programlar, MATLAB dili ile yazılmıştır. Farklı yöntemler için yapılan karşılaştırmalar hata, oranı, işlem süresi, yöntemlerin duraylılığı ve duyarlılıkları üzerine yapılmıştır. Yazılan MATLAB programının doğruluğu elektromanyetik alan yayılımı için verilen analitik bağıntı yardımıyla sınanmıştır.

Hesaplamalar sonucunda, Crank-Nicolson yöntemi duraylılık ve tutarlılık özellikleriyle difüzyon tipi problemlerin çözümünde en uygun yöntem olarak tespit edilmiştir. Hesaplamalarda işlem hızı göz önüne alındığında, Du-Fort Frankel yöntemi diğer yöntemlere üstünlük sağlamıştır.

## **TWO DIMENSIONAL MODELING OF ELECTROMAGNETIC FIELD PROPOGATION WITH FINITE DIFFERENCE SCHEMES**

### **SUMMARY**

This study compares the frequently used finite difference methods for two dimensional (2D) modeling of transient electromagnetic method (TEM). Also electromagnetic boundary conditions are mentioned to define the electromagnetic model. Finite difference methods was used for modeling of electromagnetic field diffusion in two dimensional homogeneous media. Transient electromagnetic method's theory and it's applications were mentioned in small details because of the exact purpose of this study is just comparing of the most-used finite difference methods to simulate of TEM diffusion. Comparisons have been done by accuracy, stability, consistency and process (CPU) time. To make these comparisons MATLAB scripting language was used for computations.

Electromagnetic theory is essential to understand how the electromagnetic diffusion behaves in materials. So electromagnetic theory explained by the Maxwell equations which depend on time, spatial parameters and material's electric and magnetic properties. Electromagnetic diffusion occurs only when electromagnetic wave frequency is very low. Therefore, wave type behavior is negligible on low frequencies where diffusion type behavior is dominant. Hence, the derivation of electromagnetic diffusion equation explained for homogeneous media when electromagnetic source terms are excluded. Because the electromagnetic source is shutted down when the electric field is recorded.

TEM method has a wide application area and has been used by many geophysicist. Mineral and geothermal explorations and static shift problem in Magnetotelluric method are a few examples of these applications. In this study, analytical expressions for a double line source generating the 2D electric field has been used as initial condition.

Finite difference approximations used in this study are forward-time centered-space scheme (FTSC). Du Fort-Frankel scheme, backward-time centered-space scheme (BTSC) and Crank Nicolson scheme. These approximations are based on the Taylor series expansion's first term. In other words, the linear approximation has been used, other terms are negligible and not dominant as first one. Each scheme has been analzed in terms of stability, consistency, accuracy and relative computational speed. Crank-Nicholson and Du Fort-Frankel methods have been found to be more accurate and stable than other methods. These methods's accuracy are second order when fully implicit and fully explicit methods are only first order. Du Fort-Frankel method's inconsistent behavior needs more care in selecting the time-stepping and grid spacing of the finite difference network. For this reason, Du Fort-Frankel method has been found to be always out of running method. Fully explicit method has failed in terms of both accuracy and stability. Due to it's stable and consistent behavior, Crank-Nicolson scheme has been determined to be most suitable method. Du Fort-Frankel scheme has been found to be superior than other methods when the

CPU time is considered. Because this method does not require solution of the system of linear equations as in Crank-Nicolson method.

Implicit schemes's finite difference equations have been reestablished in sparse matrices. To solve these large linear systems, their specific properties like symmetric or positive definiteness are helpful. This is generally related to finite difference grid and boundary conditions of the model. In this study, linear system has been found to be symmetric and positive definite. Hence Conjugate-Gradient method which is known as an optimization method has been used to solve this large linear system. MATLAB codes have been developed to solve sparse systems. All scripts and functions were coded by author to optimize the solution of the specific problem which is electromagnetic propagation in two-dimensional homogeneous media.

The electromagnetic diffusion for two different homogeneous media has been shown as snapshots for three different values of time. Two stations has been selected for comparisons with the analytical solution. In these comparisons, Crank-Nicolson and Du Fort-Frankel method have been found to be more accurate with less than two per cent relative error. Other methods have been found to have much more relative error relative to Crank-Nicolson and Du Fort-Frankel method. Regular grids have been used to estimate how accurately values of left and right boundaries are calculated. Both Crank-Nicolson and Du Fort-Frankel methods have been found to be superior in terms of accuracy with less than sixteen per cent relative error. Even in the worst case scenario where relative error is largest at the right and left boundaries has been found to be almost acceptable. This case has been analyzed for two different values of Courant number's, applicable values for the all methods except for only fully explicit method. For different values of Courant's number, ratio of time-stepping value to grid spacing, each finite difference method has been compared in terms of accuracy. For each finite difference scheme, mean absolute errors as a function of Courant's number have been compared. Due to it's unstable behavior, fully explicit scheme failed to calculate electromagnetic diffusion at higher values of 0.25 of Courant's number.

Electromagnetic field propagation, triggered by opposite signed double line source, was analyzed from earth's surface to earth's interior. TE mode was predicted for electromagnetic field propagation. In the comparisons, 2D homogeneous resistivity models were used. Primary electromagnetic field for a line source was calculated using the analytical solution for a homogeneous medium.

Programs with aim of calculating transient electromagnetic field by different finite difference methods have been coded by MATLAB scripting language environment. Comparisons of finite difference methods were made in terms of stability, consistency, accuracy and process (CPU) time. MATLAB programs, used for computation of electromagnetic field of 2D homogeneous medium, has been confirmed by the analytic equation.

Crank-Nicolson and Du Fort-Frankel method has been found to be most suitable methods for computing electromagnetic diffusion in two-dimensional homogeneous media. Each methods has it's own disadvantage. Crank-Nicolson method has much more calculation than the Du Fort-Frankel method so this method is relatively slower. Du Fort-Frankel method is inconsistent in some situations. Therefore, it is always good to simulate electromagnetic field propagation with hybrid methods which Crank-Nicolson and Du Fort-Frankel. This type of approach guarantees stability and consistency with Crank-Nicolson method and process speed with Du

Fort-Frankel method. After gaining stability using smaller time-steps with Crank-Nicolson, Du-Fort-Frankel method can be used with larger-time-steps for computation. Since both stability and speed takes place. Hence, Courant's number is vital to model two-dimensional electromagnetic diffusion as it is in any other diffusion type problem.

Furthermore, this study can be developed by using more accurate explicit methods. Adding alternate direction implicit (ADI) and locally one dimensional (LOD) methods to comparisons can provide more accurate results.

## 1. GİRİŞ

Zaman ortamı bir Jeofizik yöntem olan geçici elektromanyetik yöntem (Transient Electromagnetic Method, TEM), bir telden geçen akım sonucu oluşan elektromanyetik alan ve bu alanların yer içindeki iletken yapılarla etkileşerek Eddy akımlarıyla ortaya çıkan ikincil manyetik alanların, zamanla sönümlenmesini kaydetmektedir. Ölçülen bilgiler yardımıyla; fiziksel parametreler olan yer içindeki derinliğe bağlı olarak iletkenlik ( $=1/\text{özdirenç}$ ) gibi özelliği kestirilmeye çalışılmaktadır. Jeotermal alanlarda, hidrojeolojik araştırmalarda ve mineral araştırmalarında bu yönteme birçok bilimadamı ve mühendis tarafından sıkça başvurulmaktadır (Oristaglio ve Hohmann, 1984).

Geçici elektromanyetik yöntem, İngilizce isminin baş harfleri ile kısaca TEM olarak anılmaktadır. TEM ile yer içinin sadece fiziksel yapısı değil, geometrik yapısı hakkında da bilgi sahibi olunmaktadır. Böylece hangi geometrik yapının hangi fiziksel özellikler ile TEM ölçümlerinde nasıl tepki vereceği, jeofizik bilimiyle uğraşanlar için önem arz etmektedir. Bu sebeple, diğer bilim dallarında olduğu gibi jeofizik biliminde de modelleme işlemlerine sıklıkla başvurulmaktadır. Günümüzde rahat çalışma; kolay, anlaşılabilir ve estetik görselleştirme özellikleri çok kısa sürede yapılabilmesi nedeniyle, bilgisayarlar sıklıkla modelleme çalışmalarında kullanılmaktadır. Araba üreten kuruluşların, kaza anındaki fiziksel, mekanik olayları gözlemlemek için araba çarpım testlerini; mühendislerin, uçakların türbülans esnasındaki davranışlarını günümüzde bilgisayar modellemeleri ile yapması iş gücü ve maddi kaynakların verimli olarak kullanılması gibi faydaları olmuştur. Bilgisayar dünyasındaki işlemci güçleri ve bellek kapasiteleri gibi donanım özelliklerindeki hızlı artış, modelleme işlemlerinin birçok kişi tarafından kolayca yapılmasını sağlamaktadır.

Geçici elektromanyetik yöntemi için de birçok modelleme çalışması yapılmıştır (Adhidjaja, 1985; Oristaglio, 1982; Oristaglio ve Hohmann, 1984). Çok basit şekiller dışında modelleme işlemleri, analitik olarak yapılamamaktadır. Bunun sebebi ise karmaşık modeller için analitik bağıntılar türetmek bazen çok zor, bazen de imkansız

olmasındandır. Tek bir çizgisel kaynağın oluşturacağı elektromanyetik alanın sayısal modellenmesi, Oristaglio (1982) tarafından yapılmıştır. Oristaglio ve Hohmann (1984) yılında sonlu farklar yaklaşım yöntemiyle geç ve erken zaman birincil elektrik alan yayılımının difüzyon tipi (parabolik) modellemesini yapmışlardır. Adhidjaja, Oristaglio ve Hohmann (1985) bu yayılımın ikincil alan içinde difüzyon tipi olduğunu göstermişlerdir. Üç boyutlu tekdüze olmayan bir ortam için sonlu fark yaklaşımı ile modellemesi Carciaone (2010) tarafından yapılmıştır. Türev yaklaşımlarını frekans ortamında gerçekleştirmiştir. Bu çalışma için kaynak oluşturmayan fakat bahsedilen makalelerde farklı yöntemleri de içinde barındıran modelleme çalışmaları yapılmıştır,

Bu çalışmanın amacı, parabolik tipte bir kısmi diferansiyel denklem olan iki boyutlu difüzyon denkleminin dört değişik sonlu farklar yaklaşımı ile çözümünü incelemektedir. Elektromanyetik alan yayılımı, enine elektrik (Transverse Electric, TE) modu üzerinden hesaplanmıştır. Diğer bir değişle elektrik alan bileşenlerinin yayılma yönünde enlemesine olduğunu ifade etmektedir. Birincil ve ikincil elektrik alan yayılımının difüzyon tipi yayılımı sebebiyle (Oristaglio ve Hohmann, 1984) sadece çizgisel kaynağın oluşturacağı tepki sonrası modelleme yapılmıştır. Ortamda bulunan iletkenin yaratacağı ikincil alan yeni bir kaynak olarak davranacaktır. Yapılan karşılaştırmalar doğrudan elektromanyetik alan yayılımının hesaplamasını incelemektedir. Bu özelliğiyle uygulamalı jeofizik alanından ayrılır. Yöntem uygulamasından ziyade yapılan hesaplamaların doğruluğu ve sürati, çalışmanın hedefidir. İki boyutlu geçici elektromanyetik modelleme çalışması daha önce Beşkardeş (2011) tarafından yapılmıştır. Bu sebeple uygulamalı jeofizikte olduğu gibi sıklıkla hesaplanan görünür özdirenç ve manyetik alan bilgilerini hesaplama yoluna gidilmemiştir. Bu çalışmada, özdirenç eğrilerinin hesaplanmamasının bir diğer nedeni, TEM yöntemi için zaman aralığına bağlı olarak farklı özdirenç eğrilerinin tanımlanmış olmasıdır. Literatürde yapılan çalışmalarda da elektromanyetik alanların difüzyonu için elektrik alanın zamana veya derinliğe bağlı davranışı incelenmiştir. Manyetik alan ve görünür özdirenç hesaplamaları, elektrik alan bilgilerinden elde edilebileceği için elektrik alan bilgilerinin doğru hesaplanması daha sonra elde edilecek bilgilerin doğruluğu içinde önem arz etmektedir.



## **2. ELEKTROMANYETİK TEORİ**

### **2.1 Elektromanyetik Model**

Elektromanyetizma, durgun ve hareketli elektrik yüklerinin davranışlarını incelemektedir. Yüklerin hareketi, elektrik akımını, akım ise manyetik alanın oluşumunda rol oynar. Bu yükler aynı zamanda elektrik alan kaynaklarıdır. Burada bahsedilen alan kavramı fiziksel bir büyüklüğün konumsal dağılımını ifade etmektedir. Zamanla değişen manyetik alan, elektrik alanı; zamanla değişen elektrik alan ise manyetik alanı oluşturmaktadır. Bu sebeple manyetik alan ve elektrik alan birbirini tetikleyici biçimdedir. Böylece her iki alan birlikte, elektromanyetik alan olarak adlandırılmaktadır.

Model ise sözcük anlamı olarak, bir nesnenin özelliği ve biçimini ifade etmektedir. Elektromanyetik modelde biçim, nesnenin geometrik yapısını; özellik ise fiziksel olarak hangi malzemeden oluştuğu ve bu malzemenin elektrik, manyetik özellikleri anlamına gelmektedir. Bütün bu özellikler, elektromanyetik teori içerisinde Maxwell denklemleri ve bünye denklemleri ile tanımlanmaktadır.

