RICCATI DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ ANALİTİK BİR YÖNTEM VE DİNAMİK SİSTEMLERE UYGULANMASI

Yaşar Pala
Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Bursa

ABSTRACT

In this paper, the general Riccati equation is analytically solved by a new transformation. By the method developed, looking at the transformed equation, whether or not an explicit solution can be obtained is readily determined. Since the present method doesn't require a proper solution for the general solution, it is especially suitable for equations whose proper solutions cannot be seen at a first glance. Since the transformed second order linear equation obtained by the present transformation has the simplest form it can have, it is immediately seen whether or not the original equation can be solved analytically. The present method is also applied to the analytical solution of second order homogeneous differential equations with variable coefficients. The method is exemplified by several examples.

ÖZET

Bu çalışmada yeni bir dönüşüm yöntemi kullanılarak genel Riccati diferansiyel denklemi analitik olarak çözülmektedir. Geliştirilen yöntem sayesinde dönüşmüş denklemin yapısına bakılarak esas denklemin analitik olarak çözülüp çözülemeyeceği hemen belirlenebilmektedir. Yeni yöntem genel denklemin özel bir çözümünü gerektirmediğinden, özel çözümü ilk bakışta görülemeyen denklemler için özellikle uygundur. Dönüşmüş formdaki ikinci mertebe adi diferansiyel denklem olabilecek en basit forma sahip olduğu için esas denklemin analitik olarak çözülüp çözülemeyeceği hemen görülebilmektedir. Yeni yöntem kullanılarak bazı ikinci mertebe değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri de verilmektedir. Yöntem örneklerle açıklanmaktadır.

GİRİŞ

Genelleştirilmiş Riccati diferansiyel denklemi

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 - R(x) = 0 \tag{1}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ ler x'in keyfi fonksiyonlarıdır. Bu denkleme analitik mekanikte, kozmolojide, mühendislik alanında ve diğer uygulama alanlarında çok sık rastlanılmaktadır. Bu nedenle, $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ lerin yapısına bağlı olarak çok sayıda çözüm yöntemi geliştirilmeye çalışılınmıştır [1,2,3,4,5,6,7,8,9.10,11,12].

Eğer $R(x) = 0$ ise, o taktirde $y = 1/z$ dönüşümü (1) denklemini çözülebilir birinci mertebe bir diferansiyel denkleme indirmektedir. Bu haldeki denklem Bernoulli denklemi olarak bilinmektedir. $R(x) \neq 0$ olduğu hal için literatürde bir kaç yöntem bulunmaktadır [1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,12].

Gayri-homojen halde klasik Riccati denklemi $\bar{y} = y_0 + 1/y$ dönüşümü yapılarak çözülmektedir. Burada y_0 denklemi sağlayan özel bir çözümdür. Ancak, her zaman denklemin özel bir çözümünü bulmak mümkün değildir. Bu sebeple, bu yöntem ancak kurgusal problemlerin çözümü için anlamlı olabilir. Fiziksel olayların matematiksel modellenmesi sonucu elde edilen denklemin özel çözümünü görmek hemen hemen imkansızdır.

Çözüme yönelik diğer girişimler arasında Rao ve Allen-Stein dönüşümlerinden bahsedebiliriz[1,9]. Bu iki yöntemdeki temel fikir ana denklemi ayrıştırılabilir ve dolayısıyla integre edilebilir forma getirmektedir [1,7,9]. Bununla birlikte integre edilebilirlik şartı denklemin katsayıları arasında özel bir bağıntının olmasını şart koştuğu için bu yöntemler genel ve uygulanabilir olmaktan uzaktırlar.

Harko, Lobo ve Mak; Riccati denklemin çözümü araştırdılar ve kısıt içeren bir yöntem ortaya koydular. Bu yöntem de pratik olarak uygulanabilir değildir[2]. Yöntem denklemin katsayıları arasında özel şartları zorunlu kıldığı için genel bir çözüm yöntemi söz konusu değildir. Sugai yeni bir dönüşüm vasıtasıyla Riccati denklemini ikinci mertebeden yeni bir diferansiyel denkleme dönüştürdü. Dönüşmüş denklem çok daha karmaşık ve çoğu hallerde çözülemez olduğundan, bu yöntem de genel ve uygulanabilir değildir[12]. Rao ve Ukidave; Riccati denklemini sınırlı şartlar altında ayrıştırılabilir forma indirgedi [10]. Bu çalışmanın mühendislik uygulamaları açısından bir önemi bulunmamaktadır. Siller denklemin ayrıştırılabilirlik şartlarını inceledi[11].

Riccati denkleminin integre edilebilirlik durumu Mak and Harko tarafından tekrar ele alınmış ve analitik çözüm için yeni bir yöntem verilmiştir[5]. Mortici sabitlerin değişimi yöntemini önermiş ve denklemi ayrıştırılabilir hale getirmeye çalışmıştır. Bu yöntem de çözüm üzerine birçok sınırlama yüklemektedir. O nedenle, genel bir yöntem değildir[6].

