



FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ SİLİNDİRLERDE TERMAL ELASTİK GERİLME ANALİZİ

Ali Kurşun *, Emre Kara *, Halil Aykul *, Muzaffer Topçu +

*Hitit Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Çorum

+Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Denizli

ÖZET

Bu çalışmada, termal yük altında fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış uzun silindirlerde oluşan termal elastik gerilme dağılımı analitik olarak tayin edilmiştir. Silindir malzemesinin elastisite modülünün, termal genişleme katsayısının ve akma limitinin üssel bir fonksiyona göre radyal doğrultuda değişebildiği, poisson oranının ise sabit olduğu varsayılmıştır. Küçük deformasyonlar ve düzlem şekil değiştirme varsayımı altında Von Mises akma kriteri kullanılarak, elastik limitler analitik olarak belirlenmiştir. Sonuç olarak, derecelendirme parametresinin gerilme dağılımı üzerindeki etkileri ortaya konulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonel derecelendirilmiş silindirler, Termal elastik gerilme, Elastik limit

ABSTRACT

In this study, thermal elastic stress distribution occurred on long cylinders made of functionally graded material was analytically defined under thermal load. It was assumed that elasticity modulus, thermal expansion coefficient and yielding limit of cylinder material could change in terms of an exponential function as for that Poisson's ratio was constant. Elastic limits were determined under small deformations and plane strain assumptions using Von Mises yielding criterion. As a result, the effects of gradation parameter on stress distribution were presented.

Keywords: Functionally graded cylinders, Thermal elastic stress, Elastic limit

1. GİRİŞ

Modern teknolojinin malzemeye olan gereksinimi gittikçe artmaktadır. Bu gereksinime yalnız yüksek mukavemetin değil, aynı zamanda düşük bir ağırlığın da istenildiği dinamik yapılarda daha fazla ihtiyaç duyulmaktadır. Yüksek hızla üretim yapan makineler, uçaklar, uzay araçları ve diğer ulaşım araçları için mukavemet/ağırlık oranı yüksek olan yapı malzemelerinin geliştirilmesi büyük önem kazanmaktadır. Kuşkusuz bütün bu özelliklerin aynı malzemede aynı zamanda bulunması mümkün değildir. Bunun için, birbirlerinin zayıf yönlerini düzelterek üstün özellikler elde etmek amacıyla bir araya getirilen birden fazla malzemenin makro yapıda birleşimi ile kompozit malzemeler elde edilir. Kompozitler, değişik ve kendine