### **2.2 Maxwell Denklemleri**

Elektromanyetik modellerin matematiksel tanımlarını yapmak için Maxwell denklemlerine ihtiyaç vardır. Bu denklemler; Gauss, Amper ve Faraday gibi bilim insanlarının yaptığı deneysel çalışmalara dayanmaktadır. Belli başlı dört ana temel bağıntıyla ifade edilir. Elektrik alan ve manyetik alan değişimlerinin birbirleri arasındaki ilişkiyi açıklar. Elektromanyetik modelleri tanımlamak için Maxwell denklemleri tek başlarına yeterli değildir. Elektromanyetik model tanımlamaları, model üzerindeki fiziksel yapının özelliklerini belirleyen bünye denklemlerine de ihtiyaç duyarlar. Zamanla değişen manyetik alanın, elektrik alan yaratacağı bir çok deneyle doğrulanmıştır (Cheng, 1989). Maxwell denklemlerinin diferansiyel biçimleri; Denklem (2.1), Denklem (2.2), Denklem (2.3) ve Denklem (2.4) ile verilmektedir:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot B = 0. \quad (2.4)$$

Burada,

E: Elektrik alan şiddeti [V/m]

B: Manyetik akı yoğunluğu [Wb/m<sup>2</sup>]

H: Manyetik alan şiddeti [A/m]

J: Akım yoğunluğu [A/m<sup>2</sup>]

D: Elektriksel akı yoğunluğu [C/m<sup>2</sup>]

P: Elektriksel yük yoğunluğu [C/m<sup>3</sup>]

olarak tanımlanır. Denklem (2.1)'de verilen Faraday yasasına göre zamanla değişen bir manyetik alan kendisine dik doğrultuda bir elektrik alan oluşturur. Denklem (2.2)'de verilen Ampere yasası, zamanla değişen elektrik akı yoğunluğu kendisine dik doğrultuda bir manyetik alan oluşacağını ifade eder. Gauss yasasına göre Denklem (2.3), kapalı bir yüzeyden geçen akı yoğunluğu yüzey içindeki yük yoğunluğuna eşit olduğunu ifade etmektedir. Denklem (2.4) ise manyetik yük olmadığında, kapalı yüzeyden çıkan manyetik akının sıfır olduğunu tanımlamaktadır. Çoğu kez sınırları belli kapalı ortamlarda elektromanyetik alan incelemeleri yapıldığı için bu denklemlerin integraller biçimleri ile karşılaşmak da mümkündür. Maxwell denklemlerinin farklı malzeme özellikleri; elektrik alan şiddetini elektriksel akı yoğunluğuna; manyetik alan şiddetini manyetik alan şiddetine bağlayan bazı yapısal bağıntılarla ifade edilir. Bu bağıntılar bünye denklemleri olarak bilinir ve Denklem (2.5), Denklem (2.6) ve Denklem (2.7) ile ifade edilmektedir:

$$D = \epsilon E \quad (2.5)$$

$$B = \mu H \quad (2.6)$$

$$J = \sigma E. \quad (2.7)$$

Burada;  $\epsilon, \mu, \sigma$  sırasıyla dielektrik geçirgenliği (F/m), manyetik geçirgenliği (H/m) ve elektrik iletkenliği (S/m) ifade etmektedir. Bu fiziksel nicelikler, farklı malzemelerin özelliklerini tanımlamaktadır.

### 2.3 Elektromanyetik Sınır Koşulları

Farklı parametrelerden oluşan bitişik bölgelerde elektromanyetik problemlerin çözülebilmeleri için Maxwell denklemleriyle verilen **B**, **H**, **E** ve **D** alan yöneylerinin bölgeler arasındaki sınırda, sınır koşullarını sağlamaları gerekmektedir. Sınır koşullarını elde edebilmek için daha önce verilen Maxwell denklemlerinin, integral biçimlerinden faydalanılmaktadır. Maxwell denklemlerinin integral biçimleri Denklem (2.8), (2.9), (2.10) ve (2.11) ile verilmektedir

$$\oint_C E. dl = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} ds \quad (2.8)$$

$$\oint_C H. dl = \int_S \left( J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) ds \quad (2.9)$$

$$\oint_S D. ds = \int_V \rho. dv \quad (2.10)$$

$$\oint_S B. ds = 0. \quad (2.11)$$

Maxwell denklemlerinin integral biçimlerinde C, S ve V ifadeleri sırasıyla yüzey çizgisini, yüzey alanını ve hacimi ifade etmektedir. Denklem (2.8) ve Denklem (2.9) yardımıyla **E** ve **H** `ye ait olan teğetsel bileşenler için sınır koşulları Denklem (2.12) ve Denklem (2.13)`de verilmektedir.

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (2.12)$$

$$a_{2n} \times (H_1 - H_2) = J_s \quad (2.13)$$

Burada alt indislerde verilen 1 ve 2, birinci ve ikinci ortamı;  $t$  ve  $n$  ise sırasıyla teğetsel ve normal bileşeni ifade etmektedir. Burada  $a_{2n}$  ikinci ortamdaki dışarıya doğru olan birim normlu yöneydir. Benzer şekilde,  $\mathbf{D}$  ve  $\mathbf{B}$ 'nin normal bileşenleri için sınır koşulları Denklem (2.14) ve Denklem (2.15) ile birlikte verilmektedir

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (2.14)$$

$$a_{2n} \times (D_1 - D_2) = \rho_s. \quad (2.15)$$

Böylece elektromanyetik sınır koşulları için genel çıkarımlar izleyen biçimde verilmektedir (Cheng, 1989);

- $\mathbf{E}$  alanının teğetsel bileşeni arayüzey boyunca süreklidir.
- $\mathbf{H}$  alanının teğetsel bileşeni yüzey akımları olduğu durumlarda süreksizdir, süreksizlik miktarı ise Denklem (2.13) ile ifade edilmektedir.
- $\mathbf{D}$  alanının normal bileşeni yüzey yükleri olduğu durumlarda süreksizdir, süreksizlik miktarı ise Denklem (2.14) ile ifade edilmektedir.
- $\mathbf{B}$  alanının normal bileşeni arayüzey boyunca süreklidir.

### 3. YER İÇİNDE ELEKTROMANYETİK ALAN YAYILIMI

#### 3.1 Geçici Elektromanyetik Alan Difüzyon Denkleminin Elde Edilmesi

Geçici elektromanyetik alan yayılımını incelemek için Maxwell denklemlerinden, Denklem (2.1) ve Denklem (2.2)'yi bünye denklemleri yardımıyla düzenlendiğinde Denklem(3.1) ve Denklem (3.2)'de verilen iki ifadesi elde edilmektedir:

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H \quad (3.1)$$

$$\nabla \times H = \sigma \cdot E + J_S. \quad (3.2)$$

Burada  $J_S$ , indüklenmiş akım yoğunluğudur. Denklem (3.1)'i Denklem (3.2)'de yerine yazıldığında düşük frekanslardaki elektromanyetik alan yayılımı için temel oluşturan düz çözüm bağıntısı Denklem (3.3) olarak elde edilmektedir:

$$-\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} \left[ \nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times E \right) + \frac{\partial J_S}{\partial t} \right]. \quad (3.3)$$

Elektromanyetik alan kaynağının kapatıldığı, yani yer değiştirme akımlarının olmadığı durumda Denklem (2.1)'e göre  $\nabla \cdot J = 0$  olacaktır. Tekdüze ortamda elektrik alanın yön bağımsız olması sebebiyle, elektrik alanın diverjansı sıfıra eşit olmaktadır. Elektrik alan diverjansının sıfıra eşit olması Denklem (3.3)'ün,  $\nabla \times \nabla \times E \equiv -\nabla^2 E$  özdeşliği yardımıyla Denklem (3.4)'deki hali almaktadır. Bu denklem difüzyon tipi (parabolik) bir denklemdir: Böylece elektromanyetik alan yayılımı dalga tipi değil, difüzyon tipi olmaktadır:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 E. \quad (3.4)$$

Burada  $x$ , yanal yönde konum değişimini,  $z$  düşey yönde, yani yerin içerisine doğru konum değişimini ifade ederken,  $t$  ise zaman değişimini ifade etmektedir. Denklem (3.4), ikinci kereden parabolik göre türevli denklemdir. Bu denklemin çözümünden

dördüncü bölümde bahsedilecektir. Jeofizik bilimi içerisinde bu denklemlerin modellenmesi, Geçici Elektromanyetik Yöntemi içerisinde oldukça sık kullanılmaktadır. Bu yöntem, bir vericiden verilen elektrik akımının aniden kesilmesi ve yer içerisinde oluşan elektromanyetik alanın yavaşça sönümlenmesiyle ortama ait iletkenlik, öz direnç gibi fiziksel özellikleri belirlemede kullanılır. Böylece ortamın fiziksel özellikleri hakkında bilgi sahibi olunur. Mineral araştırmalarında, jeotermal araştırmalarda sıklıkla kullanılan bir yöntemdir.

Bu çalışmanın amacı TEM yönteminde kullanılan elektrik alan yayılımını ifade eden difüzyon denkleminin farklı yöntemlerle sayısal çözümlerinin karşılaştırması olduğundan yöntemin çalışma prensibi ve uygulanmasına ayrıntılı bir şekilde bu çalışmada değinilmeyecektir. Yöntemde kullanılan elektrik alan yayılımına ait analitik ifadeler üçüncü bölümün içerisinde anlatılmaktadır. Bu ifadeler aynı zamanda sayısal sonuçların doğrulanmasında da kullanılmıştır.

### 3.2 Elektrik Alan Yayılımı

Tekdüze ortamda, yüzeyde bulunan bir çizgisel kaynağın oluşturduğu elektrik alan Denklem (3.3) ile verilmektedir (Oristaglio, 1982; Oristaglio ve Hohmann, 1984):

$$E = \frac{I}{\pi \sigma r^2} \left[ 2\theta^2 z^2 e^{-\theta^2 r^2} + \frac{x^2 - z^2}{r^2} [\operatorname{erfc}(\theta z) - e^{-\theta^2 r^2}] - \frac{2}{\sqrt{\theta}} \theta z e^{-\theta^2 z^2} \left[ 1 - 2\theta x \left( 1 + \frac{1}{\theta^2 r^2} \right) F(\theta x) \right] \right]. \quad (3.5)$$

Burada;  $r$ , yarıçapı;  $\theta$  ise normalleştirilmiş zamanı ifade eder:

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$\theta = \sqrt{\frac{\mu \sigma}{4t}}$$

Denklem (3.2)'deki  $\operatorname{erfc}(x)$ , tümleyen hata işlevidir,  $F(\theta x)$  ise Dawson integralidir ve Denklem (3.4) ile ifade edilmektedir:

$$F(u) = e^{-u^2} \int_0^u e^{v^2} dv. \quad (3.6)$$

Denklem (3.5.),  $x$  yanal yön ve  $z$  derinlik olmak üzere iki boyutlu uzayda verilmiştir. Çizgisel kaynak, bu yönlere dik olarak  $y$  yönündedir.

Analitik olarak elektromanyetik alan yayılımını ifade eden Denklem (3.5), bu çalışmada sayısal çözümler için bir altyapı oluşturmaktadır. Bu altyapı, sayısal hesaplamalara başlamadan önce sonlu farklar yaklaşımları yapılırken başlangıç koşulu olarak kullanılacaktır. Bunun sebebi ise yer içinde kaynak tanımlamanın zorluğundandır (Oristaglio ve Hohmann, 1984).

Bu bölümde verilen analitik ifadeler, bir sonraki bölümde açıklanan sonlu farklar yaklaşım yöntemleri için bir doğrulama mekanizması oluşturmaktadır.





#### 4. SONLU FARKLAR YAKLAŞIMI

Sonlu farklar, sıradan ya da göre türevli denklemleri çözmek için kullanılan sayısal bir yöntemdir. Sonlu eleman yöntemlerine göre, programlanması daha basit ve daha hızlı olması sebebiyle günümüzde de etkin bir şekilde kullanılmaktadır. Sonlu eleman yöntemlerine göre farkı ise; sonlu eleman yöntemleri türevli denklemlerin çözümüne yakınsama yaparken, sonlu fark yöntemlerinin doğrudan türevli denklemlere yakınsamasıdır. Yaklaşım yapılmak istenen işlev, Taylor serisine açılır ve serinin en baştan bir ya da iki terimi ile yaklaşımda bulunulur. Bunun sebebi, serinin ilk terimlerinin daha sonraki terimlere göre daha baskın olmasından kaynaklanmaktadır. Böylece önceden belirlenen bir kesme hatası kadar yaklaşımda bulunmuş olunur (Chapra ve Canale, 2009; Farlow, 1993; Heath, 2002; Langtangen, 2003; Lapidus ve Pinder, 2003; Leveque, 2007; Li ve Chen, 2007; Lynch, 2010; Morton ve Mayers, 2005; Strikwerda, 2007). Bu çalışmada, Taylor serisine açılmış işlevlerin, serinin yalnızca ilk terimi alınarak doğrusal yaklaşımda bulunulmuştur.

Sıradan ve göre türevli denklemler, bazen zamana bağlı olur, bazende bir konuma dağılımdan ibarettir. Her iki koşulda da, sonlu farklar yöntemini uygulamak mümkün olmaktadır. Amaç, türev barından ifadeleri ayrık karşılıkları ile değiştirerek sürekli olaylara ayrık yaklaşımda bulunmaktır. Ayrıklaştırmanın miktarı, çözüme yapılan yaklaşımın miktarı ile ilgilidir ve bu bölümün konusunu oluşturmaktadır. Bu bölümde sonlu farklar yaklaşım denklemlerin çıkarımı ve duraylılık çözümlenmeleri bir boyutlu olarak yapılmıştır. Duraylılık çözümlenmeleri, Lax eşitlik kanıtına göre yöntemin doğru sonuca yakınsayıp yakınsamayacağını etkileyen bir unsurdur (Thomas, 2010). Duraylı olan sonlu farklar yöntemlerinin seçimi, yakınsayan sonuca ulaşmak bakımından doğru bir yol olmaktadır. Daha yüksek boyuttaki sonlu farklar yaklaşım denklemleri, basit cebirsel işlemlerle elde edilebilmektedir. Boyutun artması duraylılık çözümlenmelerini etkilememektedir. Bu çalışmada yapılan uygulama örneği, iki boyutlu model üzerinden yapılmış olsa da kolaylık sebebiyle burada bir boyutlu türevler üzerinden anlatım seçilmiştir.

