

## **DAİRE EKSENLİ ÇUBUKLARIN DİNAMİK ANALİZİ**

Mehmet Çoban Bahar Ayhan Fethi Kadioğlu  
İTÜ İnşaat Fakültesi, 34469 Maslak-İstanbul

### **ÖZET**

Bu çalışmada, Gâteaux türevi kullanılarak daire eksenli çubukların düzlem dışı serbest titreşimleri için fonksiyonel elde edilmiştir. Dinamik analizde problem, standart özdeğer problemine indirgenerek sıkıştırılmış kütle matrisi formülasyonunu esas alan karışık sonlu eleman yöntemi ile incelenmiştir. İki noda sahip dairesel çubuk eleman kullanılmıştır. Dairesel çubukta her eleman, bir eğilme ve bir burulma momenti, bir kesme kuvveti, iki dönme ve bir yerdeğiştirme olmak üzere (2×6) serbest derecesine sahiptir.

### **ABSTRACT**

In this study, using Gâteaux differential a functional is obtained for out-of-plane free vibrations of beam elements with rectangular cross sections. In dynamic analysis, the problem reduces to the solution of a standart eigenvalue problem and the mixed finite element is based upon a consistent mass matrix formulation. The circular beam element which have two nodes have been used. For circular beam, the element have one bending and one twisting moments, one shear force, two rotations and one displacement (2×6 DOF).

### **1.GİRİŞ:**

Mühendislik çalışmalarının içinde titreşim problemleri önemli bir yere sahiptir. Günümüze kadar inşaat, makine, otomotiv gibi endüstri kollarında birçok araştırmacı çubukların titreşim problemleri konusunda çalışmaktadır. Çubuklar geometrisine bağlı doğru ve eğri eksenli olarak ayrı ayrı ele alınabilirler. Özellikle köprülerde ve modern mimari yapılarda çubukların kullanımının artması nedeniyle eğrisel çubuk elemanlarının titreşim problemleri önemli bir araştırma konusu haline gelmiştir. Bu alanda yapılan çalışmalara bakıldığında analitik yöntemlerin yanında son zamanlarda bilgisayarların gelişmesiyle sayısal yöntemlerle yapılan araştırmaların sayısının artmakta olduğu görülmektedir.

Literatürde yapılan dairesel çubuklarla ilgili ilk çalışmalarda kayma deformasyonunu ve dönme ataletini dikkate almayan klasik kiriş teorisinden yararlanılmıştır. Love [1] ve Morley [2] kesik bir daire halkasının titreşimlerini inceleyerek çalışmalarında kayma deformasyonu, eksenel uzamayı ve dönme eylemsizliğini ihmal etmişlerdir. Literatürde, kesit eksenlerinin uzadığı ve uzamadığı varsayımlarını yaparak iki farklı şekilde analiz yapan çalışmalar da mevcuttur [3-6]. Eğri eksenli çubukların kayma deformasyonlarını ve dönme ataletlerini dikkate alarak dinamik denge denklemlerini kullanarak düzlem dışı titreşim için dinamik rijitlik matrisini içeren çalışmalarda bulunmaktadır [7-10]. Eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliğini göz önüne alarak Charpie ve Burroughs [11] klasik Galerkin yöntemi ile çubukların serbest titreşimlerini çeşitli geometri ve sınır şartlarında incelemişlerdir. Davis [12] kinetik enerji denklemleri ve kuvvet-yerdeğiştirme ifadeleri yardımıyla eleman rijitlik ve kütle matrislerini vererek eğri eksenli Timoshenko kirişinin düzlem dışı titreşimlerini incelemiştir. Son zamanlarda çeşitli yöntemleri ele alarak daire eksenli çubukların dinamik analizi ile ilgili birçok çalışma literatürde mevcuttur [13-25].

