

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İZOTROP MALZEMELİ HELİSEL ÇUBUKLARIN STATİK
PROBLEMLERİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Serhan Aydın AYA**

Anabilim Dalı : Makina Mühendisliği

Programı : Malzeme ve İmalat

HAZİRAN 2011

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İZOTROP MALZEMELİ HELİSEL ÇUBUKLARIN STATİK
PROBLEMLERİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Serhan Aydın AYA
(503081316)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06 Mayıs 2011
Tezin Savunulduğu Tarih : 07 Haziran 2011**

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Uğur GÜVEN (YTÜ)
Yrd. Doç. Dr. Oğuz ALTAY (İTÜ)**

HAZİRAN 2011

ÖNSÖZ

Çubuk benzeri yapılar; makina, inşaat ve uçak endüstrisinde geniş kullanım alanına sahiptir. Mühendislikte birçok yapı çubuk elemanı olarak modellenenir. Son yıllarda, nano ölçekteki bazı yapıların modellenmesinde de çubuk teorisinin uygulandığı görölmektedir. Mühendislikte, yaygın kullanım alanı bulunan elastik çubuklarla ilgili çalışmalarda çeşitli kabuller yapılmış olup, genelde yaklaşık yöntemlerle sonuca ulaşılmaya çalışıldığı görölmektedir. Bu çalışmada, helisel çubukların statik davranışını belirleyen diferansiyel denklemlerin kesin çözümleri, eksen uzaması ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınarak elde edilmiştir.

Çalışmanın her aşamasında değerli görüşleriyle yol gösteren ve akademik anlayışı sabır ve titizlikle kazandıran sayın hocam Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ'ye teşekkür ederim.

Mayıs 2011

Serhan Aydın AYA
(Makina Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	v
KISALTMALAR	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	xi
ŞEKİL LİSTESİ	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı	1
1.2 Literatür Özeti	2
2. ÇUBUK STATİĞİNİN GENEL DENKLEMLERİ	5
2.1 Amaç	5
2.2 Çubuk Statiğinin Genel Denklemleri	5
2.3 Helis Geometrisi.....	10
3. DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ	13
3.1 Başlangıç Değerleri Yöntemiyle Denklemlerin Çözümü.....	13
4. SAYISAL UYGULAMALAR	21
4.1 Sarım Sayısı ve Helis Açısının Yerdeğiştirmeye Etkisi.....	22
4.2 Helis Yarıçapının Yerdeğiştirmeye Etkisi.....	30
4.3 Mevcut Yayınlardaki Örneklerin Çözümü ve Sonuçların Karşılaştırılması	32
4.4 İki Bölge Çubukların İncelenmesi	36
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR	45
EKLER	47

KISALTMALAR

A, A(x)	: Diferansiyel denklem takımının katsayılar matrisi
A	: Kesit alanı
C	: Kayma rijitliği matrisi
D	: Eğilme rijitliği matrisi
E	: Elastiklik modülü
n⁰, b⁰, t⁰	: Şekil değiştirmemiş çubuğun kesitine bağlı eksen takımı
n, b, t	: Şekil değiştirmiş çubuğun kesitine bağlı eksen takımı
F	: Tekil kuvvet
M	: Tekil moment
G	: Kayma modülü
I_n, I_b	: Kesite ait alan eylemsizlik momentleri
I_t	: Kesit alanının burulma eylemsizlik momenti
I_{nb}, I_{bn}	: Kesite ait çarpım eylemsizlik momentleri
k_n, k_b	: Kesite ait kayma sabitleri
M	: Kesite etkiyen iç momentler vektörü
m	: Yayılı dış momentler vektörü
p	: Yayılı dış kuvvetler vektörü
F	: Kesite etkiyen iç kuvvetler vektörü
r₀, r	: Şekil değiştirmiş ve değiştirmemiş çubuğa ait konum vektörleri
s	: Yay uzunluğu
U	: Yer değiştirme vektörü
Ω	: Dönme vektörü
Y	: Asal matris
y	: Diferansiyel denklem takımının değişkenler vektörü
y₀	: Başlangıç değerleri vektörü
ρ₀	: Eğrilik yarıçapı
θ	: Yay açıklığı, yay ölçüsü
γ	: Eksenel şekil değiştirme vektörü
κ₀, κ'₀	: Çubuk ekseninin eğrilik bileşenleri
λ	: Narinlik oranı
ω, ω₀	: Açısal değişim vektörü
ω₁	: Birim dönme vektörü
α	: Helis açısı