#### 4.1 Taylor Serisi Ve Sonlu Farklar Yaklaşımları

Sonlu fark yaklaşımları Taylor seri açılımından faydalanılarak yapılırlar. Denklem (4.1)'de  $\Delta x$  ayırıklaştırma miktarı kadar ötelenmiş bir işlevin Taylor seri açılımı verilmektedir:

$$E(x + \Delta x) = E(x) + \frac{\partial E(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots + \frac{\partial^n E(x)}{\partial x^n} \frac{\Delta x^n}{n!}. \quad (4.1)$$

Burada  $E$ ,  $x$  ve  $z$  değişkelerine bağlı olan bir işlevdir Birinci kereden daha yüksek kerteli türevli terimler yoksayılarak baskın olan ilk iki terimle yaklaşımda bulunur ve birinci kereden türevli terimi yalnız bırakıldığında işlevin birinci türevi için yaklaşım Denklem (4.2)'de izleyen biçimde verilir:

$$\frac{\partial E(x)}{\partial x} = \frac{E(x + \Delta x) - E(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (4.2)$$

En çok kullanılan sonlu farklar biçimlerinden biri olan Denklem (4.2), ileri fark olarak adlandırılmaktadır. Buradaki;  $\mathcal{O}(\Delta x)$ , kesme hatasını ifade etmektedir. İkinci kereden yüksek terimleri barındırmadığı için kesme hatası ikinci keredendir ve ismini, işlevin ileri yönde  $\Delta x$  kadar ötelenmesinden almaktadır. Benzer şekilde geri fark denklemi, Denklem (4.3)'de; merkezi fark denklemi, Denklem (4.4)'de verilir:

$$\frac{\partial E(x_i)}{\partial x} = \frac{E_i - E_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial E(x_i)}{\partial x} = \frac{E_{i+1} - E_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (4.4)$$

Burada alt indis  $i$  sonlu fark ağının ayırıklaştırılması sonucu oluşan hesaplama noktalarını ifade etmektedir ve sayısı ayırıklaştırılan hesaplama noktası kadar olmaktadır. Merkezi fark, ileri farktan geri farkın çıkartılmasıyla elde edilir. Bu sayede ikinci kereden türevli terim yok olur ve kesme hatası ikinci kerteğe çıkar. Bu yapılan yaklaşımın hassasiyetini arttırmaktadır. Böylelikle merkezi farkları kullanmak, duyarlılık göz önüne alındığında daha uygun bir yol olmaktadır. Merkezi farklar yardımıyla  $E(x)$  işlevinin ikinci kereden türevli ifadesi ise Denklem (4.5) ile verilmektedir:

$$\frac{\partial^2 E(x_i)}{\partial x^2} = \frac{E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (4.5)$$

Denklem (3.5)'de verilen difüzyon denklemindeki göre türevli ifadeleri sonlu fark karşılıklarıyla Denklem (4.6), Denklem (4.7) ve Denklem (4.8)'de verilmektedir:

$$\frac{\partial E}{\partial t} \cong \frac{E(x, y, t + \Delta t) - E(x, y, t)}{\Delta t} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \cong \frac{E(x + \Delta x, y, t) - 2E(x, y, t) + E(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \cong \frac{E(x, y + \Delta y) - 2E(x, y, t) + E(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} \quad (4.8)$$

Burada  $t$  değişkeni zamana bağımlılığı ifade etmektedir. Genelde hesaplamalarda işlem kolaylığı açısından, herhangi bir özel sebep olmadıkça uzay ortamındaki birim aralıklar arasındaki mesafe ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ) birbirine eşit seçilmektedir. Bunun sebebi, düzensiz aralıkların getireceği hesaplama zoruluklarından kaçınmaktır. Sınır ve başlangıç koşulu bilgilerini kullanılarak, önceden belirlenen elektromanyetik model için gerçek çözüm olmasa da yaklaşık bir çözüm elde edilmektedir.

Sonlu farklar yaklaşımlarını açık ve kapalı yöntemler olmak üzere iki grupta incelenebilirler. Bunların dışında hem açık hem kapalı yöntemlerin birlikte kullanıldığı melez yöntemler de mevcuttur. Bu yöntemler yüksek boyutlu model çözümlerinde çok sayıda bir boyutlu modele indirgeyerek çözüm yapmaktadırlar (Locally one dimensional, alternate direction implicit methods).

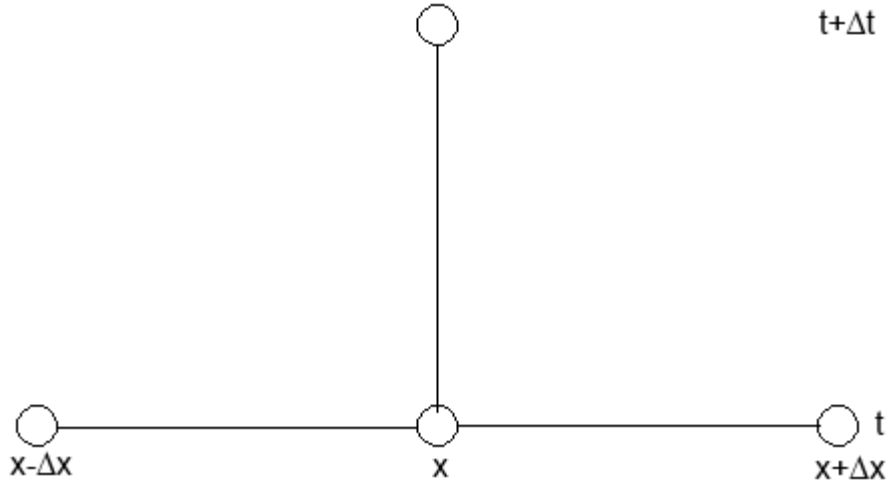
## 4.2 Açık Yöntemler

Açık yöntem ismi herhangi bir noktadaki işlev değerlerini daha erken zamanlardaki sonlu farklar çözüm değerlerinden açıkça hesaplamasından gelmektedir. Bulunan zaman değerinden bir zaman adım sonraki değerleri hesaplamaktadır. Ayrıklaştırılmış model üzerinde, tek bir hesaplama noktasında bir bilinmiyenli cebirsel denklemin çözümünü yapmaktadır. Böylece istenilen zamana ulaşıncaya kadar bu süreç tekrarlanılarak göre türevli denkleme yaklaşımda bulunmaktadır.

Tam açık yöntem (Zamanda ileri adımla merkezi fark) ve Du Fort-Frankel yöntemi, açık yöntemler için örnektir. Bunların dışında başka yöntemlerde mevcuttur.

#### 4.2.1 Tam açık yöntemi

Şimdiki  $t$  ve bir zaman adımı sonraki  $t + \Delta t$  olmak üzere iki farklı zaman adımı kullandığı için *iki zaman seviyeli* yöntem olarak adlandırılmaktadır. Zamanda ileri adımla merkezi fark yöntemi için hesaplama işleci Şekil (4.1)'de verilmektedir.



Şekil 4.1 : Zamanda ileri adımla merkezi fark yöntemi için hesaplama işleci.

Bundan sonraki aşama, Denklem (4.9) 'da verilen özyineleme bağıntısı yardımıyla istenilen zamana ulaşılıncaya kadar bölge içerisindeki her nokta için hesap yapmaktır. Böylece bir zaman adımı sonrası için hesaplama yapılmış olmaktadır. İstenilen zamana ulaşılıncaya kadar bu işlemler tekrarlanır:

$$E_i^{t+1} = E_i^t + \frac{1}{\mu\sigma} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (E_{i+1}^t - 2E_i^t + E_{i-1}^t). \quad (4.9)$$

Alt indis  $i$ , hesaplama noktalarını; üst indis  $t$  ise zaman adımını ifade etmektedir. Denklem (4.9)'da bilinmeyen  $E_i^{t+1}$  değeri için basitçe eşitliğin sağ tarafındaki ifadeler hesaplanmaktadır. Zaman bağımlı modellemeler, her zaman adımı için işlecin model üzerindeki her hesap noktasında uygulanmasıyla hesaplanmaktadır. Zaman bağımlı olmayan problemlerde daha sonra anlatılacak olan kapalı yöntemler kullanılmaktadır.

#### 4.2.1.1 Tam açık yöntem için duraylılık çözümlemesi

Duraylılık çözümlemeleri için bir çok yöntem mevcuttur. Bu çalışmada duraylılık çözümlemeleri, Von Neumann yöntemiyle yapılmıştır. Göre türevli denklemin doğrusallaştırılması sonucu elde edilen sonlu fark denkleminde, gerçek çözümün, başlangıç dağılımındaki karmaşık Fourier serisinde bulunan genel Fourier bileşeni ile elde edilmektedir. Eğer bu genel bileşen bir şekilde koşullu ya da koşulsuz sınırlanmamışsa kararsız, sınırlanmışsa duraylı olduğu anlaşılmaktadır. Duraylılık analizleri için tek yöntem bu değildir. Başka yöntemler de mevcuttur. Bir diğer yöntemde dizey yöntemi olarak adlandırılmaktadır. Dizey yöntemi, sonlu fark denklemlerinin birleştirilmesi sonucu elde edilen katsayılar dizeyinin özdeğerleri incelenerek duraylılık çözümlemesi yapabilmektedir. İki yöntem arasındaki fark ise dizey yöntemi duraylılık analizlerine sınır koşullarını dahil ederken, Von Neumann yöntemi sınır koşullarını ihmal etmektedir. Denklem (3.4) ile birlikte verilen doğrusal göre türevli denklemin çözümü için Denklem (4.10)'daki gibi bir öneri yapılmaktadır

$$E = e^{j\phi}. \quad (4.10)$$

Burada  $\phi$ , ile sistemin özdeğerleri gösterilmektedir, alt indis j ise karmaşık sayıyı ifade etmektedir. Sistem özdeğerleri, çözüm için gerekli olan göre türevli denklemden türetilen sonlu farklar denkleminin duraylılığı hakkında bilgi vermektedir. Duraylılık çözümlemeleri için sonlu fark yaklaşık çözümünü, Denklem (4.11)'daki gibi tek bir adımda elde edeceği düşünülmektedir:

$$E_i^{t+1} = GE_i^t. \quad (4.11)$$

Burada  $G$  büyütme çarpanı olarak bilinmektedir ve Denklem (4.12)'deki koşulu sağlaması gerekmektedir (Strang, 2007):

$$|G| \leq 1. \quad (4.12)$$

Denklem (4.11), sonlu farklar denkleminin duraylılık özelliklerinin koşullandırırma bilgisini elde etmeyi sağlamaktadır. Denklem (4.13) ve Denklem (4.14)'ü, Denklem (4.9)'da yerine yazarak

$$E_{i\pm 1}^{t+1} = E_i^{t+1} e^{\pm j\phi} \quad (4.13)$$

$$E_{i\pm 1}^{t+1} = E_i^{t+1} e^{\pm j\phi} E_i^t \quad (4.14)$$

$r = \frac{1}{\mu\sigma} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$  dönüşümü yapıldığında Denklem (4.15) elde edilmektedir:

$$E_i^{t+1} = E_i^t (1 + 2r(\cos \phi - 1)). \quad (4.15)$$

Böylece büyütme çarpanı Denklem (4.16) ile verilmektedir:

$$G = (1 + 2r(\cos \phi - 1)). \quad (4.16)$$

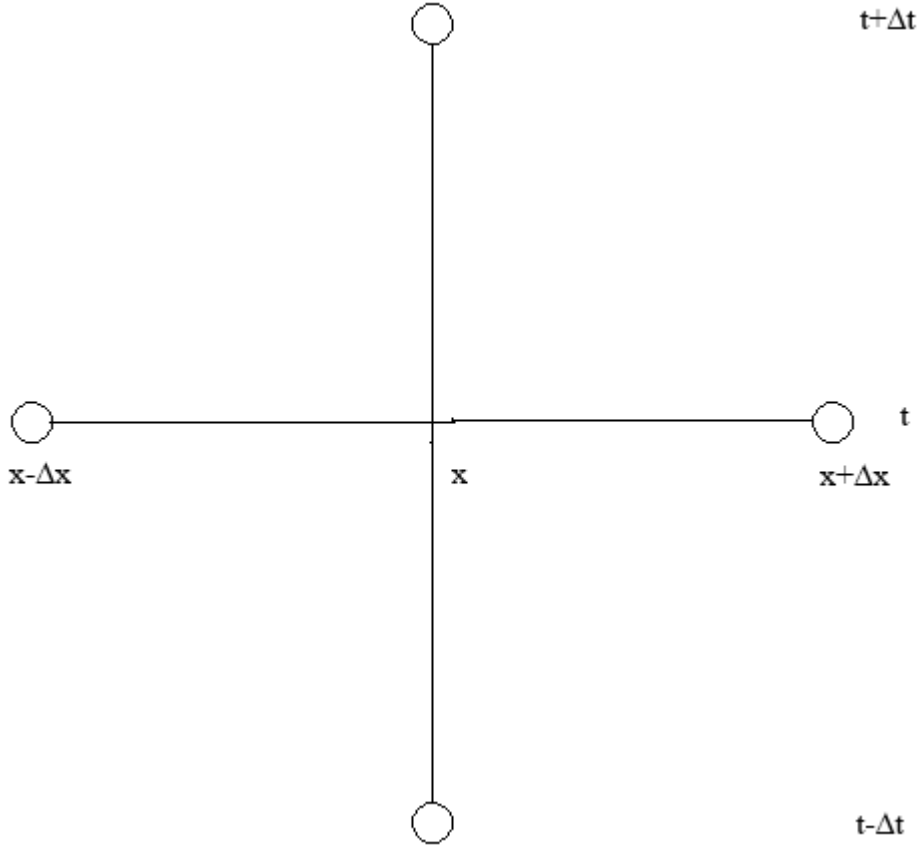
$(\cos \phi - 1)$  ifadesi için minimum ve maksimum bilgisi Denklem (4.12) yardımıyla çözüldüğünde açık yöntem için duraylılık koşulu,  $r$  sabiti için Denklem (4.17) ile elde edilmektedir:

$$r \leq \frac{1}{2}. \quad (4.17)$$

Denklem (4.17), anlaşılacağı üzere sonlu farklar çözümünün duraylılığı doğrudan ayrıklaştırılan nokta sayısı ve zaman adımı miktarı arasındaki oranla ilgili olmaktadır. Bu oran, Courant sabiti olarak adlandırılmaktadır (Thomas, 2010). Böylece zamanda ileri adımla merkezi fark yöntemi, Courant sabitinin 0.5 değerinden küçük olduğu durumlarda yakınsama sağlamaktadır.

#### 4.2.2 Du Fort-Frankel yöntemi

Üç zaman seviyeli açık bir yöntemdir. Du Fort ve Frankel (1953) tarafından geliştirilmiştir. Difüzyon tipi göre türevli denklemlerin yaklaşık çözümlerinde kullanılmaktadır. Hesaplama işleci Şekil (4.2)'de verilmektedir.