Bu çalışmada, düzlemine dik yüklerle yüklü dairesel çubuklara ait alan denklemleri ele alınarak düzlem dışı serbest titreşimler incelenmiştir. Burada değişik sınır koşulları altında daire eksenli çubukların düzlemine dik doğrultudaki doğal frekansları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların literatürde mevcut olan çalışmalarla uyumlu olduğu gözlenmiştir. Yapılan bu çalışmada Gâteaux diferansiyel yöntemi ile dairesel çubukların dinamik analizinde kullanılacak olan fonksiyonel elde edilerek, sistem kütle matrisini de içeren yer değiştirmeleri ve iç kuvvetleri bilinmeyen olarak ele alan karışık sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Geliştirilen sonlu eleman yöntemi ile her düğüm noktasında altı bilinmeyen bulunduğunda iki düğüm noktalı  $R$  yarıçaplı dairesel çubuk eleman üzerinde eleman matrisleri elde edilmiştir. Bunlar fortran dilinde bir bilgisayar program dili kullanılarak yazılmıştır. Bu program yardımıyla her türlü dış yük ve sınır koşulları için sonuç elde etmek mümkündür. Programda kullanılan eleman için kayma kilitlenmesi problemi görülmektedir. Bu nedenle dairesel çubuğun kalınlığı yeteri kadar azaltılarak sonuçlar istenilen doğruluklarla elde edilebilmektedir.

## 2.ALAN DENKLEMLERİ ve FONKSİYONEL:

Çubuklara ait geniş bilgi [26]'de bulunmaktadır. Düzlemine dik yüklü dairesel çubuklara ait alan denklemleri;

$$\begin{aligned}\frac{dT_b}{ds} + \rho A \omega^2 u_b &= 0 \\ \frac{dM_n}{ds} + \frac{1}{R} M_t - T_b &= 0 \\ \frac{dM_t}{ds} - \frac{1}{R} M_n &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_t}{ds} - \frac{1}{R}\Omega_n - \frac{M_t}{D_t} &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{ds} + \frac{1}{R}\Omega_t - \frac{M_n}{D_n} &= 0 \\
\frac{du_b}{ds} + \Omega_n - \frac{T_b}{C_b} &= 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklindedir. Kullanılan alan denklemlerinde  $\vec{T}$  ve  $\vec{M}$  kesit tesirlerini,  $\vec{u}$  ve  $\vec{\Omega}$  sırasıyla kesitin geometrik merkezinin ötelenmesi ve dönmesini ifade eden vektörler,  $\vec{t}$  birim teğet vektörünü ve  $ds$  ise uzunluk elemanıdır. Açık olarak, bir kesme kuvveti ( $T_b$ ), bir eğilme momenti ( $M_n$ ), bir burulma momenti ( $M_t$ ), iki dönme ( $\Omega_n, \Omega_t$ ) ve bir yerdeğiştirme ( $u_b$ ) olmak üzere toplam altı değişken bulunmaktadır. Çubuğa ait sınır koşulları aşağıdaki gibi alınmıştır.

$$\begin{aligned}
\vec{T} - \hat{T} &= 0 \\
\vec{M} - \hat{M} &= 0 \\
\vec{\Omega} - \hat{\Omega} &= 0 \\
\vec{u} - \hat{u} &= 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Sınır koşulları ile birlikte alan denklemleri operatör formda,

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} \mathbf{y} - \mathbf{f} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{Q} &= \mathbf{L} \mathbf{y} - \mathbf{f}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde yazılabilir.  $\mathbf{Q}$  operatörüne ait açık ifade Kadioğlu [27] tarafından verilmiştir.  $\mathbf{Q}$  operatörünün potansiyelliği,  $\langle \mathbf{dQ}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle$  iki vektörün iç çarpımı olmak üzere

$$\langle \mathbf{dQ}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle = \langle \mathbf{dQ}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}} \rangle \tag{2.4}$$

eşitliğinin sağlatılması ile gösterilebilir. Burada  $\mathbf{dQ}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}})$ ,  $\mathbf{Q}$  operatörünün Gâteaux türevidir. Alan denklemlerinin fonksiyonel karşılığı Oden ve Reddy [28] tarafından verildiği gibi,

$$\mathbf{I}(\mathbf{y}) = \int_0^1 \langle \mathbf{dQ}(s\mathbf{y}, \mathbf{y}), \mathbf{y} \rangle ds \tag{2.5}$$

şeklinde elde edilir. Burada  $s$  skaler bir büyüklüktür. Çeşitli matematik işlemler sonucu düzlemine dik yüklü dairesel çubuklar için geçerli olan fonksiyonelin açık hali,