özgü mekanik özelliklerinden dolayı günümüzde birçok mühendislik alanlarında kullanılmaktadırlar. Fakat, geleneksel kompozit malzemeler özel bir performans veya fonksiyona uygun değildir. Bu yüzden, özel bir performans veya fonksiyona uygun hale getirilmiş yapı veya kompozisyonları kapsayan malzemelere ihtiyaç duyulmuştur. Bu tür malzemelere fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) denir [1]. FDM'ler başlangıçta uzay yapı uygulamaları ve füzyon reaktörleri için termal bariyer olarak tasarlanmıştır [2-4]. FDM'lerin özellikleri yapıların güvenilirliği, dayanıklılığı ve bütünlüğü açısından çok önemlidir. FDM'lerden oluşan yapı elemanlarının gerilme analizleri, onların tasarım, üretim ve optimizasyonu açısından oldukça önemlidir. Dao ve arkadaşları [5], random ve kesikli (aralıklı - discrete) mikroyapılı FDM için sayısallaştırılmış bir mikromekanik model kullanarak hem termoelastik hem de termoplastik deformasyon göz önüne alınmış ve metal tanelerinin plastik davranışı, kristal plastisite teorisi kullanılarak modellenmiştir. Elde edilen sonuçlar, sürekli derecelendirilmiş FDM ile karşılaştırılmıştır. Hem mikromekanik hem de sürekli modelde, makroskobik gerilmeler yaklaşık olarak aynı bulunmuştur. Bu malzemelerin hacim oranlarında mikro-yapı içerisinde sürekli değişimler olması nedeniyle yoğunluk, termal genleşme katsayısı ve elastisite modülü gibi fiziksel ve kimyasal malzeme özellikleri, uzaysal koordinatların fonksiyonu olmaktadır. Bu sebeple FDM'lerin davranışının incelenmesi için geliştirilen yöntemlerde malzeme özelliklerinin uzaysal koordinatlara bağlı değişkenler olduğu kabul edilir [6]. Spencer [7], elastisite modülü ve Poisson oranının kalınlık boyunca değiştiği izotropik lineer elastik levhayı incelemiş ve gerilme fonksiyonu hesabı için alternatif formülasyon vermiştir. Ha ve arkadaşları [8] Düzlem gerilmeye dayalı varsayılarak genelleştirilmiş, radyal yönde malzeme özellikleri değişen dönen kompozit volanda gerilme dağılımını hesaplamışlardır. Oral ve Anlas [9] homojen olmayan anizotrop silindirlerde, elastik özelliklerin radyal yönde değişmesinin gerilme üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Sonuçlar sonlu elemanlar çözümleriyle doğrulanmıştır. Farklı derecelendirme parametreleri için radyal, teğetsel ve aksel gerilme dağılımlarını grafik halinde sunulmuşlardır. Bu çalışmada, malzeme özelliklerinin sadece radyal doğrultuda değiştiği varsayılarak, uniform sıcaklığa maruz fonksiyonel derecelendirilmiş uzun içi boş silindir için analitik çözüm geliştirilmiştir. Geliştirilen çözümden elde edilen sonuçlara göre derecelendirme parametresinin hem gerilme hem de dağılımı üzerinde müthiş bir etkisinin olduğu tespit edilmiştir. Sonuçlar grafikler halinde sunulmuştur.

2. TERMAL GERİLME ANALİZİ

Silindirik koordinatlarda iki boyutlu denge denklemi,

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + R = 0 \quad (2)$$

şeklini alır [10]. Gerilme bileşenleri simetriden dolayı θ 'ya bağlı olmazlar ve yalnız r 'nin fonksiyonu olurlar. Aynı zamanda $\tau_{r\theta}$, kayma gerilme değeri sifıra eşittir [10]. R kütle kuvveti ihmal edilirse,

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (3)$$

burada σ_r ve σ_θ , sırasıyla radyal ve teğetsel gerilmeleri gösterir ve bu gerilmeler, bir gerilme fonksiyonu olarak denklem (4)'deki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{F}{r} \\ \sigma_\theta &= \frac{dF}{dr} \end{aligned} \quad (4)$$

İki uçundan sabit düzlem şekil değiştirmenin geçerli olduğu, sıcaklığa maruz silindir için gerilme ile şekil değiştirme arasındaki ilişki Hooke kanuna göre yazılacak olursa,

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E(r)} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha(r)T(r) \quad (5)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E(r)} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha(r)T(r) \quad (6)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E(r)} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha(r)T(r) \quad (7)$$

Burada düzlem $\varepsilon_z = 0$ 'dır. Denklem (7)'deki eşitlikten σ_z denklem (8)'deki gibi elde edilir.

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E(r)\alpha(r)T(r) \quad (8)$$

Elde edilen σ_z gerilme değeri denklem (5) ve (6)'da yerine konulursa,

$$\varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E(r)} [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta + E(r)\alpha(r)T(r)] \quad (9)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1+\nu}{E(r)} [(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r + E(r)\alpha(r)T(r)] \quad (10)$$

Gerinim-şekil değiştirme arasında ilişki aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (11)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (12)$$

Süreklilik denklem (13)'teki gibi tanımlanabilir.

$$\varepsilon_r = \frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) \quad (13)$$

Denklem (4)'deki gerilme değerleri, gerilme fonksiyonu cinsinden denklem (9) ve (10)'da yerine konular ve elde edilen şekil değiştirme değerleri süreklilik denkleminde (13) yerine konularsa;