**Şekil 4.2 :** Du Fort-Frankel Yöntemi için hesaplama işleci.

Bir hesap noktası için özyineleme bağıntısı, Denklem (4.17) ile verilmektedir:

$$(1 + 2r)E_i^{t+1} = (1 - 2r)E_i^{t-1} + 2r(E_{i+1}^t + E_{i-1}^t) \quad (4.18)$$

Zamanda ileri adımla merkezi fark yönteminde olduğu gibi  $E_i^{t+1}$  ifadesi bilinmeyen değerdir. Denklem (4.18)'deki eşitiliğin sağ tarafındaki bilinen değerler yardımıyla tek bir hesaplama noktası için hesaplama yapılmaktadır. Benzer şekilde her zaman adımı için bu süreç tekrarlanmaktadır. Böylece belirlenen bir zaman için sonlu farklar yaklaşık çözümü elde edilmektedir. Zamanda ileri adımla merkezi fark yöntemine göre en önemli farkı Courant sabitinin alacağı değerler için bir kısıtlama getirmemektedir. Fakat böyle bir kısıtlamanın olmaması, sonucun doğru olacağı anlamına gelmemektedir (Du Fort ve Frankel, 1953; Thomas, 2010).

#### 4.2.2.1 Du Fort Frankel yöntemi için duraylılık çözümlemesi

Bu yöntem içinde, tam açık yöntem (zamanda ileri adımla merkezi fark) için yapılan işlem adımları izlenirse Courant sabiti,  $r$ 'nin her değeri için koşulsuz duraylı olmaktadır. Yani tam açık yöntemin getirdiği gibi bir kısıtlama getirmemektedir. Böylece; Du Fort-Frankel yöntemi, zaman adımı ve hesaplama noktası arasındaki mesafenin belirlenmesinde daha esnek bir seçim imkanı sağlamaktadır. Du Fort-Frankel yöntemi için büyütme çarpanı Denklem (4.19) ile verilmektedir:

$$G_{\pm} = \frac{2r \cos(\phi) \pm \sqrt{1 - 4r^2 \sin^2(\phi)}}{1 + 2r} \quad (4.19)$$

Büyütme çarpanının mutlak değeri,  $r$ 'nin her değeri için  $|G| \leq 1$  olmasına karşılık bu yöntemin her zaman yakınsayacağı anlamına gelmemektedir. Yöntemin tutarlılığı, Du Fort-Frankel sonlu farklar denkleminin Taylor seri açılımında kendini göstermektedir. Denklem (4.20)'e göre,  $\Delta t \rightarrow 0$  olduğunda  $\Delta x \rightarrow 0$  olacaktır ve  $\Delta t/\Delta x$  oranı belirsiz kalacaktır. Bu sebeple yöntemin duraylı olması sonlu farklar yaklaşık çözümüne yakınsayacağı anlamına gelmemektedir:

$$E_t + \frac{\Delta t^2}{6} = E_{xx} + \frac{\Delta x^2}{12} E_{xxxx} - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} E_{tt} - \frac{\Delta t^4}{12\Delta x^2} E_{tttt}. \quad (4.20)$$

Burada  $E_{xxxx}, E_{tttt}$  ifadeleri alt indisdeki değişken sayısı kadar türevi ifade etmektedir. Yani, sırasıyla  $E$ 'nin  $x$ 'e göre dördüncü,  $t$ 'ye göre dördüncü türevini göstermektedir. Gerçekte  $\Delta t/\Delta x$  oranı sıfıra gitmesi istenen bir olgudur, çünkü ancak o zaman yöntem tutarlı olacak ve çözüme yakınsayacaktır. Ayrıca Denklem (4.19)'daki  $1 - 4r^2$  ifadesinin sıfıra eşit olması istenmeyen bir olgudur, çünkü birim merkezli küre üzerinde çakışık kök oluşmasına sebebiyet vermektedir (Thomas, 2010).

### 4.3 Kapalı Yöntemler

Kapalı yöntemler (Implicit Schemes), açık yöntemlerdeki gibi bir önceki zaman adımı değerlerinde açıkça hesaplama yapılmamaktadır. Bunun yerine sonlu farklar denkleminde birden fazla bilinmeyen bulunmaktadır. Böylece, model içerisindeki tüm hesaplama noktalarında doğrusal denklem takımı oluşturulmaktadır. Bir zaman adımı, bu denklem takımını çözerek hesaplama yapılmaktadır. Elde edilmek istenen



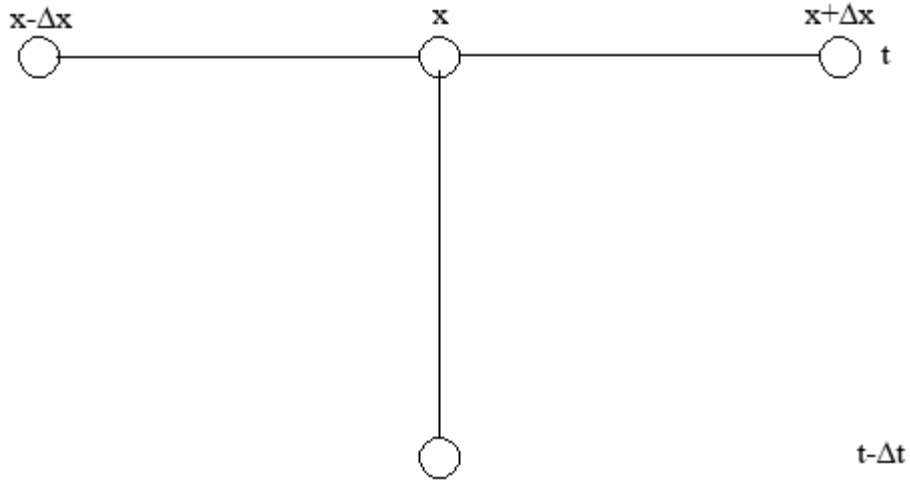
zamandaki çözüme ulaşıncaya kadar bu süreç tekrarlanmaktadır. Hesaplama noktasının artışı, denklem sayısının artmasına sebep vermektedir. Açık yönteme karşılık bu kötü bir özellik gibi görünse de kapalı yöntemlerin duraylılık ve tutarlılık özellikleri, kapalı yöntemli tercih sebebi yapmaktadır. Kapalı yöntemler, duraylılık sağlamak için hesaplama miktarında artış gibi bir bedel ödeyerek çözüme ulaşmayı amaçlamaktadır. Bu çalışmada tam kapalı yöntem (Zamanda geri adımla merkezi fark) ve Crank-Nicolson kapalı yöntemlerine yer verilmektedir. Bunun sebebi ise en çok kullanılan ve en meşhur yöntemler olmasından kaynaklanmaktadır (Strang, 2007).

### 4.3.1 Tam kapalı yöntem

Sadece “kapalı” (Fully Implicit Scheme, Backward Euler) yöntem olarak da anılmaktadır. Göre türevli denklemde  $E_t$  ifadesi, birinci kereden geriye doğru sonlu farklar karşılığı ile değiştirilmesi sonucu elde edilir ve Denklem (4.21)’de bir hesaplama noktası için özyineleme bağıntısı verilmektedir:

$$-rE_{i+1}^{t+1} + (1 + 2r)E_i^{t+1} - rE_{i-1}^{t+1} = E_i^{t1}. \quad (4.21)$$

Denklem (4.21)’in sol tarafındaki değerler, bir zaman adımı sonraki değerler yani bilinmeyenlerdir. Denklemin yalnızca sağ tarafındaki ifadeler bilinen değerlerdir. Şekil (4.3)’de yöntem işleci verilmiştir.



**Şekil 4.3 :** Zamanda geri adımla merkezi fark yöntemi için hesaplama işleci.

İki zaman seviyeli olan bu yöntem şimdiki zaman (t) ve bir önceki zaman (t-Δt) adımlarında hesaplama yaptığı için başlangıç değerine ihtiyaç duymaktadır. Bu

sebeple, bu yöntem başlangıç koşulu verilmiş modeller üzerinde sıklıkla kullanılan bir yöntem olmaktadır (Thomas, 2010).

#### 4.3.1.1 Zamanda geri adım ile merkezi fark yöntemi için duraylılık çözümlemesi

Denklem (4.21)'in Taylor serisine açılmış hali Denklem (4.22) ile verilmektedir:

$$E_t = E_{xx} + \frac{\Delta t}{2} E_{tt} - \frac{\Delta t^2}{6} E_{ttt} - \frac{\Delta x^2}{12} E_{xxxx} + \dots \quad (4.22)$$

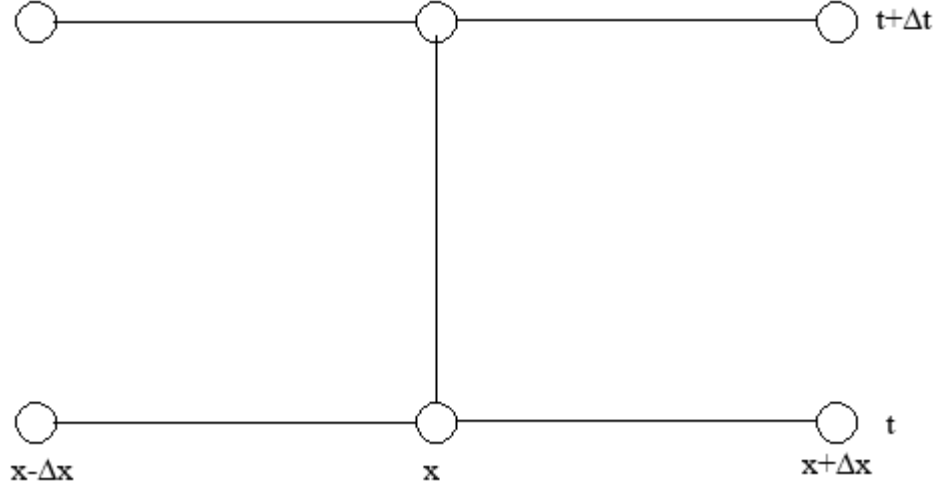
Zamanda geri adımla merkezi fark yöntemi için büyütme çarpanı ise Denklem (4.23) ile verilmektedir:

$$G = \frac{1}{1 + 2r(1 - \cos \emptyset)}. \quad (4.23)$$

Denklem (4.23)'de  $\emptyset$ 'nin alacağı her değer için  $(1 - \cos \emptyset) \geq 0$  olacaktır. Böylelikle  $|G| \leq 1$  sağlanmış olur. Büyütme çarpanınının mutlak değerinin, birden küçük olması yöntemin koşulsuz duraylı olduğunu göstermektedir (Thomas, 2010).

#### 4.3.2 Crank-Nicolson yöntemi

İlk defa 1947 yılında Crank-Nicolson tarafından sunulmuştur. Zamanda geriye doğru merkezi fark yöntemi, zaman türevini birinci kereden hesaplarken Crank-Nicolson yöntemi, tek adım yerine zaman ekseninin merkezini bakışım eksenini alarak iki adımda hesaplar ve duyarlılığı ikinci kerteğe çıkarır. Crank-Nicolson yöntemi için hesaplama işleci Şekil (4.4)'de verilmektedir. Hesaplanan zamanla bir zaman sonraki değerleri yarı yarıya ağırlıklandırılan bir işleç olarak da düşünülebilir. Böylece bir sonraki zaman  $t + \Delta t$  ile şimdiki zaman  $t$  değerlerinin bir ortalamasını almaktadır. Bu ağırlıklandırma  $\theta$  metodu olarak bilinmektedir. Ağırlıklandırmanın yarı yarıya yapılması, duyarlılığı ikinci mertebeye çıkarmaktadır.



Şekil 4.4 : Crank-Nicolson yöntemi için hesaplama işleci.

Crank-Nicolson yöntemi için sonlu farklar özyineleme bağıntısı Denklem (4.24) ile verilmektedir:

$$-rE_{i+1}^{t+1} + 2(1+r)E_i^{t+1} - rE_{i-1}^{t+1} = rE_{i+1}^t + 2(1-r)E_i^t + rE_{i-1}^t. \quad (4.24)$$

Denklem (4.24), Denklem (4.21) gibi bilinmeyen değer sayısı aynıdır. Crank-Nicolson yöntemine ait özyineleme bağıntısının sağ tarafındaki hesaplama sayısı, zamanda geri adımla merkezi fark yönteminin özyineleme bağıntısının sağ tarafındaki hesaplama sayısından üç kat daha fazladır. Bu nedenle hesaplama süresi göz önüne alındığında, Crank-Nicolson yöntemi için hesaplama süresi daha fazla olması beklenmektedir. Fakat doğrusal denklem takımı çözümlerinde, yinelemeli yöntemler kullanıldığında, çözüm önceden belirlenen bir toleransa bağlı olarak bulunacağından bu hesaplama süresi için beklenti her zaman aynı olmamaktadır. Bunun sebebi denklem çözümü için gereken yakınsamanın daha az yineleme ile elde edilmesiyle gerçekleşmektedir.

#### 4.3.2.1 Crank-Nicolson yöntemi için duraylılık çözümlemesi

Crank-Nicolson sonlu farklar özyineleme bağıntısı için Taylor serisi açılımı Denklem (4.25) ile verilmektedir:

$$E_t = E_{xx} - \frac{\Delta t^2}{24} E_{tt} - \frac{\Delta x^2}{12} E_{xxxx} + \frac{\Delta x^4}{360} E_{xxxxxx} + \dots \quad (4.25)$$

Zaman adımının ve hesaplama noktaları arasındaki mesafelerin yeterince küçük olduğu durumlarda diğer bir deyişle bu değerleri sıfıra yakınsadığı durumlarda, kesme hatalarının hepsi sıfıra yakınsayacaktır Böylece,  $|G| \leq 1$  koşulu sağlanmış olmaktadır. Crank-Nicolson yöntemi için büyütme çarpanı Denklem (4.26) ile verilmektedir:

$$G = \frac{1 - r(1 - \cos \emptyset)}{1 + r(1 - \cos \emptyset)} \quad (4.26)$$

$\emptyset$ 'nin her değeri için  $(1 - \cos \emptyset) \geq 0$  olur. Böylece Courant sabit  $r$ 'nin her değeri için koşulsuz duraylıdır ve Lax eşitlik kanıtına (Thomas, 2010) göre yakınsaktır. Fakat zaman adımının ve hesaplama noktaları arasındaki mesafenin büyük değerlerde seçilmesi, Denklem (4.26)'ya göre yakınsama duyarlılığını olumsuz etkilemektedir.