Bütün bu yöntemler incelendiğinde analitik çözümün açık, kapalı ya da kuvvet serileri formunda elde edilip edilemeyeceği ortaya koyacak genel bir yöntemin olmadığını görmekteyiz. Yeni yöntem $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ ler üzerinde hiç bir kısıt olmadan denklemin çözümünü verirken bu soruların cevaplarını da bulmaktadır.

1.1. Özel Tip Riccati Denklemi

(1) denklemini çözmek için

$$\bar{y} = f(x)e^{\int g(x)y(x)dx} \tag{2}$$

şeklinde yeni bir dönüşüm önerelim. Burada $f(x)$, $g(x)$ fonksiyonları uygun bir şekilde belirlenecek olan fonksiyonlardır. (2) denkleminin her iki tarafını iki kez üst üste türetelim:

$$\bar{y}' = (f' + fgy)e^{\int g(x)y(x)dx} \tag{3}$$

ve

$$\bar{y}'' = (fgy' + 2f'gy + fg'y + fg^2y^2 + f'')e^{\int g(x)y(x)dx} \tag{4}$$

(4) denklemi

$$y' + \left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right]y + gy^2 + \frac{f''}{fg} = \frac{1}{fg}\bar{y}''e^{-\int g(x)y(x)dx} \tag{5}$$

olarak düzenlenebilir. (5) denkleminin sağ tarafının Riccati denklemi tipinde olduğuna dikkat edelim. (1) ve (5) denklemlerini mukayese ederek

$$\left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] = P(x) \tag{6a}$$

$$g(x) = Q(x) \tag{6b}$$

$$\frac{f''}{fg} = -R(x) \tag{6c}$$

elde ederiz. Eğer

$$y' + \left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right]y + gy^2 + \frac{f''}{fg} = 0 \tag{7}$$

formunda bir denklemi çözmek istiyorsak, o taktirde, (5) denklemi gereği, ilk etapta

$$\bar{y}'' = 0 \;\rightarrow\; \bar{y} = ax + b \tag{8}$$

kabul edebiliriz. f ve g fonksiyonları (6) denklemleri sağlanacak şekilde belirleneceklerdir. Şimdi (2) denkleminden ters dönüşüme geçerek

$$y = \frac{1}{g}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{\bar{y}}{f}\right) \tag{9}$$

elde ederiz. Basit tipteki Riccati denklemi halinde çözümün çok basit şekilde elde edilebildiğine dikkat edelim. Diğer bir ifadeyle ikinci mertebeden karmaşık ,değişken katsayılı bir diferansiyel denklemin çözümü yapılmadan doğrudan (8) ve (9) denklemlerinden elde edilmektedir. Aşağıdaki dört örnek yöntemi açıklamaktadır.

Örnek 1: Öncelikle en basit formdaki sabit katsayılı

$$y' + 2y + y^2 + 1 = 0 \tag{10}$$

Riccati diferansiyel denklemini çözmeye çalışalım. Bu denklem doğrudan integre edilerek te çözülebilir. (10) denklemi (7) denklemi ile mukayese edilerek

$$\left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] = 2 \tag{11a}$$

$$g = 1 \tag{11b}$$

$$\frac{f''}{fg} = 1 \tag{11c}$$

elde edilir. (11a) denkleminde $g = 1$ yerleştirip denklem çözülerek

$$f = ce^x \tag{12}$$

bulunur. (11c) denklemi kendiliğinden sağlanmaktadır. Şimdi (9) denklemini kullanarak

$$y = \frac{1}{g}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{\bar{y}}{f}\right) = \frac{1}{1}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{ax+b}{ce^x}\right) \tag{13}$$

ya da

$$y = \frac{1}{x+\bar{c}} - 1\,, \quad \bar{c} = b/a \tag{14}$$

elde ederiz. (14) denkleminin (10) denklemini sağladığı görülebilir.

Örnek 2 : Şimdi değişken katsayılı

$$y' + 5xy + y^2 + \frac{25}{4}x^2 + \frac{5}{2} = 0 \tag{15}$$

denklemini çözmek isteyelim. (15) denklemi (7) denklemi ile mukayese edilerek

$$\left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] = 5x \tag{16a}$$

$$g = 1 \tag{16b}$$

$$\frac{f''}{fg} = \frac{25}{4}x^2 + \frac{5}{2} \tag{16c}$$

olması gerektiği görülür. f fonksiyonu (16a) ve(16b) denklemleri kullanılarak bulunabilir.

$$f = ce^{\frac{5}{4}x^2} \tag{17}$$

(9) denklemini kullanarak

$$y = \frac{1}{g}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{\bar{y}}{f}\right) = \frac{1}{1}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{ax+b}{ce^{\frac{5}{4}x^2}}\right) \tag{18}$$

ya da

$$y = \frac{1}{(x+\bar{c})} - \frac{5}{2}x, \qquad \bar{c} = b/a \tag{19}$$

buluruz. (19) denklemi (15) denklemini analitik çözümüdür.