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \left(1 - r \frac{E'(r)}{E(r)} \right) \frac{dF}{dr} + \left(\nu r \frac{E'(r)}{E(r)} - 1 \right) F = - (1 - \nu) E(r) r^2 [\alpha'(r) T(r) + \alpha(r) T'(r)] \quad (14)$$

Malzeme özellikleri sadece yarıçapa bağlı üssel değişen fonksiyon olarak seçilmiştir. Elastisite modülü ve termal genleşme katsayısı denklem (15)'teki fonksiyonlara göre değiştiği varsayılmıştır.

$$E(r) = E_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^n$$

$$\alpha(r) = \alpha_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^\beta \quad (15)$$

Burada, E_0 ve α_0 , sırasıyla, elastisite modülü ve termal genleşme katsayısı referans değerleri olarak tanımlanmıştır, n ve β ise, isteğe bağlı sabitlerdir. Bu sabitlere göre malzeme özelliklerinin değişim profili elde edilmektedir. Denklem (14) içine denklem (15)'teki değerler konular, $T(r) = T_0$ uniform sıcaklığı için düzenlenir ve $r = e^t$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{d^2 F}{dt^2} - n \frac{dF}{dt} + (\nu n - 1) F = - \frac{(1 - \nu) E_0 \beta \alpha_0 T_0}{r_0^{(\beta+n)}} e^{(\beta+n+1)t}, \quad (r = e^t) \quad (16)$$

Buradan denklem (16)'nın genel çözümü bize gerilme fonksiyonunu vermektedir.

$$F = C_1 r^{\frac{n+k}{2}} + C_2 r^{\frac{n-k}{2}} + B r^{(\beta+n+1)} \quad (17)$$

Burada B;

$$B = - \frac{(1 - \nu) E_0 \beta \alpha_0 T_0}{r_0^{(\beta+n)} \left((\beta + n + 1)^2 - n(\beta + n + 1) + \nu n - 1 \right)} \quad (18)$$

Buradaki gerilme fonksiyonundan (17), radyal ve teğetsel gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\sigma_r = \frac{F}{r} = C_1 r^{\frac{n+k-2}{2}} + C_2 r^{\frac{n-k-2}{2}} + B r^{(\beta+n)} \quad (19)$$

$$\sigma_\theta = \frac{dF}{dr} = \left(\frac{n+k}{2} \right) C_1 r^{\frac{n+k-2}{2}} + \left(\frac{n-k}{2} \right) C_2 r^{\frac{n-k-2}{2}} + (\beta + n + 1) B r^{(\beta+n)} \quad (20)$$

C_1 ve C_2 denklemin keyfi sabitleri, denklem (21)'de verilen sınır şartları kullanılarak denklem (22) ve (23)'teki gibi bulunabilir.

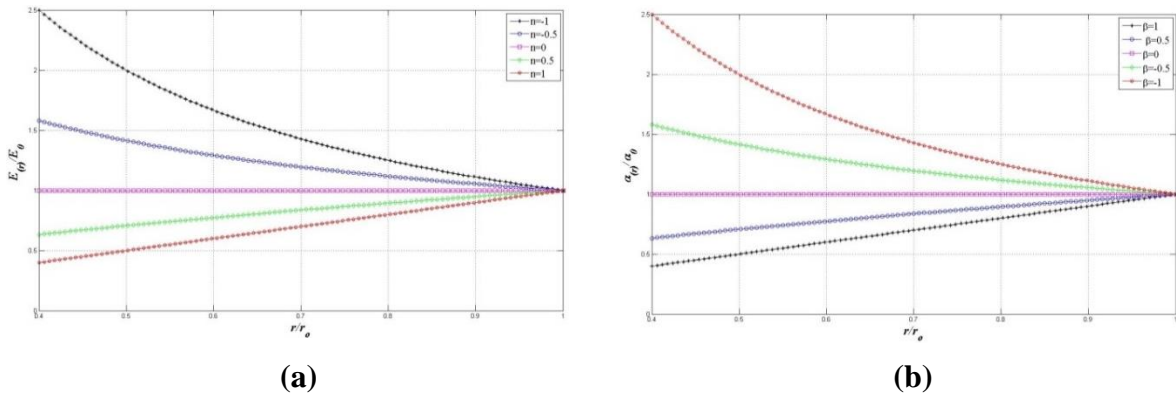
$$\sigma_r(r_i) = 0, \quad \sigma_r(r_o) = 0 \quad (21)$$