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}(\mathbf{y}) = & \frac{-1}{2} \bar{\rho} \omega^2 [u_b, u_b] + R [T_b, \Omega_n] + [M_n, \Omega_t] - [M_t, \Omega_n] - [T'_b, u_b] - [M'_n, \Omega_n] - [M'_t, \Omega_t] \\
& - \frac{R}{2D_t} [M_t, M_t] - \frac{R}{2D_n} [M_n, M_n] - \frac{R}{2C_b} [T_b, T_b] + [(T_b - \hat{T}_b), u_b]_{\sigma} \\
& + [(M_n - \hat{M}_n), \Omega_n]_{\sigma} + [(M_t - \hat{M}_t), \Omega_t]_{\sigma} + [\hat{u}_b, T_b]_{\varepsilon} + [\hat{\Omega}_n, M_n]_{\varepsilon} + [\hat{\Omega}_t, M_t]_{\varepsilon}
\end{aligned} \quad (2.6)$$

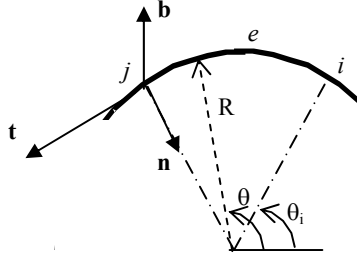
biçiminde elde edilir. Burada köşeli parentezler bölgedeki iç çarpımı;  $\sigma$  ve  $\varepsilon$  alt indisleri de köşeli parentezler içindeki terimlerin sırasıyla dinamik ve geometrik sınır koşullarının belirlediği sınırlarda geçerli olduğunu ifade etmektedir.

### 3.SONLU ELEMEN FORMÜLASYONU ve DİNAMİK ANALİZ:

Dairesel çubuklar için,  $L_e = \theta_j - \theta_i$  olmak üzere doğrusal şekil fonksiyonları

$$\Psi_i = \frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} \quad \Psi_j = \frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} \quad (3.1)$$

biçiminde alınmıştır. Kullanılan daireSEL çubuk eleman Şekil-1'de görülmektedir.



Şekil-1 Daire eksenli çubuk için kullanılan daireSEL çubuk elemanı

Elemanın her nodundaki bilinmeyen büyüklüklerin şekil fonksiyonları cinsinden ifadeleri, denklem (2.6)'da verilen fonksiyonelde yerine yerleştirildikten sonra nodal değişkenlere göre ekstremum olması şartı ile eleman denklemleri elde edilmiştir. Geliştirilen sonlu eleman formülasyonunda her düğüm noktasında  $T_b$ ,  $M_n$ ,  $M_t$ ,  $\Omega_n$ ,  $\Omega_t$ ,  $u_b$  olmak üzere altı bilinmeyen bulunmaktadır. Elde edilen eleman matrisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{bmatrix}
\frac{-L}{3C_b} & \frac{-L}{6C_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{3} & \frac{L}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{-L}{6C_b} & \frac{-L}{3C_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{6} & \frac{L}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\
0 & 0 & \frac{-L}{3D_n} & \frac{-L}{6D_n} & 0 & 0 & \frac{L}{3R} & \frac{L}{6R} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-L}{6D_n} & \frac{-L}{3D_n} & 0 & 0 & \frac{L}{6R} & \frac{L}{3R} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-L}{3D_t} & \frac{-L}{6D_t} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-L}{3R} & \frac{-L}{6R} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-L}{6D_t} & \frac{-L}{3D_t} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-L}{6R} & \frac{-L}{3R} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{L}{3R} & \frac{L}{6R} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{L}{6R} & \frac{L}{3R} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{L}{3} & \frac{L}{6} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-L}{3R} & \frac{-L}{6R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{L}{6} & \frac{L}{3} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-L}{6R} & \frac{-L}{3R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\rho AL \varpi^2}{3} & \frac{-\rho AL \varpi^2}{6} \\
\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\rho AL \varpi^2}{6} & \frac{-\rho AL \varpi^2}{3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
T_{bi} \\
T_{bj} \\
M_{ni} \\
M_{nj} \\
M_{ti} \\
M_{tj} \\
\Omega_{ti} \\
\Omega_{tj} \\
\Omega_{ni} \\
\Omega_{nj} \\
u_{bi} \\
u_{bj}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
\quad (3.2)$$