Örnek 3: Aşağıdaki biraz daha karmaşık formdaki denklemi çözmek isteyelim.

$$y' + 2xy + x^2y^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4} + 1 = 0 \tag{20}$$

(20) denkleminin (7) denklemi ile mukayesesi

$$\left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] = 2x \tag{21a}$$

$$g = x^2 \tag{21b}$$

$$\frac{f''}{fg} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4} + 1 \tag{21c}$$

verir. f fonksiyonu kolaylıkla

$$f = \frac{c}{x}e^{\frac{x^2}{2}} \tag{22}$$

formunda elde edilebilir. (9) denklemini kullanarak

$$y = \frac{1}{g}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{\bar{y}}{f}\right) = \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{ax+b}{cx^{-1}e^{\frac{x^2}{2}}}\right) \tag{23}$$

ya da

$$y = \frac{1}{x^2(x+\bar{c})} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \qquad \bar{c} = b/a \tag{24}$$

elde ederiz. Yukarıdaki örneklerin her birinde $\bar{R}(x) = f''/fg$ şartının doğrudan sağlandığı örnekler seçildi. Aksi taktirde, bilinmeyen $f(x)$ fonksiyonunun

$$\bar{P}(x) = \left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] \tag{25a}$$

$$\bar{Q}(x) = g \tag{25b}$$

$$\bar{R}(x) = \frac{f''}{fg} \tag{25c}$$

denklemleri aynı anda sağlanacak şekilde belirlenmesi gerekecekti. Oysa, (25a) ve (25c) denklemleri aynı anda sağlanacak şekilde $f(x)$ fonksiyonu her zaman bulabilmek mümkün değildir. Bu durumu açıklamak üzere aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek 4:

$$y' + \alpha x^2 y + \beta x y^2 + \bar{R}(x) = 0 \tag{26}$$

denklemini çözmeye çalışalım. (25a) ve (25b) denklemlerini kullanarak

$$\left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] = \alpha x^2 \tag{27a}$$

$$g = \beta x \tag{27b}$$

yazabiliriz. f fonksiyonu

$$f = c x^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\alpha x^3}{6}} \tag{28}$$

olarak elde edilebilir. Bu takdirde

$$\bar{R}(x) = \frac{f''}{fg} = \frac{\alpha^2}{4\beta} x^3 + \frac{3}{4\beta} x^{-3} + \frac{\alpha}{2\beta} \tag{29}$$

elde ederiz. Bilahare, yeni yöntem (29) ile verilen şart sağlandığı sürece çözüm verebilmektedir. Bu halde (24) denklemi

$$y' + \alpha x^2 y + \beta x y^2 + \frac{\alpha^2}{4\beta} x^3 + \frac{3}{4\beta} x^{-3} + \frac{\alpha}{2\beta} = 0 \tag{30}$$

formunu alır. Analitik çözümün

$$y = \frac{1}{g}\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{\bar{y}}{f}\right) = \frac{1}{\beta x}\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{ax+b}{c.x^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\alpha x^3}{6}}}\right) \tag{31}$$

ya da

$$y = \frac{1}{\beta x (x + \bar{c})} - \frac{\alpha x}{2\beta} + \frac{1}{2\beta x^2} \qquad \bar{c} = b/a \tag{32}$$

şeklinde olacağı kolaylıkla gösterilebilir.

1.2. Genel Tip Riccati Denklemi

(2) dönüşümü (1) denklemindeki $Q(x)$ teriminin serbest seçimini önlemektedir. O nedenle, yöntem ancak özel tipteki Riccati denklemlerinin çözümü için uygun olabilir. Şimdi keyfi $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ leri içeren genel tipteki bir Riccati denklemini çözmek için bu kısıtı kaldırmak istiyoruz. Yine

$$\bar{y} = f(x) e^{\int g(x) y(x) dx} \tag{33}$$

dönüşümünü ele alalım. (33) denklemini iki kez türeterek

$$\bar{y}' = (f' + fgy) e^{\int g(x) y(x) dx} \tag{34}$$

ve

$$\bar{y}'' = (fgy' + 2f'gy + fg'y + fg^2 y^2 + f'') e^{\int g(x) y(x) dx} \tag{35}$$

buluruz. (35) denklemi

$$y' + \left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] y + g y^2 + \frac{f''}{fg} = \frac{1}{fg} \bar{y}'' e^{-\int g(x) y(x) dx} \tag{36}$$

olarak ta yazılabilir. Böl.1.1. deki kısıtlamayı kaldırmak için

$$y' + \left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] y + gy^2 + \frac{f''}{fg} = S(x) \tag{37}$$

formundaki bir denklemin çözümünü aradığımızı düşünelim. Burada $S(x)$ belirlenmesi gerekli bir sabittir. Bilahare, (36) denklemi

$$\bar{y}'' = fgS(x)e^{\int g(x)y(x)dx} \tag{38}$$

Verir. Ancak, (33) denklemi gereği

$$\bar{y}'' = gS(x)(\bar{y}) \tag{39}$$

yazabiliriz. $\bar{y}$ değişkenini $u(x)$ ile değiştirerek

$$u'' - gSu = 0 \tag{40}$$

elde ederiz (40) denklemi genel çözümü kuvvet serileri şeklinde elde edilebilen ikinci mertebe lineer bir adi diferansiyel denklemdir. Ancak, eğer gS terimi bir sabit ise ya da (40) denkleminin analitik çözümünü bulabileceğimiz bir ifade ise, ancak o zaman u ya da y nin açık formu daima bulunabilir.