$$C_1 = \frac{B \left(-r_i^{(\beta+n)} r_o^{\frac{n-k-2}{2}} + r_o^{(\beta+n)} r_i^{\frac{n-k-2}{2}} \right)}{r_i^{\frac{n+k-2}{2}} r_o^{\frac{n-k-2}{2}} - r_o^{\frac{n+k-2}{2}} r_i^{\frac{n-k-2}{2}}} \quad (22)$$

$$C_2 = \frac{B \left(-r_o^{(\beta+n)} r_i^{\frac{n+k-2}{2}} + r_i^{(\beta+n)} r_o^{\frac{n+k-2}{2}} \right)}{r_i^{\frac{n+k-2}{2}} r_o^{\frac{n-k-2}{2}} - r_o^{\frac{n+k-2}{2}} r_i^{\frac{n-k-2}{2}}} \quad (23)$$

3. SONUÇLAR

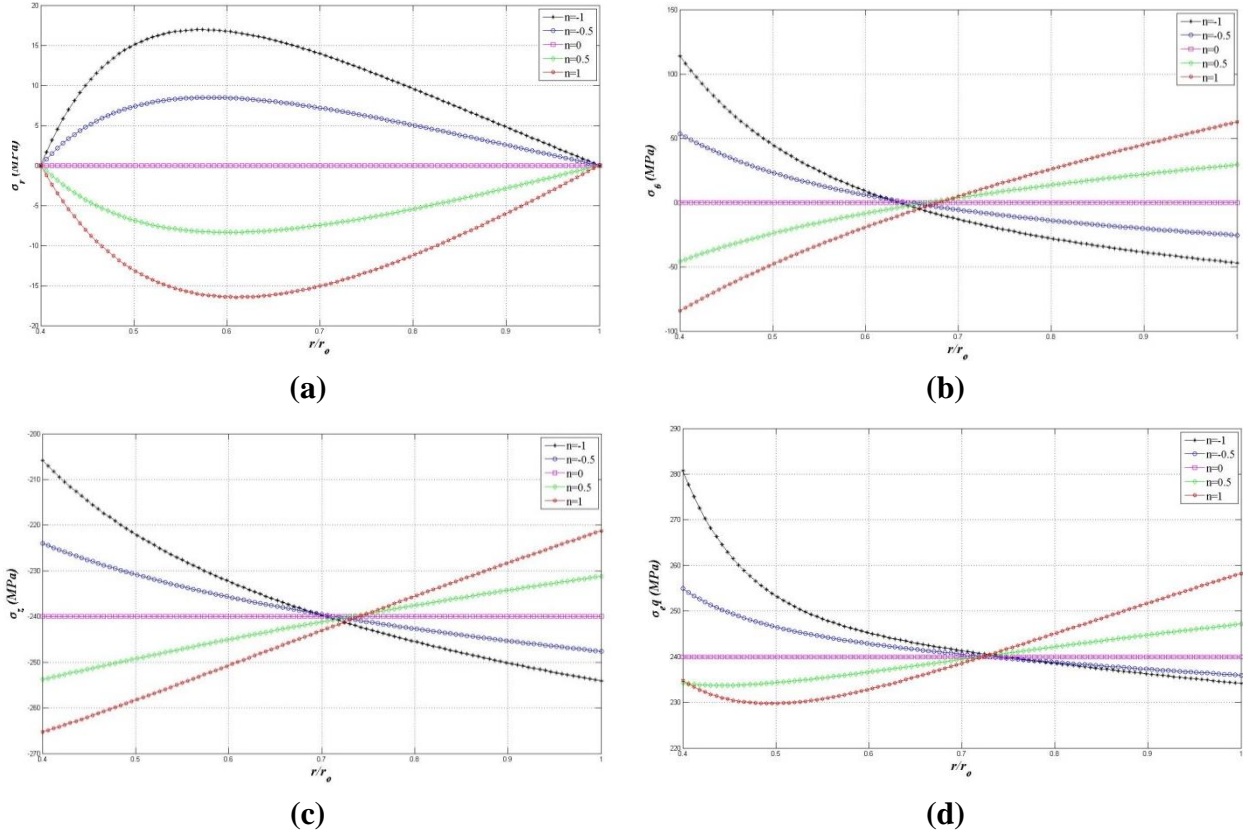
Sayısal sonuçlar için silindirin iç yarı çapı 40 mm, dış yarıçapı 100 mm, nominal elastisite modülü 200000 MPa ve nominal termal genleşme katsayısı $12 \times 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$ kullanılarak aşağıdaki sonuçlar analitik çözüm yöntemi ile elde edilmiştir. Şekil 1 a ve b'de sırasıyla boyutsuz elastisite modülü ve termal genleşme katsayısının yarıçap boyunca değişimi verilmiştir. Silindirin dış yüzeyinin bütün derecelendirme parametreleri için referans değere eşit olduğu gözükmemektedir. Şekilden de görüldüğü üzere elastisite modülü ile termal genleşme katsayısı ters orantılı olarak dağılım göstermektedir. Bu da genel metal matrisli kompozitlerdeki teori ile uyumlu olduğunu göstermektedir. Elastisite modülü derecelendirme parametresinin negatif değerleri Şekil 1 a'dan da görüleceği üzere, elastisite modülünün silindirin iç kısmından dış kısmına gittikçe azalması anlamına gelirken, termal genleşme katsayısının negatif derecelendirme parametresi değerlerinin bu durumun tam tersini oluşturduğunu Şekil 1 b'de açıkça göstermektedir.