Yapı sistemlerinde serbest titreşim analizi, standart özdeğer problemine, yani

$$[\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}] = 0 \quad (3.3)$$

çözümüne indirgenir. Burada  $[\mathbf{K}]$  sistem matrisi,  $[\mathbf{M}]$  sistem kütle matrisi ve  $\omega$  doğal açısal frekanslardır. Denklem (3.3)'ün açık hali,

$$\left( \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{11}] & [\mathbf{K}_{12}] \\ [\mathbf{K}_{12}]^T & [\mathbf{K}_{22}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{M}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} [\mathbf{F}] \\ [\mathbf{w}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

şeklinde. Burada  $[\mathbf{F}] = [\mathbf{T} \quad \mathbf{M} \quad \mathbf{\Omega}]^T$  kesme kuvveti, momentleri, dönmeleri ve  $[\mathbf{w}]$  düşey yerdeğiştirmelerini göstermektedir. Yerdeğiştirmeler cinsinden denklem (3.4) tekrar düzenlenirse,

$$([\mathbf{K}^*] - \omega^2 [\mathbf{M}]) \{\mathbf{w}\} = [\mathbf{0}] \quad (3.5)$$

haline gelir. Burada  $[\mathbf{K}^*] = [\mathbf{K}_{22}] - [\mathbf{K}_{12}]^T [\mathbf{K}_{11}]^{-1} [\mathbf{K}_{12}]$  şeklinde problemin indirgenmiş sistem matrisidir.

#### 4. UYGULAMALAR

Daire eksenli çubukların düzlem dışı serbest titreşimlerine ait yapılmış çok sayıda araştırma literatürde mevcuttur. Bu çalışmada da, değişik sınır koşullarına sahip dairesel çubuklara ait doğal frekanslar incelenmiş, elde edilen sonuçların literatürdeki mevcut çalışmalarla uyumlu olduğu gözlenmiştir.

##### 4.1 Bir ucu ankastre-diğer ucu boş olan dairesel çubuk

Dikdörtgen kesitli ( $6.2 \times 18.9$  mm $\times$ mm) yarım çember şeklindeki bir çubuk ele alınmıştır. Kesit ve malzeme özellikleri  $A=1.1718 \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup>,  $I_n=3.4882 \times 10^{-9}$  m<sup>4</sup>,  $I_t=1.22 \times 10^{-9}$  m<sup>4</sup>,  $I_b=3.75367 \times 10^{-9}$  m<sup>4</sup>, yarıçap  $R=0.305$  m.,  $\alpha=180^\circ$ , Elastisite modülü  $E=68.13$  GPa, Poisson oranı  $\nu=0.33$  ve  $\rho=2882$  kg/m<sup>3</sup> alınmıştır. Bu probleme ait sonuçlar Tablo 1’de sunulmuştur. Tablo 1’de verilen literatürdeki deneysel [13] ve teorik [14-15] sonuçlarla uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo-1 Ankastre-boş uçlu yarım çembere ait düzlem dışı doğal frekans (rad/s)

	Present	Tabarrök <i>et al.</i> [13]	Yıldırım [14]	Yıldırım [15]
1.mod	56.832	56.00	54.77	54.80

##### 4.2 İki ucu ankastre mesnetli dairesel çubuk

Kesit ve malzeme özellikleri  $b=h=1$  m., Elastisite modülü  $E=181$  GPa, Poisson oranı  $\nu=0.3$ ,  $\rho=1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $i=\sqrt{I_n/A}$  ve  $\lambda=R/i$  olmak üzere  $\lambda=100$  alınmıştır. Çeşitli açılara sahip iki ucu ankastre daire eksenli çubuğa ait  $\varpi = \omega R^2 \sqrt{\rho A / (EI_n)}$  boyutsuz frekans parametresi incelenmiştir. Sonuçlar Tablo 2’de verilerek literatürde bulunan mevcut değerlerle karşılaştırılmıştır. Tablo 2’de görüldüğü gibi sonuçlar uyumludur.