#### 4.4 Seyrek Doğrusal Denklem Takımlarının Çözümü

Seyrek sözcüğü denklem takımlarının birleştirilmesi ile oluşturulan dizeyde bol sıfır barındıracağına işaret etmektedir. Bu tür dizeyler sonlu fark, sonlu eleman gibi sayısal yöntemlerin göre türevli denklemleri doğrusallaştırması sonucu ortaya Denklem (4.27)'deki biçiminde çıkmaktadır:

$$Ax = b. \quad (4.27)$$

Burada  $x$  bilinmeyenler iken,  $A$  göre türevli denklemin doğrusallaştırılması ile elde edilen katsayılar dizeyidir. Denklemin sağ tarafı ise bilinen kaynak terimlerinin yöney halinde yazılmasıyla oluşmaktadır.  $A$  dizeyi, bol sıfır içeren bir dizeydir. Hesaplamalar bilgisayar ile yapıldığında bu sıfır elemanların bellekte tutacağı yer ve bu elemanlarla yapılacak gereksiz hesaplamalardan kaçınarak zaman kazanmak için yoğun dizeylerden farklı çözüm yöntemleri geliştirilmiştir (Saad, 2003). Bunlar doğrudan ve yinelemeli olmak üzere iki çeşittir. Doğrudan yöntemlerde hesap çokluğu ve fazla bellek miktarı yüzünden tercih edilen yöntemler olmamaktadır. Yinelemeli yöntemler ise hem hızlı hemde az bellek ihtiyacı vardır. Burada bahsedilenler büyük sistemler için geçerli olmaktadır (Saad, 2003). Doğrudan yöntemler dizeyin bakışık ve artı tanımlı olması gibi özel yapısından faydalanarak tekrar sıralama (pivoting) ile yok etme (elimination) yöntemiyle çözme amacını

hedeflemektedir. Büyük ve seyrek denklem takımların çözümünde kullanılan yöntemlerin başlıcaları Kırmızı-Siyah yeniden sıralama, Thomas yöntemi, tam olmayan LU ve tam olmayan Cholesky ayrıştırımları olarak bilinmektedir. Gauss-Seidel ve ardışık aşırı gevşetme gibi yöntemler ise yinelemeli yöntemlere örnektir. Diğer bir seçenek ise Krylov alt uzaylarını baz alan yöntemlerdir (Saad, 2003). Bu çalışmada bunlardan biri olan eşlenik yöneleğim (Conjugate Gradient) yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemin seçilme sebebi ise  $A$  katsayılar dizeyinin bakışık ve artı tanımlı olma özelliğinden ileri gelmektedir. Eşlenik yöneleğim yöntemi bakışık ve artı tanımlı denklem takımlarının çözümlerinde hızlı sonuç veren bir yöntem olarak bilinmektedir (Strang, 2007).

#### 4.4.1 Eşlenik yöneleğim yöntemi

Eşlenik yöneleğim yöntemi bir eniyileme yöntemidir. Doğrusal denklem takımlarının çözümünde kullanılması, aslında denklemlerdeki bilinmeyen değerlerinin önceden belirlenmiş bir toleransa bağlı olarak bulunmasını sağlamaktadır. Eniyileme yöntemi olması ise işte tam burada devreye girer ve önceden belirlenen toleransın en küçük olmasını sağlamaktadır. Hesaplamalar bilgisayar ortamında sayısal olarak yapıldığı için virgülden sonraki kesme hataları gibi hatalarında varolabileceğini düşünüldüğünde, eşlenik yöneleğim yöntemi doğrusal denklem takımların çözümünde bilinmeyen parametreleri en küçük hata ile bulması bu yöntemi sıkça başvurulan bir yöntem haline getirmiştir. Temelde bir işlevin yöneleğimine bakar ve ilk aramayı bu yönde yapar. Bunun sebebi ise minimum değerini yöneleğim yönünde olmasından kaynaklanır.

Denklem (4.27)'deki bilinmeyen  $x$  yöneyini bulmak için bir diğer bakış açısında Denklem (4.28) ile verilmektedir (Saad, 2003):

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax = bx. \quad (4.28)$$

Denklem (4.27)'deki  $f(x)$  ifadesini en küçük yapan  $x$  bilinmeyen yöneyini bulmaktır. Bu durum ancak  $\nabla f = Ax - b$  sifıra eşit olduğunda mümkündür. Yöntem  $x$  yöneyini en küçükleyen özyineleme bağıntısı Denklem (4.29)'de verilmektedir.

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k. \quad (4.29)$$

Bu özyineleme bağıntısı  $s_k$  yönünde arama yapmaktadır. Buradaki  $\alpha_k$  ise  $s_k$  yönünde hangi ölçüde ilerleneceğini belirten bir ölçekleme değişkenidir. Burada  $\alpha_k$  yönünün seçimi yöneleğimin tersidir. Çünkü ancak o zaman  $f(x)$ 'in eksi yönde en büyük değişimi olacaktır. Bu, en dik iniş yöntemi olarak bilinir. Yavaş yakınsama özelliği sebebiyle fazla kullanılmayan bir yöntemdir (Saad, 2003). Eşlenik yöneleğim yöntemi ise Denklem (4.30) ve Denklem (4.31) ile tanımlanmaktadır:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k \quad (4.30)$$

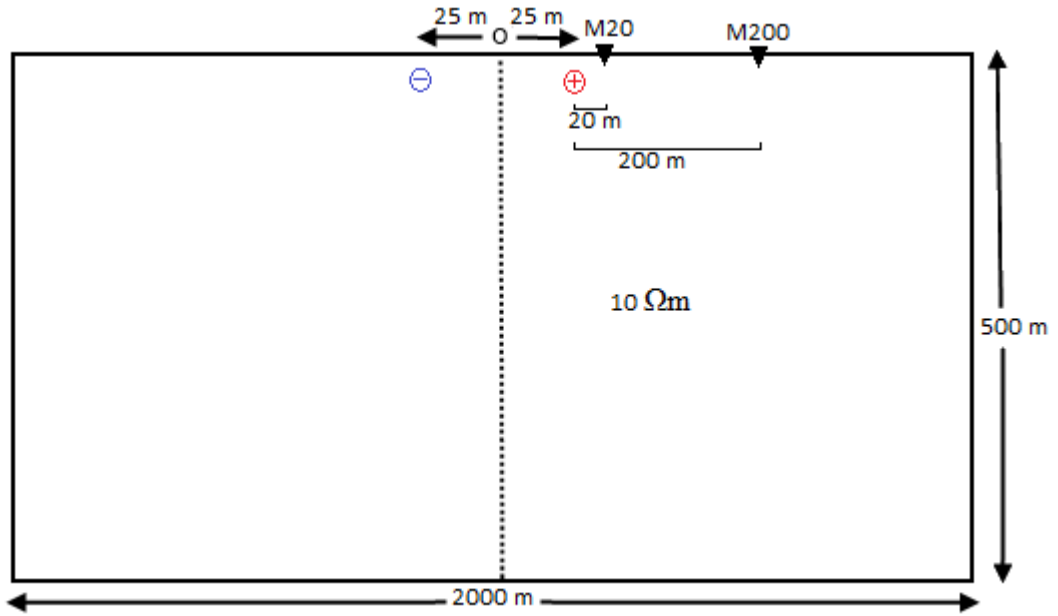
$$s_k = -\nabla f(x_k) + \beta_k s_{k-1}. \quad (4.31)$$

Buradaki  $\beta_k$  ile diğer arama yönü olan  $\alpha_k$ 'nın eşleniği olan başka bir yönde arama yapmaktadır.  $\beta_k$ 'nin seçimi ile ilgili Polak-Ribiere, Fletcher-Reeves ve Powell formülleri mevcuttur (Press ve diğ., 2007). Bu çalışmada uygulamadaki kolaylığı sebebiyle Denklem (4.32)'de verilen Fletcher-Reeves bağıntısı seçilmiştir:

$$\beta_k = \frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{\|\nabla f(x_{k-1})\|^2}. \quad (4.32)$$

## 5. ELEKTROMANYETİK ALANIN İKİ BOYUTLU UZAYDA YAYILIMI

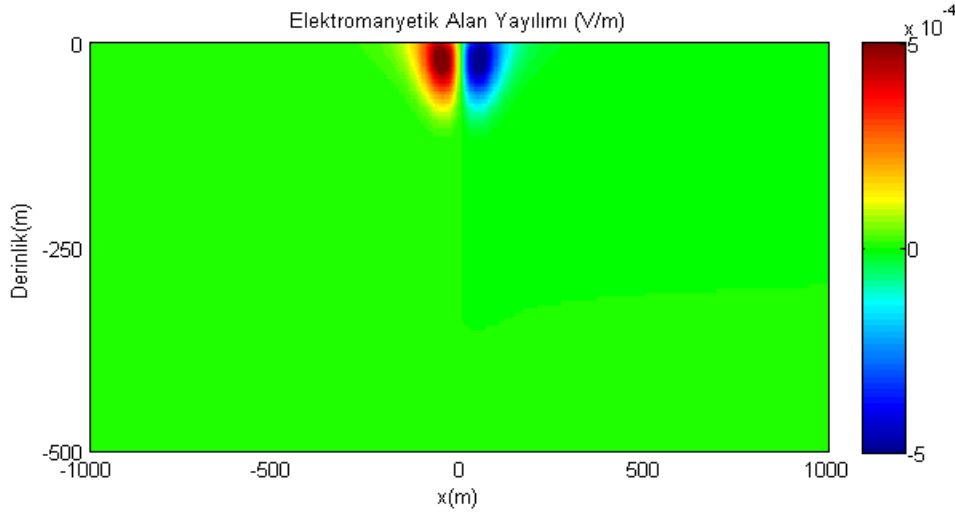
Geçici elektromanyetik alanın, düşük frekanslardaki yayılımının difüzyon ile gerçekleştiği üçüncü bölümde belirtilmiştir. Bu bölümde Oristaglio (1982) ve Oristaglio ve Hohmann (1984) tarafından verilen Denklem (3.5) ile verilen elektrik alanın iki boyutlu uzay ortamında zaman içerisindeki yayılımı incelenmiştir. Sırasıyla, önce Şekil (5.1) ile  $10 \Omega\text{m}$ 'lik , daha sonra Şekil (5.5) ile  $100 \Omega\text{m}$ 'lik yarı-sonsuz ortam için elektrik alanın zamana bağlı davranışı hesaplanmıştır.



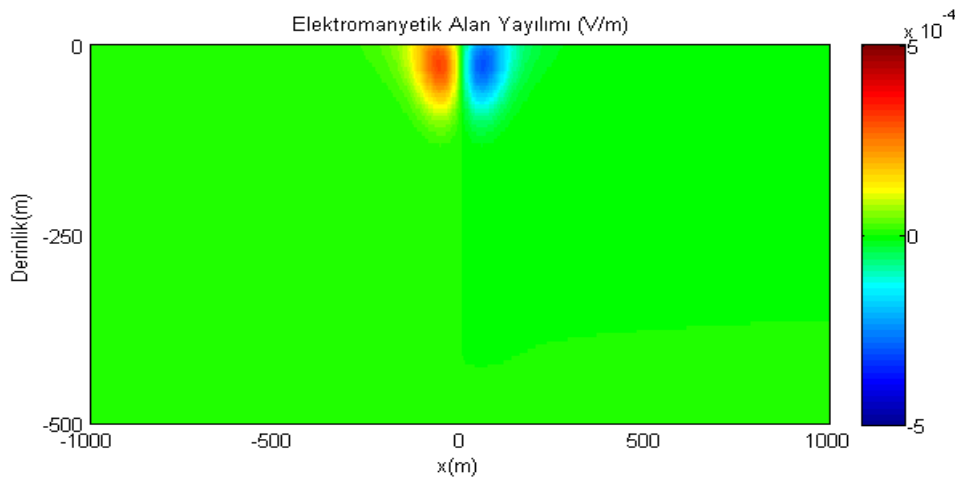
**Şekil 5.1 :**  $10 \Omega\text{m}$  özdirence sahip ortamda elektromanyetik alan yayılımı için yer modeli.

Birbirinden 50 metre uzaklıkta olan iki zıt işaretli çizgisel kaynaktan çıkan elektrik alan yayılımı x genişliğinde ve z derinliğinde bir alan için hesaplanmıştır. Burada iki boyutlu uzay ortamında elektromanyetik alan yayılımı incelendiği için çizgisel kaynağın y ekseninde sayfa düzlemine bir dik şekilde sonsuza uzandığı düşünülebilir. Gerçekte böyle bir şey mümkün olmamakla birlikte modelin matematiksel ifadesi böyle olmaktadır. Şekil (5.1)'de verilen ortamın özdirenci  $10 \Omega\text{m}$  olarak belirlenmiştir. Burada M20 ve M200 elektrik alanına zaman içerisindeki sönümlenmesini kaydeden alıcıların yerleştirildiği istasyonları ifade etmektedir. m20 istasyonunun pozitif işaretli kaynağa uzaklığı 20 m iken, M200 istasyonunun kaynağa

olan uzaklığı 200 m olarak verilmektedir. Ortam tekdüze bir ortamdır yani sadece bir malzeme türünden oluşmaktadır. Şekil (5.1)'de fiziksel ve geometrik özellikleriyle verilen modeldeki elektrik alan yayılımını kaynakların kapatılmasından 0.01 ms, 0.015 ms ve 0.02 ms süre sonundaki halleri sırasıyla Şekil (5.2), Şekil (5.3) ve Şekil (5.4)'de kesitler halinde verilmektedir. Şekiller, Denklem (3.5)'de verilen analitik bağıntı yardımıyla hesaplanmıştır. Çalışmada hesaplamalar ve analizler birincil alan ve TE modu üzerinden yapılmıştır. Maxwell denklemleri yardımıyla manyetik alan, iletkenlik gibi diğer fiziksel özelliklere dönüşüm yapılabilmektedir.