Şekil 1: Boyutsuz malzeme özelliklerinin dağılımı a) elastisite modülü ve b) termal genleşme

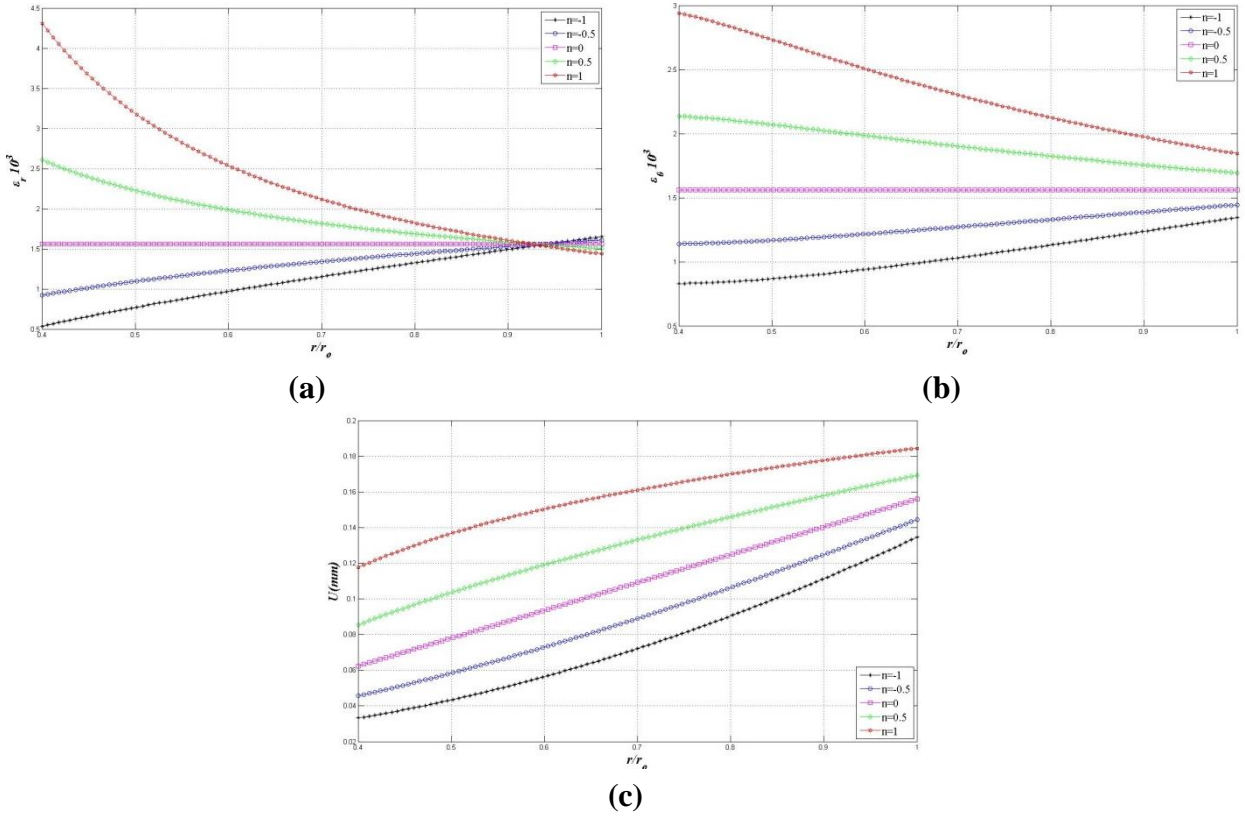
Uniform sıcaklığa maruz, uzun, içi boş fonksiyonel derecelendirilmiş silindirde oluşan radyal, teğetsel, aksenal ve eşdeğer gerilme dağılımları Şekil 2 a, b, c ve d'de sırasıyla gösterilmiştir. Şekil 2 a'da görüldüğü gibi radyal gerilme bileşenleri silindirin iç kısmında ve dış kısmında sıfırdır. Derecelendirme parametresi arttıkça gerilmelerin çeki durumundan bası durumuna geçtiği ve derecelendirme parametresinin sıfır olduğu, yani homojen malzemede

ise hem radyal hem de teğetsel gerilmenin oluşmadığı saptanmıştır. Maksimum radyal gerilme değeri silindirin iç kısmına daha yakın orta bölgede oluşmuştur. Homojen malzemede sadece aksel gerilme meydana gelmiştir. Aksel gerilmeler daima bası gerilmesi olarak meydana gelmiştir. Teğetsel gerilmeler ise Şekil 2 b’de görüldüğü gibi derecelendirme parametresinin negatif değerleri için silindirin iç kısmında çeki, dış kısmında bası gerilmesi iken, derecelendirme parametresinin pozitif değerleri için bu durumun tam tersi oluşmuştur.



Şekil 2: 100 °C uniform sıcaklığa maruz silindirde oluşan a) radyal, b) teğetsel, c) aksel ve d) eşdeğer gerilme dağılımı