Tablo-2 İki ucu ankastre mesnetli dairesel çubuk için boyutsuz frekans parametereleri

$\alpha$ (°)	Modes	Present	Kang <i>et al.</i> [16]	Irie <i>et al.</i> [17]	Howson <i>et al.</i> [18]	Tufekci <i>et al.</i> [19]
120	1	4.4263	4.4516	4.451	4.4512	4.45145
	2	12.8677	/	12.83	12.826	12.82629
	3	26.0400	/	25.99	26.988	25.98937
	4	43.6688	/	43.57	43.570	43.57053
180	1	1.7948	1.8045	1.804	1.8042	1.80434
	2	5.1880	/	5.198	5.1975	5.197995
	3	10.9269	/	10.92	10.917	10.91819
	4	18.7450	/	18.72	18.725	18.72548

#### 4.3 Değişik sınır koşullarına sahip dairesel çubuk

Daire en kesitli (en kesit yarıçapı  $r=0.5$  m) olan yarım çember ele alınmıştır. Çemberin yarıçapı  $R=10$  m. ve malzeme özellikleri Elastisite modülü  $E=210$  GPa, Poisson oranı  $\nu=0.3$ ,  $\rho=7850$  kg/m<sup>3</sup> alınmıştır. Ele alınan problem değişik sınır koşulları altında çözülerek sonuçlar Tablo 3’de verilmiştir. Tablo 3’de görüldüğü gibi değişik sınır koşulları altında aynı probleme ait sonuçlar karşılaştırıldığında en düşük frekans ankastre-boş uçlu olarak mesnetlenmiş dairesel çubukta ortaya çıkmaktadır. En büyük frekans iki ucu ankastre mesnetli dairesel çubukta görülmektedir. Doğal frekans değerleri sınır koşullarına bağlı olarak değişmektedir.

Tablo-3 Değişik sınır koşullarına ait doğal frekanslar (Hz)

Frekanslar (Hz)	Ankastre-Ankastre	Ankastre-Sabit mesnet	Ankastre-Boş uç
$\omega_1$	3.7564	1.7898	0.7822
$\omega_2$	10.7535	7.3691	2.7270
$\omega_3$	22.3975	18.0956	6.6292

## 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada düzlemine dik yüklerle yüklü daire eksenli çubuklar için geçerli olan alan denklemleri ele alınarak değişik sınır koşulları altında düzlem dışı serbest titreşimler incelenmiştir. Dairesel çubukların titreşimleri ile ilgili birçok çalışma literatürde mevcuttur. Burada değişik sınır koşulları altında dairesel çubuk sistemler ele alınarak sisteme ait düzlemine dik doğrultudaki doğal frekanslar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların literatürde mevcut olan çalışmalarla uyumlu olduğu gözlenmiştir. Yapılan bu çalışmada Gâteaux diferansiyel yöntemi ile dairesel çubukların dinamik analizinde kullanılacak olan fonksiyonel elde edilerek, yer değiştirmeleri ve iç kuvvetleri bilinmeyen olarak ele alan ve sistem kütle matrisini de içeren karışık sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Geliştirilen sonlu eleman yöntemi ile düğüm noktalarında altı bilinmeyen bulunduğ*u* iki düğüm noktalı dairesel çubuk eleman üzerinde eleman matrisleri kapalı formda elde edilmiştir. Fortran dilinde yazılan bilgisayar programında, her türlü sınır koşulları için sonuç elde etmek mümkündür. Ayrıca bu çalışmada sunulan eleman için kayma kilitlemesi problemi olmadığından, dairesel çubuğun kalınlığı yeteri kadar azaltıldığında da sonuçlar istenilen doğruluklarla elde edilebilmektedir.