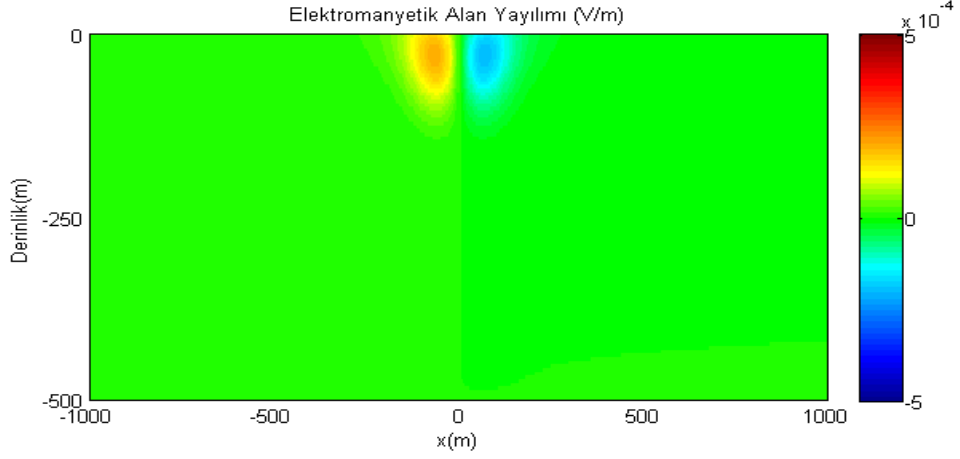


**Şekil 5.2 :** 10Ωm öz dirence sahip ortdama 0.01 ms sonra elektromanyetik alan yayılımı.



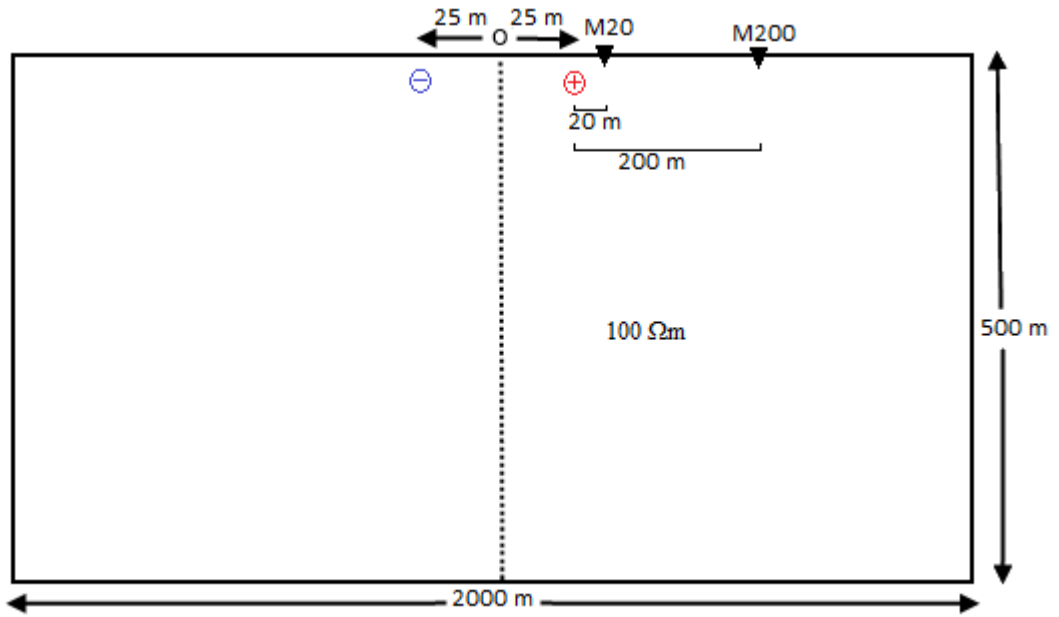
**Şekil 5.3 :** 10Ωm öz dirence sahip ortdama 0.015 ms sonra elektromanyetik alan yayılımı.





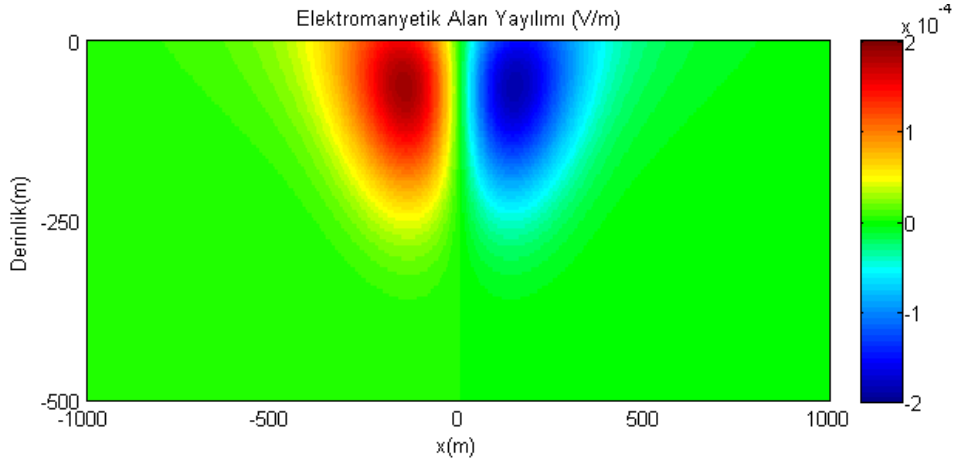
**Şekil 5.4 :** 10  $\Omega\text{m}$  öz dirence sahip ortdama 0.02 ms sonra elektromanyetik alan yayılımı.

Şekil (5.1)'de 10  $\Omega\text{m}$  için verilen modelin farklı öz dirence sahip bir ortamdaki gösterimi Şekil (5.5)'de verilmektedir.

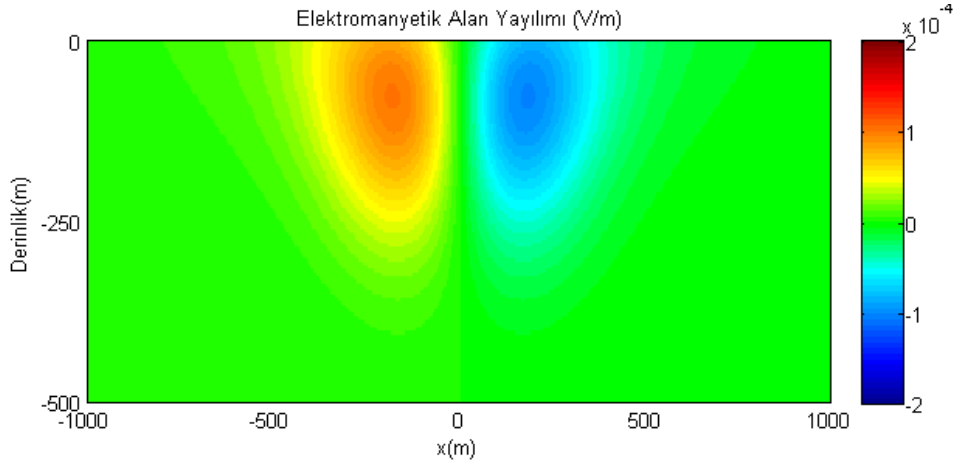


**Şekil 5.5 :** 100  $\Omega\text{m}$  öz dirence sahip ortdamda elektromanyetik alan yayılımı için yer modeli.

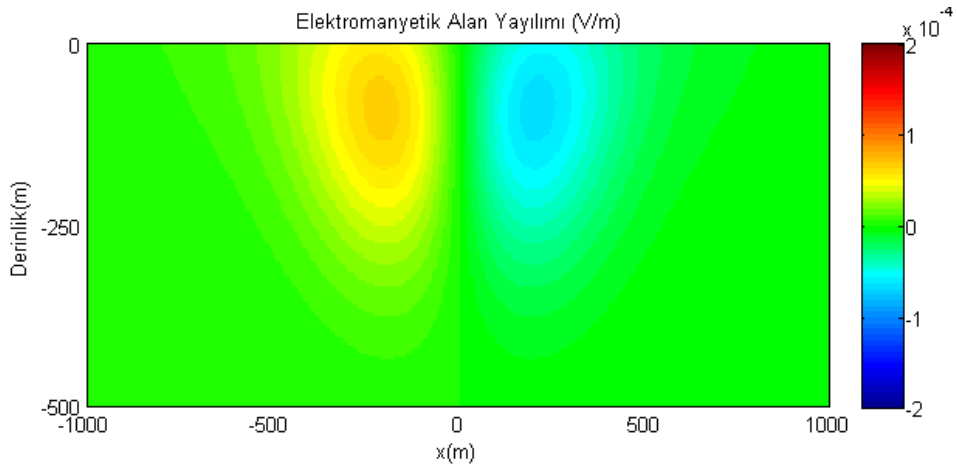
Bu durumda Şekil (5.5)'de verilen elektromanyetik alan yayılımı, kaynakların kapatılmasından 0.01 ms, 0.015 ms ve 0.02 ms süre sonundaki halleri sırasıyla Şekil (5.6), Şekil (5.7) ve Şekil (5.8)'de verilmektedir.



**Şekil 5.6 :** 100  $\Omega$ m özdirence sahip ortdama 0.01 ms sonra elektromanyetik alan yayılımı.



**Şekil 5.7 :** 100  $\Omega$ m özdirence sahip ortdama 0.01 ms sonra elektromanyetik alan yayılımı.



**Şekil 5.8 :** 100  $\Omega$ m özdirence sahip ortdama 0.01 ms sonra elektromanyetik alan yayılımı.

10  $\Omega\text{m}$  ve 100  $\Omega\text{m}$  öz dirence sahip iki ortamda elektromanyetik alan yayılımı incelendiğinde daha yüksek öz dirence sahip ortamlarda elektromanyetik alan yayılımının daha hızlı olduğu görülmektedir.

### 5.1 Başlangıç ve Sınır Koşulları

Analitik olarak çözülmesi verilen elektromanyetik alan yayılımının, sayısal çözülmesi yapılabilmesi için önceden belirlenmiş sınır ve başlangıç koşullarına sahip olması gerekmektedir. (3.2) denkleminde verilen, göre türevli denkleminin sonsuz çözümü vardır. Ancak belirli başlangıç ve sınır koşulları altında çözüm eşsiz (unique) olacaktır. Bu sebeple Şekil (5.1)'de geometrik ve fiziksel özellikleri verilen model için sınır koşulları sağ, sol ve alt sınırdaki sıfıra eşit alınmış ve zamanla değişmediği kabul edilmiştir (Beşkardeş, 2011; Oristaglio, 1982; Oristaglio ve Hohmann, 1984). Bu sınır koşulları Dirichlet sınır koşulları olarak bilinmektedir. Bu durum ortamın gerçek fiziksel davranışını tam anlamıyla ifade etmemektedir. Ancak elektrik alan yayılımı sağ, sol ve alt sınıra yeteri kadar ulaşmadığı sürece Dirichlet sınır koşullarının uygulanmasında bir sakınca yoktur (Oristaglio ve Hohmann, 1984).

Üst sınır için doğrudan hava ile yer arasındaki süreksizlikte hesaplama zorluğu sebebiyle, üst sınır değerlerini hesaplama yerine, yukarı uzanımla elde edilen havadaki elektrik alan değerleri hesaplanmaktadır (Oristaglio ve Hohmann, 1984). Havada iletkenliğin sıfır olacağını için elektrik alan Laplace denklemini sağlamaktadır:

$$\nabla^2 E = 0. \quad (5.1)$$

Böylece havadaki elektrik alan değerleri Denklem (5.2) ile hesaplanabilmektedir:

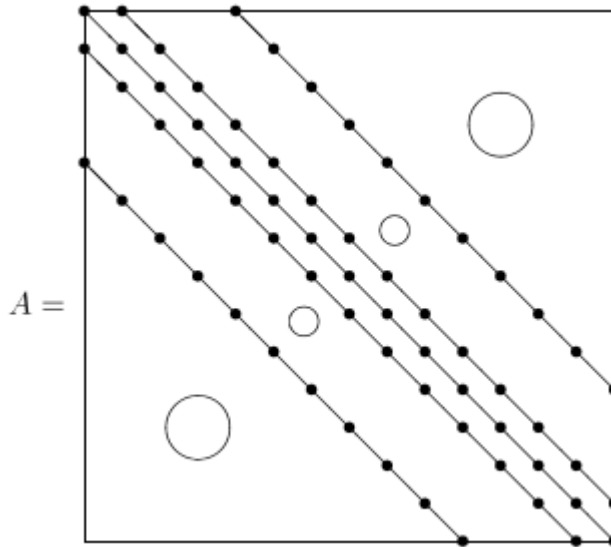
$$E(x, z, t) = -\frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(x', z=0, t)}{(x-x')^2 + z^2} dx'. \quad (5.2)$$

Başlangıç koşulu ise Denklem (3.5) ile elde edilmektedir. Elektromanyetik alan yayılımı daha sonra sayısal olarak hesaplanmıştır (Oristaglio, 1982; Oristaglio ve Hohmann, 1984). Sayısal hesaplamalar dördüncü bölümde incelenen açık yöntemler

(Zamanda ileri adımla merkezi fark, Du Fort Frankel) ve kapalı yöntemler (Zamanda geri adımla merkezi fark, Crank-Nicolson) ile yapılmıştır.