Şimdi dikkatlerimizi (40) denklemine çevirmeliyiz. Bu sonuca göre (33) ile verilen dönüşümün esas avantajlarından birinin denklemi doğrudan doğruya lineer ve en basit formdaki (40) denklemin dönüştürmesi olduğunu görmekteyiz. Gerçekten de (40) denklemi olabilecek en basit formdur. Bu form bize (37) denkleminin çözülebilir olup olmadığını hemen söylemektedir. (40) denklemi klasik yöntemlerle çözüldükten sonra ters dönüşüm, çözümü

$$y = \frac{1}{g(x)}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{u(x)}{f(x)}\right) \tag{41}$$

olarak verir. (41) denklemi integre edilecek herhangi bir terim içermediği için $y(x)$ çözümünü açık formda bulmada herhangi bir sorun bulunmamaktadır.

Örnek 5: İlk örnek olarak

$$y' + 2xy - y^2 - (1 + x^2) = 0 \tag{42}$$

denklemini ele alalım. (42) ve (37) denklemlerini mukayese ederek

$$g = -1 \tag{43a}$$

$$\left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] = 2x \tag{43b}$$

$$\frac{f''}{fg} = -(1+x^2) \;, \quad S(x) = 0 \tag{43c}$$

buluruz. (43a) ve (43b) denklemlerinin ortak çözümü $f = ce^{x^2/2}$ (c=sabit) verir ve f''/fg nin doğrudan $R(x)$ terimine eşit olduğunu görebiliriz. Şu halde, $S(x)$ sıfır olarak alınabilir. Bu ise $\bar{y}'' = 0$ olması demektir. $\bar{y}$ nın çözümü $\bar{y} = ax + b$ ile verilir. Bu sonucu ters dönüşümde yerine koyarak birkaç işlem neticesinde

$$y = x - \frac{1}{x+\bar{c}} \quad (\bar{c} = \text{sabit}) \tag{44}$$

elde ederiz. (44) sonucunun (42) denklemini sağladığı görülebilir.

Örnek 6:

$$y' + 8xy + 4y^2 + 4x^2 - 3 = 0 \tag{45}$$

denkleminin çözümünü arayalım.(37) ve (45) denklemlerinden

$$g = 4 \tag{46a}$$

$$\left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] = 8x \tag{46b}$$

elde ederiz. (46a) ve (46b) denklemlerin ortak çözümü $f = ce^{2x^2}$ verir. (c=sabit). Diğer şart

$$\frac{f''}{fg} = 4x^2 + 1 \;, \quad S(x) = 4 \tag{47}$$

verir. Dönüşmüş denklem bu halde

$$u'' - 16u = 0 \tag{48}$$

formunu alır. (48) denklemin karakteristik denklemi

$$m^2 - 16 = 0 \tag{49}$$

şeklinde olup, kökleri $m_1 = 4$ ve $m_2 = -4$ dır. Bilahare (48) denkleminin çözümü

$$u = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x} \tag{50}$$

formunu alır. (41) denklemi kullanılarak $y(x)$ çözümü

$$y = \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{u(x)}{f(x)} \right) = \frac{1}{4} \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x}}{c e^{2x^2}} \right) \tag{51}$$

$$y = \frac{c_1 e^{4x} - c_2 e^{-4x}}{c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x}} - x \tag{52}$$

şeklinde elde edilir.

$$y = \frac{e^{8x} - \bar{c}}{e^{8x} + \bar{c}} - x \quad , \quad (\bar{c} = c_2 / c_1) \tag{53}$$

olduğu gerçeklenebilir. u'nun çözümü olarak $c_1 e^{4x}$ aldığımızda $y_p = 1 - x$ özel çözümünü elde ederiz. İlaveten, sadece $c_2 e^{-4x}$ aldığımızda (44) denkleminin özel çözümünü $y_p = -1 - x$ olarak elde ederiz. Gerçekten de bu çözümlerin (45) denkleminin özel çözümleri olduklarını gösterebiliriz. Şu halde, sunulan yöntem Riccati denkleminin özel çözümlerini de vermektedir. İstenildiğinde genel çözümün elde edilmesinde bu noktadan meşhur $y = \bar{S}(x) + 1/x$ dönüşümü de kullanılabilir. Burada $\bar{S}(x)$ özel çözümdür.

Örnek 7: Aşağıdaki diferansiyel denklemi çözmeye çalışalım.

$$y' + \left(4 - \frac{1}{x}\right) y + \frac{1}{x} y^2 - x^2 + 4x = 0 \tag{54}$$

Bu denklemin özel çözümünün hemen görülemediğine dikkat edelim. O sebeple, bilinen klasik yöntem kullanılamaz. Aşağıdaki denklemlerin geçerli olacağı aşikardır.

$$g = \frac{1}{x} \tag{55a}$$

$$\left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g} \right] = 4 - \frac{1}{x} \tag{55b}$$