## 6. KAYNAKLAR

- 1- Love, A.E.H., "A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity", Dover Publication, NewYork, 1944.
- 2- Morley, L.S.D., "The Flexural Vibration of Cut Thing Ring", Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol.11, pt.4, pp.491-497, 1958.
- 3- Den Hartog, JP., "The Lowest Natural Frequency of Circular Arcs", Philosophical Maazines, Series 7, Vol.5, No.28, pp.400-408,1928.
- 4- Evensen, D.A., "Nonlinear Flexural Vibrations of Thin Circular Rings", Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, Sept., pp.553-560, 1966.
- 5- Volterra,E. and Morell, J.D., "A Note on the Lowest Natural Frequency of Elastic Arcs", Trans ASME, Journal of Applied Mechanics, V83, Series E, pp.744-746,1960.
- 6- Volterra,E. and Morell, J.D., "Lowest Frequency of Elastic Hinged Arcs", JASA, V.13, No.12, pp.1787-1790, 1961.
- 7- Rao,S.S., "Effects of tranverse shear and rotatory inertia on the coupled twist-bending vibrations of circular rings, J. Sound Vibr.V.16, pp.551-566, 1971.
- 8- Kirkhope,J., Out-of-plane vibration of thick circular ring, J.Eng.Mech.Div. ASCE 102, pp.239-247, 1976.
- 9- Silva, J.M.M. and Uргуeria, A.P.V., Out-of-plane dynamic response of curved beams – an analytical model, International Journal of Solid and Structures, V.24, pp. 271-284, 1988.
- 10- Petyt, M. and Fleischer,C.C., "Free Vibration of Curved Beam", Journal of Sound and Vibration, V.18(1), pp.17-30, 1971.
- 11- Charpie, J.P. and Burroughs, C.B., "An analytic Model for the Free In-plane vibration of Beams of Variable Curvature and Depth", JASA, V.94, pp.866-879, 1993.
- 12- Davis, R., Henshell, R.D. and Warburton, G.B., Curved Beam Finite Elements for Coupled Bending and TorsionalVibration, Earthquake Eng. Struct. Dyn., V.1, pp.165-175, 1971.
- 13- Tabarrok, B., Sinclair, A.N., Farshad, M. and Yi H., "On the dynamics of spatially curved and twisted rods-A Finite Element Formulation", Journal of Sound and Vibration, Vol.123(2), pp.315-326, 1988.
- 14- Yildirim, V., "Helisel yayların serbest titreşiminin rijitlik matrisi metodu ile incelenmesi", Türk Mühendislik ve Çevre Bilimleri Dergisi, Vol.19(4), pp.343-356, 1995.
- 15- Yildirim, V., "A computer program for the free vibration analysis of elasitic arcs", Computers and Structures, Vol.62(3), pp.475-485, 1997.
- 16- Kang, K., Bert, C.W. and Stritz A.G., "Vibration analysis of shear deformable circular arches by the differential quadrature method", Journal of Sound and Vibration, Vol.181, pp.353-360, 1995.



- 17-** Irie, T. and Yamada, G., “Natural frequencies of out-of-plane vibration of arcs”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.49, pp.910-913, 1982.
- 18-** Howson, W.P. and Jemah A.K., “Exact out-of-plane natural frequencies of curved Timoshenko beams”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.125, pp.19-25, 1999.
- 19-** Tufekci, E. and Dogruer, O.Y., “Out-of-plane free vibration of a circular arch with uniform cross-section: Exact solution”, *J.of Sound and Vibration*, V.291, pp.525-538, 2006.
- 20-** Tüfekçi, E. and Arpacı, A. “Exact solution of In-Plane vibrations of Circular Arches with Account Taken of Axial Extension, Transverse Shear and Rotary Inertia Effects”, *Journal of Sound and Vibration*, V.209(5), pp.845-856,1997.
- 21-** De Rosa, M.A. and Franciosi, C. “Exact and Approximate dynamic analysis of circular arches using DQM”, *International Journal of Solid and Structures*, V.37, pp.1103-1117, 2000.
- 22-** Raveendranath, P, Singh, G. and Pradhan B., “Free vibration of arches using a curved beam element based on a coupled polynomial displacement field”, *Computers and structures* , V.78, pp.583-590, 2000.
- 23-** Ozyigit, H. A., Oz, H. R. and Tekelioglu, M., “Linear forced in-plane and out-of plane vibrations of frames having a curved member”, *Mathematical and Computational Applications*, V.9, pp.371-380, 2004.
- 24-** Wu, J.S. and Chiang, L.K., “A new approach for displacement functions of a curved Timoshenko beam element in motions normal to its initial plane”, *Int.J.for Numerical Methods in engineering*, V.64, pp.1375-1399, 2005.
- 25-** Rubin, M.B. and Tufekci, E., “Three-dimensional free vibrations of a circular arch using the theory of a Cosserat point”, *J.of Sound and Vibration*, V.286, pp.799-816, 2005.
- 26-** İnan, M., *Elastik Çubukların Genel Teorisi*, İstanbul Teknik Üniversitesi, 1966.
- 27-** Aköz, A.Y. ve Kadioğlu, F., “The Mixed Finite Element Solutions of Circular Beam on Elastic Foundation”, *Computers and Structures*, Vol.60(4), pp.643-657, 1996.
- 28-** Oden, J. ve Reddy, J.N., *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer, Berlin, 1976.