## 5.2 Sonlu Farklar Yöntemlerinin Uygulanması

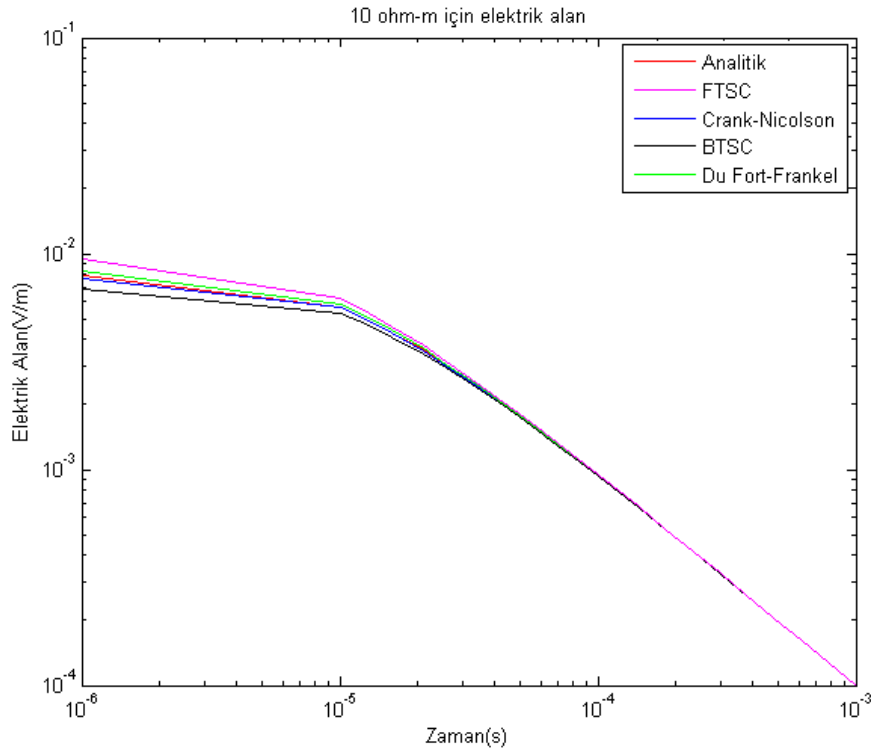
Şekil (5.1) 'de verilen model üçüncü bölümde anlatılan tüm sonlu farklar yöntemleri ile hesaplanmıştır. Yöntemler incelenirken hesaplamalar bilgisayar ortamında yapıldığı için her yöntemin verdiği sonuçtaki hata, hesaplama süresi ve yöntemlerin duraylılıklarına dikkat edilmiştir. Şekil (5.1) ve Şekil (5.5)'de verilen modellerin sonlu fark yaklaşım yöntemlerini uygulayabilmek için  $x$  yönünde 401,  $z$  yönünde ise 101 hesaplama noktası içerecek biçimde ayrıklaştırılmıştır. Yanal  $x$  ve düşey  $z$  yönünde hesaplama noktaları arasındaki mesafeler birbirlerine eşit olarak alınmıştır. Böylece hesaplama noktaları arasındaki uzaklık 5 m olmaktadır. Böyle yapılmasının sebeplerinden birisi bilgisayar programı yazımında kolaylık sağlaması çalışma içerisinde sınıra yakın bölgelerin aynı duyarlılıkla hesaplanmasıdır.. Diğer sebep ise hesaplama noktaları arasındaki mesafelerin farklı yönlerde farklı alınması, duraylılık çözümlmelerini de etkileyecektir. Böylece model, 40,501 hesaplama noktası ile ayrıklaştırılmış olmaktadır. Her hesaplama noktası için bir cebirsel denklem yazıldığında toplamda 1,640,331,001 adet elemanı olan bir dizey elde edilmiştir. Şekil (5.9) da yapısı verilen bu dizeyin yalnızca 201,501 adet elemanı sıfır değildir. Diğer elemanlar sıfıra eşittir. Dizeyin yoğunluğu yani sıfır olmayan eleman sayısının dizey eleman sayısına oranı %0.0123 kadar bir orana sahip olmaktadır.



Şekil 5.9 : Sonlu fark katsayılar dizeyinin seyrek yapısı.

Bol sıfır içeren bu (seyrek) dizeler bilgisayar ortamında hesaplama yapılırken dizelerin sıfır değerleri ile yapılan gereksiz hesaplamalardan kaçınmak için bazı yöntemler mevcuttur, bu yöntemlerden üçüncü bölümde bahsedilmiştir. Bu çalışmada doğrusal denklem takımının çözümü için eşlenik yöneleğim yöntemi kullanılmıştır. Dizelerin yapısı doğrudan sonlu fark yöntemleriyle elde edilen katsayılardan oluşmaktadır ve genellikle katsayılar dizeyi olarak adlandırılmaktadır. Denklem çözümü aslında sonlu fark katsayıları yakından ilgilidir. Bunu açıklamak için dizelerin özdeğerlerine bakmak gereklidir. Özdeğerlerinin sınırlı olması önemlidir. Sınırlı olmayan özdeğerler, sağlıksız dize yapısı oluşturduğundan, doğrusal denklem takımı çözülememektedir (Saad 2003). Burada bahsedilenler, üçüncü bölümde bahsedilen duraylılık çözümlerleriyle ilişkilidir.

Şekil (5.1)'de verilen modelde M20 istasyonunda elektrik alanın zamanla sönümlenmesinin dört farklı sonlu farklar yöntemiyle hesaplanan karşılaştırması Şekil (5.10)'da verilmektedir.



**Şekil 5.10 :** M20 istasyonunda sonlu farklar yöntemleri için duyarlılık analizi.

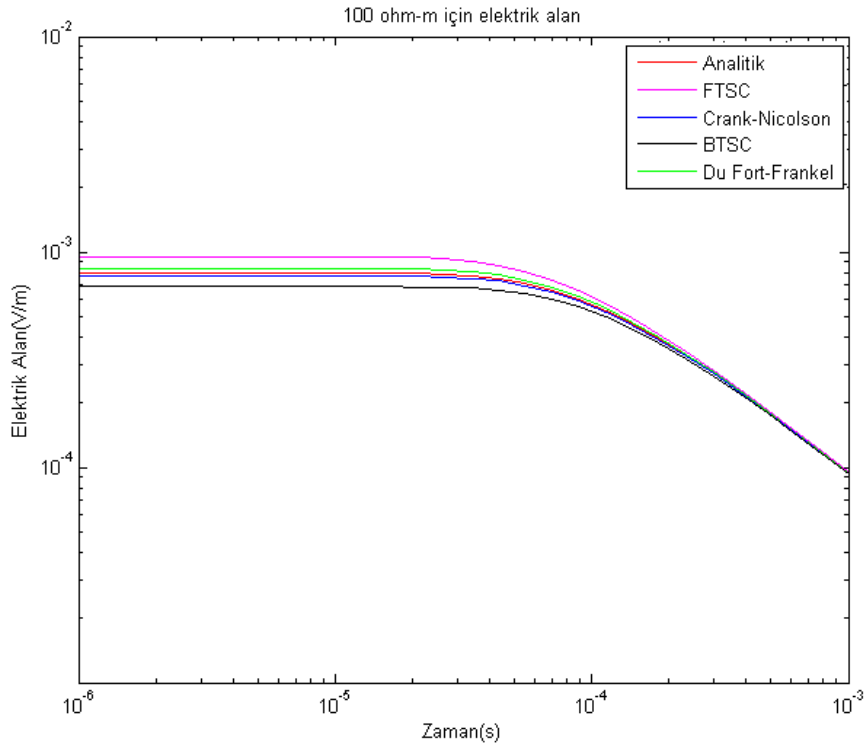
Bu şekilde yapılan tüm hesaplamalar analitik eğri ile karşılaştırılarak doğruluğu sınanmıştır. Şekil (5.10)'da verilen FTCS, zamanda ileri adımla merkezi fark; BTSC

ise zamanda geri adımla merkezi fark yöntemini ifade etmektedir.  $5 \cdot 10^{-7}$  s zaman adımı ile  $r$ 'nin 0.159 e eşit olduğu durumda hesaplamalar yapılmıştır. Courant sabitinin böyle seçilmesinin sebebi ise tüm yöntemler için duraylı sonuç vermesinden kaynaklanmaktadır. Şekil (5.10)'a göre en iyi yakınsamayı %0.99 maksimum bağıl hata ile Crank-Nicolson yöntemi sağlamıştır. Du Fort- Frankel için maksimum bağıl hata %2.03, zamanda ileri adımla merkezi fark için maksimum bağıl hata %19.44, zamanda geri adımla merkezi fark yöntemi için ise maksimum bağıl hata %13.47 olmaktadır. Bağıl hata (BH) değerleri Denklem (5.3) ile hesaplanmaktadır.

$$BH = \left| \frac{E_G - E_H}{E_G} \right| \times 100 \quad (5.3)$$

Burada  $E_G$  ve  $E_H$  değerleri; sırasıyla çözümsel bağıntıyla elde edilen elektromanyetik alan değerleri ve sonlu farklar yaklaşımı ile elde edilen elektromanyetik alan değerlerini ifade etmektedir.

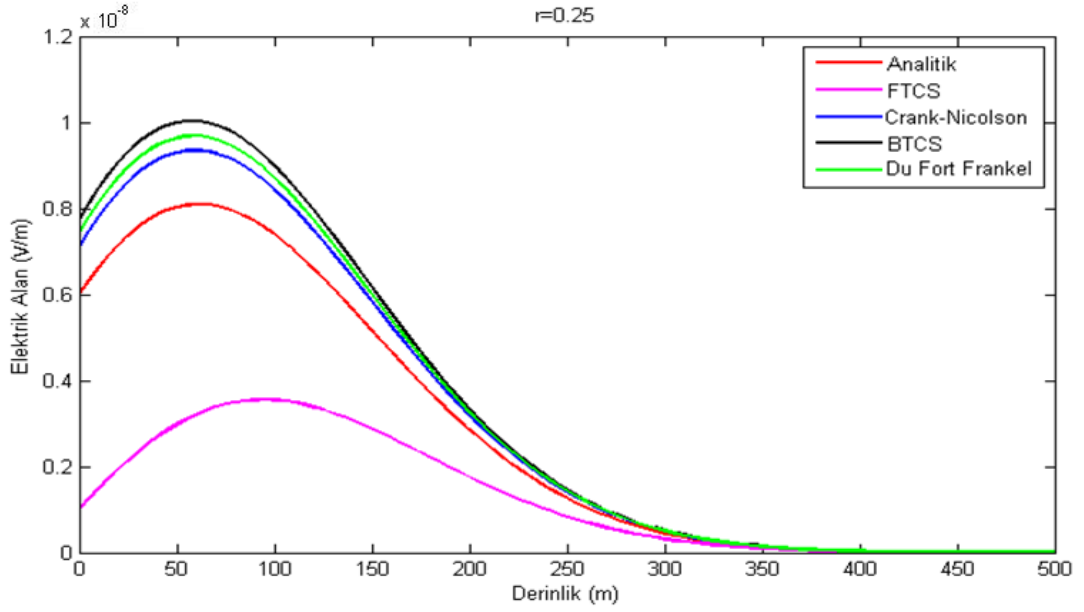
Şekil (5.11)'de ise M200 istasyonu için elektrik alanın zamanla sönümlenmesinin dört farklı yöntemle hesaplanan sonlu farklar karşılaştırması Şekil (5.5)'de verilen modele uygulanarak elde edilmiştir.



Şekil 5.11 : M200 istasyonunda sonlu farklar yöntemleri için duyarlılık analizi.

Şekil (5.11) için zaman adımı  $5 \cdot 10^{-8}$  s seçilerek yine aynı Courant sabiti değerine ( $r=0.159$ ) eşit durumdaki hesaplamalar yapılmıştır. Bu durumda maksimum bağıl hata değerleri; Crank-Nicolson yöntemi için %2.5; Du Fort-Frankel yöntemi için %3.58, zamanda geri adımla merkezi fark için %9.57 ve zamanda ileri adımla merkezi fark yöntemi için %13.18 olmaktadır.

Yapılan hesaplamalarda bağıl hatanın en fazla olduğu  $x$  noktalarını (merkezden 995 uzaklıktaki sağ ve sol sınırın bitişiğindeki hesaplama noktalarını) gösteren Şekil (5.12) 'de her yöntem için duyarlılık çözümü yapılmıştır.



Şekil 5.12 : Sonlu farklar yöntemleri için duyarlılık analizi.

Şekil (5.11)'de verilen hesaplamalar,  $x$  ekseninde sağ ve sol sınırlarının bitişiğindeki değerleri göstermektedir. Bu değerlerin model merkezinden uzaklığı 995 metreye denk gelmektedir. Daha önce bahsedildiği gibi gerçek fiziksel koşulu belirtmese de sağ ve sol sınırdaki Dirichlet sınır koşulu uygulanması hata miktarının diğer  $x$  noktalarına göre oldukça fazla olmasına neden olmaktadır.

Sonlu farklar yaklaşımında bir diğer önemli unsur, hesaplamalar için harcanan süredir. Açık yöntemlerin kapalı yöntemler gibi doğrusal denklem takımı çözme gereksinimi olmadığı için daha hızlıdır. Bu sebeple bilgisayar üzerinde yapılan hesaplamalarda kapalı yöntemler gibi daha fazla bellek ve işlemci gücü ihtiyacına gerek duymazlar. Yine bu bölümde bahsedilen katsayılar dizeyini düşündüğümüzde, sıfır değerleride belleğe alınırsa 1.53 GB'lık bellek ihtiyacı olacaktır. Dizeyin sıfır

olan elemanları belleğe alınmadığında bu değer 197 KB'a düşmektedir. Cebirsel işlemler yapılırken sıfırlarla yapılan gereksiz işlemlerden kurtulmak, hem açık hemde kapalı yöntemler için işlem süresini düşürecektir. Çizelge (5.1) ve Çizelge (5.2), Şekil (5.12)'de gösterilmekte olan model merkezinden 995 m uzaklıkta sağ ve sol sınır bitişiğindeki hesaplama noktalarındaki bağı hataının en fazla olduğu durum hesaplanmıştır. Çizelge (5.1)'de yöntemlerin hesaplamalar için gereken işlem süreleri verilmiştir.

**Çizelge 5.1 :** Courant sabitinin 0.25 değeri için işlem süresi ve hata miktarı.

	FTSC	BTSC	Du Fort Frankel	Cranck-Nicolson
Ortalama Bağlı Hata (%)	136.72	23.78	18.67	13.28
Maksimum Bağlı Hata (%)	454.55	27.6	25.02	23.99
İşlemci Süresi(s)	20.69	44.72	29.99	39.45

Çizelge (5.1)'e göre işlem süresi ve hata aynı anda düşünüldüğünde; Du Fort-Frankel yöntemi diğer yöntemlere göre oldukça iyi sonuç vermektedir. Burada  $r$  değeri 0.25 alınmıştır. Bu aynı zamanda (Oristaglio, 1982; Oristaglio ve Hohmann, 1984) tarafından Du Fort Frankel yöntemi için önerilen değerdir. Courant sabiti, farklı yöntemler için farklı değerler aldığıında yöntemin hata oranını ve işlem hızını değiştirebilir. Bu sebeple  $r=0.5$  için hesaplamalar yapılmış ve sonuçlar Çizelge (5.2)'de verilmiştir.

**Çizelge 5.2 :** Courant Sabitinin 0.5 değeri için işlem süresi ve hata miktarı.

	FTSC	BTSC	Du Fort Frankel	Cranck-Nicolson
Ortalama Bağlı Hata (%)	-	23.96	19.91	13.36
Maksimum Bağlı Hata (%)	-	31.15	25.72	24.01
İşlemci Süresi(s)	-	38.9	20.75	47.06

Dikkat edilmelidirki  $r=0.5$  değeri zamanda ileri adımla merkezi fark yöntemi için uygun olmayan değerdir. Çünkü Denklem (4.12)'de verilen koşul sağlanmaz. Bu sebeple yöntem duraylı sonuçlar vermeyecektir. Böylece sonuca yakınsama yerine ıraksama gözlenecektir. Bu sebeple Çizelge (5.2)'de zamanda ileri adımla merkezi fark için hesaplamalara yer verilmemiştir.