(55a) ve (55b) denklemlerinin çözümü $f = ce^{2x}$ verir (c=sabit). Şimdi (37) denkleminden

$$\frac{f''}{fg} = 4x \tag{56}$$

olduğuna dikkat ederek $S(x)$ ifadesini

$$\frac{f''}{fg} - S(x) = -x^2 + 4x \;\Rightarrow\; 4x - S(x) = -x^2 + 4x \;\Rightarrow\; S(x) = x^2 \tag{57}$$

olarak elde ederiz. Buna göre (40) denklemi

$$u'' - xu = 0 \tag{58}$$

formunu alır. (58) denklemi Airy denklemidir ve çözümü

$$\bar{y} = u = c_1 AiryAi(x) + c_2 AiryBi(x) \tag{59}$$

ile verilir. Burada $AiryAi(x)$ ve $AiryBi(x)$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} AiryAi(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2.3.5.6\ldots(3n-3).(3n-1).3n}, \quad AiryBi(x) \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3.4.6.7\ldots(3n-2).3n.(3n+1)} \end{aligned} \tag{60}$$

olarak verilirler. Bu fonksiyonların türevleri

$$\begin{aligned} (AiryAi(x))' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{2.3.5.6\ldots(3n-3).(3n-1)}, \quad (AiryBi(x))' \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3.4.5.6.7\ldots(3n-2).3n} \end{aligned} \tag{61}$$

şeklindedirler. Buna göre ters dönüşüm formülünü kullanarak

$$y = x\left(\frac{\left(AiryAi(x)\right)' + c\left(AiryBi(x)\right)'}{AiryAi(x) + cAiryBi(x)} - 2\right) \tag{62}$$

elde ederiz. Burada c bir sabittir.

Örnek 8 : Mortici [6] tarafından verilen

$$y' - \frac{\beta}{x}y - \alpha y^2 - \frac{\gamma}{x^2} = 0 \tag{63}$$

denklemini ele alalım. (37) ve (63) denklemlerini mukayese ederek

$$g = -\alpha \tag{64a}$$

$$\left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] = -\frac{\beta}{x} \tag{64b}$$

buluruz. (64a) ve (64b) denklemlerin çözümü $f = cx^{-\beta/2}$ verir (c=sabit). (37) ifadesinden

$$\frac{f''}{fg} = \frac{-(\beta^2 + 2\beta)}{4\alpha}\frac{1}{x^2} \tag{64c}$$

olduğuna dikkat ederek $S(x)$ ifadesini

$$\frac{f''}{fg} - S(x) = -\frac{\gamma}{2} \Rightarrow \frac{-(\beta^2 + 2\beta)}{4\alpha}\frac{1}{x^2} - S(x) = -\frac{\gamma}{2} \tag{65}$$

$$S(x) = (\gamma - \frac{(\beta^2 + 2\beta)}{4\alpha})\frac{1}{x^2} \tag{66}$$

olarak buluruz. (40) denklemini kullanarak aşağıdaki dönüşmüş denklemi elde ederiz.

$$u'' - (-\alpha)(\gamma - \frac{(\beta^2 + 2\beta)}{4\alpha})\frac{1}{x^2}\, u = 0 \tag{67}$$

$$u'' + (\frac{4\gamma\alpha - (\beta^2 + 2\beta)}{4})\frac{1}{x^2}\, u = 0 \tag{68}$$

Bu noktadan sonra aşağıdaki halleri düşünelim:

Hal 1: $4\gamma\alpha = (\beta^2 + 2\beta)$ kabul edecek olursak, bu haldeki dönüşmüş denklem

$$u'' = 0 \tag{69}$$

şeklini alır. u formu $u = ax + b$ şeklinde elde edilir. Buna göre (41) denklemi

$$y = \frac{1}{g}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{u}{f}\right) = -\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{ax + b}{cx^{-\beta/2}}\right) \tag{70}$$

ya da

$$y = \frac{-1}{\alpha(x + \bar{c})} - \frac{\beta}{2\alpha x} \qquad \bar{c} = b/a \tag{71}$$

verir.

Hal 2: Genel bir hal olarak $4\gamma\alpha \neq (\beta^2 + 2\beta)$ kabul edecek olursak, o zaman $k = \frac{4\gamma\alpha - (\beta^2 + 2\beta)}{4}$ =sabit koyabiliriz. Bu haldeki dönüşmüş denklem

$$u'' + \frac{k}{x^2}\,u = 0 \tag{72}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem

$$u'' + \frac{A}{x}u' + \frac{B}{x^2}\,u = 0 \tag{73}$$

genel formuna sahip Euler-Cauchy denkleminin özel halidir. Bu denklem

$$Y'' + (A-1)Y' + BY = 0 \quad , \quad (A = 0\,, B = k) \tag{74}$$

şeklinde sabit katsayılı lineer bir denkleme dönüştürülebilir. (74) ün karakteristik denklemi

$$m^2 - m + k = 0 \tag{75}$$

şeklindedir. Kökler m_1 ve m_2 olsun. m_1 ve m_2 kökleri reel, kompleks ya da katlı olabilir. Çözüm formu köklerin tiplerine bağlıdır.