Şekil 3’te ise uniform sıcaklığa maruz uzun içi boş fonksiyonel derecelendirilmiş slindirde oluşan radyal, teğetsel şekil değiştirmeler ile radyal yöndeki yer değiştirme dağılımı sırasıya a,b ve c’de gösterilmiştir. Şekil 3 a ve b’de görüldüğü gibi radyal ve teğetsel yöndeki şekil değiştirmeler derecelendirme parametresinin pozitif değerleri için silindirin iç kısmında maksimum, dış kısmına doğru azalan bir dağılım gösterirken, derecelendirme parametresinin negatif değerleri için ise iç yüzeyde minimum, dış yüzeye doğru artan ve dış yüzeyde maksimum şekil değiştirme meydana geldiği açıkça görülmektedir. Homojen malzeme için hem radyal hem de teğetsel yönde uniform bir şekil değiştirme olduğu tespit edilmiştir. Maksimum şekil değiştirmeler hem radyal hem de teğetsel yönde derecelendirme parametresinin en büyük değeri için silindirin iç kısmında meydana geldiği saptanmıştır. Şekil 3 c’de radyal yöndeki yer değiştirmelere bakıldığında ise silindirin iç yüzeyinden dış yüzeyine doğru arttığı görülmektedir. Maksimum radyal yöndeki yer değiştirme, derecelendirme parametresinin en büyük değeri için silindirin dış kısmında meydana geldiği Şekil 3c’de görülmektedir.



Şekil 3: 100 °C uniform sıcaklığa maruz silindirde oluşan a) radyal, b) teğetsel şekil değiştirmeler ve c) radyal yöndeki yer değiştirmeler.

ÖNERİLER

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış uniform sıcaklığa maruz içi boş silindirde oluşan termal gerilme dağılımı belirlenmiş ve derecelendirme parametresinin gerilme dağılımı üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Araştırmanın başlıca sonuçları aşağıda sıralanmıştır.

- Maksimum radyal gerilme değeri silindirin iç kısmına daha yakın orta bölgede oluşmuştur
- Derecelendirme parametresinin negatif değerleri için radyal gerilme çeki oluşurken pozitif değerleri için bası gerilmesi oluşmaktadır.
- Teğetsel gerilme, derecelendirme parametresinin negatif değerleri için silindirin iç kısmında çeki, dış kısmında bası gerilmesi iken derecelendirme parametresinin pozitif değerleri için bu durumun tam tersi durum oluşmuştur.
- Homojen malzemede sadece aksel gerilme oluşmuştur.
- Aksel gerilmeler daima bası gerilmesi olarak meydana gelmiştir.
- Maksimum radyal yöndeki yer değiştirme derecelendirme parametresinin en büyük değeri için silindirin dış kısmında oluşmuştur.

KAYNAKLAR

- [1] Kurşun, A., “Fonksiyonel Derecelendirilmiş Disklerin Elastoplastik Gerilme Analizi” Doktora Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Denizli, Türkiye, 2013.
- [2] Hirai, T. and Chen, L., “Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan” Materials Science Forum, 308–311, 509–514, 1999.
- [3] Chan, S.H., “Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine” International Journal of Thermal Science, 40, 255–261, 2001.
- [4] Uemura, S., “The activities of FGM on new applications” Materials Science Forum, 423–425, 1–10, 2003.
- [5] Dao, M., Gu, P., Maewal, A. and Asaro, R. J., “A Micromechanical Study of Residual Stresses in Functionally Graded Materials” Acta Metallurgica, 45(8), 3265-3276, 1997.
- [6] Kurşun, A., Topçu, M. and Tetik, T., “Stress Analysis of Functionally Graded Disc under Thermal and Mechanical Loads” Procedia Engineering, 10, 2949–2954, 2011.
- [7] Spencer, A. J.M., “A Stress Function Formulation For A Class Of Exact Solutions For Functionally Graded Elastic Plates” IUTAM Symposium on Transformation Problems in Composite and Active Materials, Hingham, MA, USA, Kluwer Academic Publishers, p.161, 1998.
- [8] Ha, S.K., Yoon, Y.B. and Han, S.C., “Effects of Material Properties on the Total Stored Energy of a Hybrid Flywheel Rotor” Archive of Applied Mechanics, 70(8–9), 571–584, 2000.
- [9] Oral, A. and Anlas, G., “Effects of radially varying moduli on stress distribution of nonhomogeneous anisotropic cylindrical bodies” Int. J. Solids Struct. 42, 5568–5588, 2005.
- [10] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., “Theory of Elasticity” 3rd Edition, McGraw Hill, New York-1970.