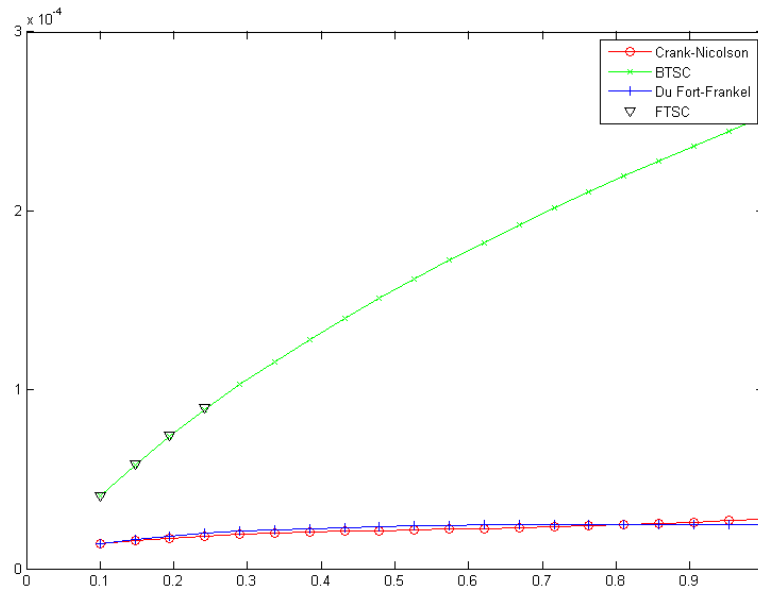
Courant sabiti,  $r=0.5$  alındığında Çizelge (5.2)'ye göre duyarlılık olarak en iyi sonucu işlem süresinin azlığı bakımından Du-Fort Frankel yöntemi diğer yöntemlere



göre üstünlük sağlamıştır. Zamanda ileri adımla merkezi fark yöntemi, diğer yöntemlere göre hata oranına bakıldığında daha kötü sonuç vermektedir.

Çizelge (5.1) ve Çizelge (5.2) 'ye göre,  $r$  değerinin seçimi çözümü işlem süresi ve hata oranı bakımından etkilemektedir. Bu sebeple modeli oluştururken yapılan ayrıklaştırma sonucu oluşan hesaplama noktaları arasındaki fark ( $\Delta x$ ) ve her zaman adımı arasındaki farkın ( $\Delta t$ ) belirlenmesi sonlu fark yaklaşımının duraylılık, duyarlılık ve işlem süresini doğrudan etkilemektedir. Zamanda ileri adımla merkezi fark yöntemini düşündüğümüzde daha iyi bir çözünürlük etmek için  $\Delta x$  üzerinde yapacağımız küçültme miktarını  $\Delta t$  üzerinde yapmamız gerekmektedir. Böylece  $r$  değeri istenilen bir oranda tutulabilmektedir. Bu da belirli bir zaman için istenen sonuca ulaşmada daha fazla zaman adımı gereksinimini getirmektedir.

Çalışmalarda hesaplama noktalarının önceden belirlenmesi ya da önceden belirlenen noktalarda bazı deneysel değerlerin elde edilmesi sebebiyle modelleme işlemleri zaman adımının değiştirilmesi üzerinden yapılmaktadır. Bu zaman adımı değişimleri Courant sabitini etkilemektedir. Courant sabitinin değişimi ise doğrudan hatayı etkilemektedir. Şekil (5.13)'de Courant sabiti ile ortalama mutlak hata değişimi gözlemlenmektedir. Duraylı olmayan ve elektromanyetik alanın sıfıra eşit olduğu noktalardaki sıfıra bölmeden dolayı oluşan belirsizliklerden dolayı tüm hesaplama noktalarında bağıl hatalar hesaplanamamaktadır.



Şekil 5.13 : Sonlu farklar yöntemleri için Courant sabiti-mutlak ortalama hata değişimi.

Bu sebeple Şekil (5.13)'de Courant sabitinin farklı değerleri için sonlu farklar yöntemlerinin meydana getirdiği mutlak hatalar gösterilmektedir, Zamanda ileri adımla merkezi fark yöntemi için Courant sabitinin 0.25 den büyük değerleri gittikçe artan hata değerleri vermektedir. Bu sebeple Şekil (5.13)'de bir kısmı gösterilmiştir. Şekil (5.13)'e göre Crank-Nicolson yöntemi için bağıl hata %0.98-13.59; Du Fort-Frankel yöntemi için bağıl hata %1.01-13.95; zamanda geri adımla merkezi fark yöntemi için bağıl hata %16-100.54 arasında değişmektedir.

Çizelge (5.3) ile çalışma kapsamınca yapılan tüm karşılaştırmaları içeren genel bir tablo verilmektedir. Tabloda verilen hız özelliği yöntemlerin birbirleri arasındaki göreceli kıyaslamayı belirtmektedir. Buna göre Tam kapalı yöntem ve Crank-Nicolson yöntemi, tam açık yöntem ve Du Fort-Frankel yöntemine göre göreceli olarak daha yavaş olmaktadır.

**Çizelge 5.3 :** Sonlu Farklar yöntemleri için karşılaştırma.

		Kesme Hatası	Tutarlılık	Duraylılık	Hız
Kapalı Yöntemler	BTSC	$\mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta t)$	Tutarlı	$r > 0$	Yavaş
	Crank-Nicolson	$\mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$	Tutarlı	$r > 0$	Yavaş
Açık Yöntemler	Du Fort-Frankel	$\mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$	Tutarsız	$r > 0$	Hızlı
	FTSC	$\mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta t)$	Tutarlı	$r \leq 0.5$	Hızlı

## 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Düşük frekansta yayılan geçici elektromanyetik alanların Maxwell denklemleri ve birtakım özdeşlik ve eşitliklerden yararlanarak yayılımın dalga yapısı yerine difüzyon şeklinde olduğu gösterilmiş ve ilgili bağıntılar türetilmiştir. Bu çalışmada elektromanyetik alan TE modu üzerine yoğunlaşmış ve hesaplamalar yine TE modu üzerinden tek düze ortamda iki boyutlu olarak yatay yönde ve düşey olarak yer içine doğru derinlik olarak gerçekleştirilmiştir. Hava yer arasındaki sınır koşulunun özelliğinden dolayı modelleme çalışması iki boyutlu olarak hesaplanmıştır. Matlab betik dili ile yapılan sayısal hesaplamalar, Denklem (3.5) `de verilen elektromanyetik alan yayılımı için çözümsel bağıntı yardımıyla çalışmada kullanılan bilgisayar programının doğruluğu test edilmiştir. Sayısal hesaplamalarla elde edilen sonuçlar; hata miktarı, işlem süresi gibi parametrelerle değerlendirilmiştir.

Şekil (5.1) ve Şekil (5.5) ile oluşturulan farklı özdirence sahip ortamlar için yapılan duyarlılık analizleri sonucu Crank-Nicolson ve Du Fort-Frankel yöntemleri ikinci mertebeden duyarlılık ile %1-2 hata ile digger yöntemlere karşı üstünlük sağlamıştır.

Şekil (5.12), sağ ve sol snırdaki en kötü durumu, yani bağıl hatanın en fazla olduğu yeri yan sınırlar boyunca göstermektedir. Dirichlet sınır koşulları burada gerçek fiziksel durumu karşılamasa da %13-32 arasında bağıl hata ile hesaplanmıştır. Çizelge (5.1) ve Çizelge (5.2)'ye bakıldığında bu en kötü durum için işlemci süresi, duyarlılık karşılaştırması Courant sabitinin iki farklı değeri için yapılmıştır. Açık yöntemin diğer yöntemlere göreceli olarak daha yüksek bağıl hata değerleri vermesi bu yöntemin elektromanyetik alan yayılımı için pek de uygun olmadığını bir göstergesi olmaktadır.

Çizelge (5.3)`e göre duraylılık göz önüne alındığında Crank-Nicolson yönteminin her zaman duraylı olması, elektromanyetik alan yayılımı için uygun bir yöntem olarak belirlemektedir. Zamanda geri adımla sonlu fark ve Du Fort-Frankel yöntemi duraylılık konusunda yeterli sonuç verse de; tutarlılık konusunda, oluşturulan modelin yöntem için uygun olup olmadığını incelenmesi gerekmektedir.

Du Fort-Frankel yöntemi, üçüncü bölümde incelenen duraylılık çözümlerinde duraylı olmasına karşılık  $\Delta t/\Delta x$  oranı göz önüne alındığında, tutarsızlık göstermektedir. Bu sebeple yöntem sadece Courant sabitinin sınırlı bir aralık içerisinde olması, göre türevli denkleme yakınsayacağı anlamına gelmektedir. Du Fort-Frankel yöntemi kullanılmadan önce modelin planlı bir şekilde oluşturulması hesaplama ve zaman adımı aralıklarının iyi seçilmesi gerekmektedir. Çünkü zaman adımı  $\Delta t$  ile hesaplama noktaları arasındaki mesafe  $\Delta x$  oranı tutarlılığı etkilemektedir. Crank-Nicolson yönteminin böyle bir dezavantajı bulunmadığı için modelleme yapan kişiye hesaplama noktası aralıkları ve zaman adımı için daha esnek seçim yapma imkanı tanımaktadır. Böylece Du-Fort-Frankel yöntemi difüzyon tipi (parabolik) modellemeler için her zaman uygun bir yöntem olmaktan çıkmaktadır.

Şekil (5.13)'e göre yöntemlerin Courant sabitinin artan değerlerinde hata miktarının gittikçe artan bir yapıda olduğunun göstergesidir. Crank-Nicolson ve Du Fort-Frankel yöntemleri ortalama bağıl hata %2.54 altında kalmaktadır. Tam açık yöntem (FTSC) ve tam kapalı yöntem (BTSC) için minimum bağıl hatanın %16 olması bu yöntemlerin uygun olmadığına bir göstergesidir. Böylece modelleme için tek bir yöntemi seçip bütün modelleme işlemini sadece tek bir yöntemle yapmak verimli olmayabilir. Bunun yerine modelleme birkaç yöntemden elde edilmiş melez bir yöntemle yapmak hesaplamaların doğruluğu ve işlem süresinde iyileştirme sağlayacaktır. Modellemenin ilk aşamasında zaman adımlarını küçük seçip buna bağlı olarak Crank-Nicolson yöntemi ile duraylı bir şekilde ilerledikten sonra Du-Fort Frankel yöntemiyle daha büyük zaman adımları ilerlemek hem duyarlılık hem tutarlılık hem de işlem süresinden kazanç sağlanmış olur.

## KAYNAKLAR

- Adhidjaja, J. I. ve Hohmann, G. W.** (1985). Two Dimensional Transient Electromagnetic Responses, Geophysics, (V.50, 2849-2861)
- Beşkardeş, G. D.** (2011). Geçici elektromanyetik alan difüzyonunun Du Fort-Frankel sonlu farklar yaklaşımı ile iki boyutlu modellenmesi, Tez (Y. Lisans)-İTÜ Fen Bil. Enst.,2011
- Carcione, J. M.** (2010). Simulation of Electromagnetic Field in Anisotropic Media, Progress in Electromagnetic Research B, (Vol. 26 , 425-450).
- Chapra, S. C. ve Canale, R. P.** (2009). Numerical Methods for Engineers, McGraw-Hill.
- Cheng, D. K.** (1989). Field and Wave Electromagnetics, Addison-Wesley.
- Dufort, E. C. ve Frankel, S. P.** (1953). Stability Conditions in the Numerical Treatment of Parabolic Differential Equations, Mathematical Tables and Other Aids to Computation, (V. 7, No. 43, 135-152).
- Farlow, S. J.** (1993). Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, DOVER Publications.
- Heath, M. T.** (2002). Scientific Computing: An Introductory Survey, McGraw-Hill.
- Langtangen, H. P.** (2003). Computational Partial Differential Equations: Numerical Methods and Diffpack Programming, Springer.
- Lapidus, L. ve Pinder G. F.** (2003). Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering, John Wiley & Sons.
- Leveque, R. J.** (2007). Finite Difference Methods Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems (Classics in Applied Mathematics), SIAM.
- Li, J. ve Chen, Y.** (2008). Computational Partial Differential Equations Using Matlab (Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics & Nonlinear Science), CRC Press.
- Lynch, D. R.** (2010). Numerical Partial Differential Equations for Environmental Scientists and Engineers: A First Practical Course, Springer.
- Moler, C. B.** (2004). Numerical Computing with MATLAB, SIAM.
- Morton, K. W ve Mayers D. F.** (2005). Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction, CAMBRIDGE University Press.
- Oristaglio, M. L.** (1982). Diffusion of Electromagnetic Fields from a Line Source of Current, Geophysics, (V. 47, 1585-1592).
- Oristaglio, M. L. ve Hohmann, G. W.** (1984). Diffusion of Electromagnetic Fields into a two-dimensional Earth: A Finite-Difference Approach, Geophysics, (V. 41, Sf. 85-109).
- Press, W. H. , Teukolsky, S. A. , Vetterling, W. T. Ve Flannery, B. P.** (2007). Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press.
- Saad, Y.** (2003). Iterative Methods for Sparse Linear Systems, SIAM.

**Strang, G.** (2007). Computational Science and Engineering, Wellesley-Cambridge Press.

**Strikwerda, J. C.** (2007). Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, SIAM.

**Thomas, J. W.** (2010). Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods (Texts in Applied Mathematics), Springer.

## ÖZGEÇMİŞ



**Ad Soyad:** Mustafa Deniz  
**Doğum Yeri ve Tarihi:** İstanbul 01.08.1986  
**E-Posta:** mustafadeniz@hotmail.com.tr  
**Lisans:** Kocaeli Üniversitesi

### Yayın ve Patent Listesi:

#### TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- Deniz, M. ve Özürkan, G., 2012: A comparative study: Modeling Transient Electromagnetic Field Propagation with Finite Difference Schemes. *4. Yer Elektrik Çalıştayı*, Mayıs 22-24, 2012 İzmir, Türkiye.