Hal a : Eğer $(1-4k) > 0$ ise, o taktirde $m_1 \neq m_2$ ve $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$. dır. $m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4k}}{2}$

olup, $u(x)$ nun bu haldeki çözümü

$$u = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} \tag{76}$$

dır. Buna göre $y(x)$ nın çözümü

$$y = \frac{1}{g}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{u}{f}\right) = -\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}}{c x^{-\beta/2}}\right) \tag{77}$$

ya da

$$y = -\frac{1}{\alpha x}\left(\frac{c_1 m_1 x^{m_1} + c_2 m_2 x^{m_2}}{c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}} + \frac{\beta}{2}\right) \tag{78}$$

veyahut ta

$$y = -\frac{1}{\alpha x}\left(\frac{m_1 x^{m_1} + \bar{c} m_2 x^{m_2}}{x^{m_1} + \bar{c} x^{m_2}} + \frac{\beta}{2}\right) \qquad \bar{c} = c_2/c_1 \tag{79}$$

olarak elde edilir.

Hal b: Eğer $(1-4k) = 0$ ise, $m_1 = m_2 = m$, $m \in \mathbb{R}$ dır. Katlı kök $m = \frac{1}{2}$ dır.

$u(x)$ nun çözümü

$$u = c_1 x^m + c_2 x^m \ln x \tag{80}$$

dır. Bu halde çözüm

$$y = \frac{1}{g}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{u}{f}\right) = -\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{c_1 x^m + c_2 x^m \ln x}{c x^{-\beta/2}}\right) \tag{81}$$

ya da

$$y = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{c_1 m x^{m-1} + c_2 x^{m-1}(1 + m \ln x)}{c_1 x^m + c_2 x^m \ln x} + \frac{\beta}{2x}\right) \tag{82}$$

veyahut ta

$$y = -\frac{1}{2\alpha x}\left(1 + \frac{2}{\bar{c} + lnx} + \beta\right) \qquad m = 1/2 \;\; and \;\; \bar{c} = c_1/c_2 \tag{83}$$

şeklinde elde edilir. Sonucu

$$y = -\frac{\beta + 1}{2\alpha x} - \frac{1}{x(\alpha\bar{c} + \alpha \ln x)} \tag{84}$$

olarak ta yazabiliriz. (84) denklemi ile verilen sonucun Mortici [6] tarafından verilen çözümün aynısı olduğuna dikkat edilmelidir.

Hal c : $m_1, m_2 \notin \mathbb{R}$, $m_1 = a + bi$ ve $m_2 = a - bi$ olsun. Burada $i = \sqrt{-1}$ dır. Bu halde $u(x)$ çözümü

$$u = e^{-ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) \tag{85}$$

dır. Şu halde, ters dönüşüm formülü kullanılarak y(x)

$$y = \frac{1}{g}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{u}{f}\right) = -\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{e^{-ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)}{c x^{-\beta/2}}\right) \tag{86}$$

ya da

$$y = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{(b\bar{c} - a)\cos bx - (a\bar{c} + b)\sin bx}{\cos bx + \bar{c}\sin bx} + \frac{\beta}{2x}\right) \quad , \quad \bar{c} = c_2/c_1 \tag{87}$$

şeklinde edilir.

Örnek 9: 'Füzenin Hareketi '

Kütlesi değişen ve hava direncine maruz bir füzenin hareketini incelemek isteyelim. Yüksek hızda seyreden bir füze üzerine hızın karesi ile orantılı bir direnç kuvveti gelir : $F_d = c_d v^2$. Burada c_d direnç katsayısıdır. Füze motorunun itme kuvveti F_t olsun. Yatay seyir halindeki füze için hareket denklemini yazarak

$$\sum F = \frac{d(mv)}{dt} \Rightarrow F_t - F_d = \frac{d(mv)}{dt} \tag{88}$$

buluruz. (88) denklemini açıp düzenleyerek

$$\frac{dv}{dt} - \frac{\dot{m}}{m}v + \frac{c_d}{m}v^2 - \frac{F_t}{m} = 0 \tag{89}$$

elde ederiz. Bu bir Riccati denklemidir. Bu denklem (11) denklemleri ile mukayese edilerek

$$\left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] = -\frac{\dot{m}}{m} \tag{90a}$$

$$g = \frac{c_d}{m} \tag{90b}$$

$$\frac{f''}{fg} - S(t) = -\frac{F_t}{m} \tag{90c}$$

elde edilir. (90a) denklemi (90b) de yerine konularak $f = c =$sabit elde edilir. Bu sonuç ile (90c) denklemine müracaat ederek $S(t) = F_t/m$ buluruz. $S(t)$ ve g fonksiyonlarını (40) denkleminde yerine yazarak

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \left(\frac{F_t}{m}\right)\left(\frac{c_d}{m}\right)u = 0 \tag{91}$$

Füzenin başlangıç kütlesinin M olduğunu ve yakıtı a (kg/s) oranında tükettiğini kabul edelim. Buna göre herhangi bir andaki kütle $m(t) = M - at$ olacaktır. Buradan $\dot{m} = -a, \ddot{m} = 0$ elde ederiz. Füzenin F_t itme kuvvetinin sabit olduğunu kabul ederek (91) denkleminden

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \left(\frac{F_t c_d}{(M-at)^2}\right)u = 0 \tag{92}$$

elde ederiz. Bu denklemin çözümü

$$u = c_1(M-at)^{\frac{a+\sqrt{a^2+4F_t c_d}}{2a}} + c_2(M-at)^{\frac{a-\sqrt{a^2+4F_t c_d}}{2a}} \tag{92}$$

şeklinde elde edilir. Burada c_1, c_2 bulunması gerekli sabitlerdir. Şimdi çözüm için (41) ifadesine başvurularak

$$v = \frac{m}{c_d}\frac{d}{dt}\left(ln \frac{c_1(M-at)^{\frac{a+\sqrt{a^2+4F_t c_d}}{2a}} + c_2(M-at)^{\frac{a-\sqrt{a^2+4F_t c_d}}{2a}}}{c} \right) \tag{93}$$

sonucu elde olunur. $k_1 = \frac{a+\sqrt{a^2+4F_t c_d}}{2a}, k_2 = \frac{a-\sqrt{a^2+4F_t c_d}}{2a}$, $\bar{c} = c_2/c_1$ kısaltmalarını yaparak

$$v = \frac{a}{c_d}\left(\frac{-k_1-\bar{c}k_2(M-at)^{k_2-k_1}}{1+\bar{c}(M-at)^{k_2-k_1}}\right) \tag{94}$$

buluruz.

$$\in = k_2 - k_1 = \frac{\sqrt{a^2+4F_t c_d}}{a},\ \beta = \frac{\left(\frac{v_0 c_d}{a}+k_1\right)}{\left(\frac{v_0 c_d}{a}+k_2\right)}, \emptyset(t) = \left(\frac{(M-at)}{M}\right) \tag{95}$$

kısaltmaları (94) denklemini

$$v = \frac{a}{c_d}\left(\frac{\in}{1-\beta\emptyset^{\epsilon}} - k_2\right) \tag{96}$$

basit formuna indirger. Konum fonksiyonu (96) denkleminin integrasyonudur. Sonuçları Tomahawk füzesinin verilerini kullanarak değerlendirelim. Füzenin ilk ağırlığı 1440 kg olup, yakıt 0.056 kg/s oranında tüketilmektedir. c_d=0.04 dır. Kalkıştan sonra sabitlenen füze itme kuvveti 2400 N dur. 75 dak. havada duran füzenin maksimum hızını ve uçuş menzilini bulmak isteyelim. Verilen değerler halinde $\in = -349.9285$, $\beta = -1.0057$, $\emptyset(t) = 0.825$ (*t*=75 dak. anındaki değer) bulunur. Bu değerleri (96) denkleminde kullanarak *v*=882.94 km/h elde ederiz. Bu değer füze için öngörülen 890 km/h değerine çok yakındır. (96) denklemi sayısal olarak integre edilerek menzil *R*=1085 km olarak bulunur. Yine bu değer de füze için öngörülen 1104 km değerine çok yakındır.

1.3. İkinci Mertebe Değişken Katsayılı Homojen Denklemlere Uygulama

İkinci mertebe diferansiyel denklemlerin Riccati denklemine dönüştürülebildiği bilinmektedir. Riccati denkleminin genel çözümü bilinmediği için bu yöntem çok başarılı değildir. Ancak, Pala ve Ertas [8] tarafından önerilen yöntem kullanılarak ikinci mertebe değişken katsayılı homojen denklemlerin önemli bir kısmı çözülebilir.

$y = e^{\int v dx}$ dönüşümü altında

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{97}$$

homojen denklemi

$$v' + P(x)v + v^2 = -Q(x) \tag{98}$$

Riccati denklemine dönüştürülebilir. (2) dönüşümü yardımıyla

$$y' + P(x)y + Qy^2 = R(x) \tag{99}$$

formundaki Riccati denkleminin

$$y' + \left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right]y + gy^2 + \frac{f''}{fg} = \frac{1}{fg}\bar{y}''e^{-\int gy dx} \tag{100}$$

ifadesine dönüştürülebildiğini biliyoruz. Burada f, g ve $\bar{y}$ ler belirlenmeleri gerekli fonksiyonlardır. (99) ve (100) denklemlerini mukayese ederek

$$\left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] = P(x), \tag{101a}$$

$$g(x) = Q(x), \tag{101b}$$

$$\frac{f''}{fg} = R(x) \tag{101c}$$

buluruz.

$$y' + \left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right]y + gy^2 + \frac{f''}{fg} = 0 \tag{102}$$

formundaki bir denklemin çözümünü aradığımız için ilk etapta

$$\bar{y}'' = 0 \to \bar{y} = ax + b \tag{103}$$

kabul edebiliriz. f ve g fonksiyonları (101) denklemleri sağlanacak şekilde bulunacaklardır. (41) ters dönüşümü ile denklemin çözümü elde edilir.

Örnek 10:

$$y'' + 5xy' + \left(\frac{25}{4}x^2 + \frac{5}{2}\right)y = 0 \tag{104}$$

denklemini çözmek isteyelim. $y = e^{\int v dx}$ dönüşümü (104) denklemini

$$v' + 5xv + v^2 + \left(\frac{25}{4}x^2 + \frac{5}{2}\right) = 0 \tag{105}$$

formuna indirger. (105) denklemini (6) denklemleri ile karşılaştırarak

$$\left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] = 5x, \tag{106}$$

$$g(x) = 1, \tag{107}$$

$$\frac{f''}{fg} = \left(\frac{25}{4}x^2 + \frac{5}{2}\right) \tag{108}$$

buluruz. (106a) ve (106b) denklemlerinin ortak çözümü $f = ce^{\frac{5}{4}x^2}$ verir. Ters dönüşüm formülü

$$v = \left(\frac{1}{x+c} - \frac{5}{2}x\right), \qquad c = \text{sabit} \tag{109}$$

verir. Son olarak $y = e^{\int v dx}$ dönüşümünü hatırlayarak

$$y = c_2(x+c)e^{-\frac{5}{4}x^2}, \qquad c, c_2 = \text{sabitler} \tag{110}$$

elde ederiz.

Örnek 11:

$$y'' + 8xy' + (16x^2 + 4)y = 0 \tag{111}$$

denklemini çözmek isteyelim. $y = e^{\int v dx}$ dönüşümü (111) denklemini

$$v' + 8xv + v^2 + (16x^2 + 4) = 0 \tag{112}$$

şekline indirger. (112) ve (100) denklemleri karşılaştırılarak

$$\left[\frac{2f'}{f} + \frac{g'}{g}\right] = 8x, \tag{113a}$$

$$g(x) = 1, \tag{113b}$$

$$\frac{f''}{fg} = (16x^2 + 4) \tag{113c}$$

bulunur. (113) denklemlerinin ilki $f = ce^{2x^2}$ verir. (113c) denklemi kendiliğinden sağlanmaktadır. Şu halde, ters dönüşüme geçerek

$$v = \left(\frac{1}{x+c} - 4x\right), \qquad c = \text{sabit} \tag{114}$$

elde ederiz. Son olarak $y = e^{\int v dx}$ dönüşümünü hatırlayarak

$$y = c_2(x+c)e^{-2x^2}, \qquad c, c_2 = \text{sabitler} \tag{115}$$

elde ederiz.

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada yeni bir dönüşüm yardımıyla Riccati denkleminin analitik çözümünü inceledik. İki ayrı yöntem sunuldu. İlk yöntemde özel tipteki denklemler halinde çözüm doğrudan elde edilirken ikinci yöntem de en genel forma sahip Riccati denklemi aynı dönüşüm yardımıyla ikinci mertebeden en basit forma sahip lineer bir denkleme dönüştürülmüş ve bu denklemin çözümleri de araştırılmıştır. Elde edilen denklemde gS nin formuna bakarak çözümün açık ya da kapalı formda elde edilip edilemeyeceği görülebilmektedir. Yeni yöntem denklemlerin özel çözümlerini elde etmenin yollarını sunduğu için bilinen klasik yöntemin genel bir yönteme dönüşmesine de imkan tanımaktadır. Son olarak yöntem ikinci mertebe değişken katsayılı homojen denklemlerin çözümlerine uygulanmıştır.

REFERANSLAR

[1] Allen, J.L. and Stein, E.M, On the Solution of Certain Riccati Equations, The American Math.Montly, U.S.A., pp.1113-1115, 1964.
[2] Harko, T., Lobo, F.S.N., and Mak, M.K., Analytical Solution of the Riccati Equation with Coefficients Satisfying Integral or Differential Conditions with Arbitrary Functions, Universal Journal of Applied Mathematics, Vol.2, U.S.A., pp.109-118, 2014.
[3] Ince, E.L., Ordinary Differential Equation, ISBN: 978-0-486-60349-0, Dover Publications, New York-U.S.A., pp. 1-204, 1956.
[4] Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, ISBN: 0-471-33328-X, John Wiley&Sons. Inc, New York-U.S.A., pp.1-146, 1999.
[5] Mak, M.K. and Harko, T., New Integrability Case for the Riccati Equation, Applied Mathematics and Computation, Vol.218, Netherlands, pp.10974-10981, 2012.
[6] Mortici, C., The method of the variation of constants for Riccati Equations, General Mathematics Vol. 16, No. 1, Romania, pp.111-116, 2008)
[7] Pala, Y., Modern Differential Equations and Its Applications (In Turkish), ISBN: 075-591-936-8, Nobel Publications, Bursa-Turkey, pp.1-188, 2006.
[8] Pala, Y. and Ertas, Ö., 'A New Analytical Method for Solving General Riccati Equation', Universal Journal of Applied Mathematics 5(2): 11-16, DOI: 10.13189/ujam.2017.0502, 2017.
[9] Rao, P.R.P., The Riccati Differential Equation, The American Mathematical Montly, U.S.A., pp.995-996, 1962.
[10] Rao, P.R.P. and Ukidave, V.H., Separable forms of the Riccati Equation, The American Mathematical Montly, Vol.75, U.S.A., pp.38-39, 1968.
[11] Siller, H., On the Separability of the Riccati Differential Equation, Mathematics Magazine, Vol.43, No.4, U.S.A., pp.197-202, 1970.
[12] Sugai, I., Riccati's Nonlinear Differential Equation, The American Mathematical Monthly, Vol.67, No.2, U.S.A., pp.134-139, 1960.