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 : $R = 0.3$ m, $\alpha = 5^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait $\bar{U}_n, \bar{U}_b, \bar{U}_t$ değerlerinin karşılaştırılması.....	27
Çizelge 4.2 : $R = 0.3$ m, $\alpha = 5^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait $\bar{U}_n, \bar{U}_b, \bar{U}_t$ değerlerinin karşılaştırılması.....	28
Çizelge 4.3 : Helis yarıçapının yerdeğiştirmeye etkisi	31
Çizelge 4.4 : Farklı helis açıları için serbest ucun yerdeğiştirme sonuçlarının karşılaştırılması.....	32
Çizelge 4.5 : Serbest ucun yerdeğiştirme miktarı ($\theta=4\pi$)	33
Çizelge 4.6 : Dikdörtgen, kare ve dikdörtgen kesitli helisel çubuğun serbest ucunun yerdeğiştirme ve dönmesi	37
Çizelge 4.7 : $\theta=\pi/2$ 'de yerdeğiştirme bileşenlerinin değeri.....	39
Çizelge 4.8 : $\theta=3\pi$ 'de yerdeğiştirme bileşenlerinin değeri.....	41
Çizelge A.1 : $R = 0.3$ m, $\alpha = 15^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait $\bar{U}_n, \bar{U}_b, \bar{U}_t$ değerlerinin karşılaştırılması.....	49
Çizelge A.2 : $R = 0.3$ m, $\alpha = 25^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait $\bar{U}_n, \bar{U}_b, \bar{U}_t$ değerlerinin karşılaştırılması.....	50
Çizelge A.3 : $R = 0.3$ m, $\alpha = 15^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait $\bar{U}_n, \bar{U}_b, \bar{U}_t$ değerlerinin karşılaştırılması.....	51
Çizelge A.4 : $R = 0.3$ m, $\alpha = 25^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait $\bar{U}_n, \bar{U}_b, \bar{U}_t$ değerlerinin karşılaştırılması.....	52

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Dikdörtgen kesitli helisel yapı.....	4
Şekil 2.1 : Çubuk geometrisi.	6
Şekil 2.2 : Helis geometrisi.....	10
Şekil 4.1 : Serbest ucundan tekil kuvvetle yüklenmiş helisel çubuk ($\theta = 2\pi$).....	22
Şekil 4.2 : ANSYS programında kullanılan bir model ($\theta = 9\pi$, $\alpha = 5^\circ$).....	24
Şekil 4.3 : ABAQUS programında kullanılan bir model ($\theta = 9\pi$, $\alpha = 5^\circ$).....	25
Şekil 4.4 : $R=0.3$ m, $\alpha=5^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait U_t yerdeğiştirme bileşeni değerinin karşılaştırılması.	29
Şekil 4.5 : $R=0.3$ m, $\alpha=15^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait U_t yerdeğiştirme bileşeni değerinin karşılaştırılması.	29
Şekil 4.6 : $R=0.3$ m, $\alpha=25^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait U_t yerdeğiştirme bileşeni değerinin karşılaştırılması.	29
Şekil 4.7 : Serbest ucundan tekil kuvvetle yüklü helisel çubuk (Jafari ve Mahjoob, 2005).....	32
Şekil 4.8 : Serbest ucundan tekil kuvvetle yüklü helisel çubuk (Zupan ve diğ., 2005)	33
Şekil 4.9 : Serbest ucundan tekil kuvvet ve momentle yüklü helisel çubuk (Taktak ve diğ., 2005)	34
Şekil 4.10 : Dairesel, kare ve dikdörtgen kesit boyutları (Taktak ve diğ., 2005)	34
Şekil 4.11 : ABAQUS programında kullanılan model ($\theta = 20\pi$, $\alpha = 4.19^\circ$)	35
Şekil 4.12 : ABAQUS programında kullanılan model ($\theta = \pi$, $\alpha = 5^\circ$).....	38
Şekil 4.13 : Çubuğun C noktasındaki denge durumu	39
Şekil 4.14 : ABAQUS programında kullanılan model ($\theta = 4\pi$, $\alpha = 15^\circ$)	40

İZOTROP MALZEMELİ HELİSEL ÇUBUKLARIN STATİK PROBLEMLERİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Bu çalışmada, değişken kesitli, elastik, izotrop malzemeli çubukların genel statik problemleri eksen uzaması, kayma deformasyonu etkileri gözönüne alınarak incelenmiştir. Problem, altı adet diferansiyel denklem ile ifade edilmiş ve bu denklemlerin kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. Örnekler, sabit kesitli silindirik helisel çubuklar için çözülmüştür. Yapılan literatür araştırmasında, çalışmaların çoğunda yaklaşık yöntemlerle sonuca ulaşılmaya çalışıldığı görülmüştür.

Birinci bölümde, çubuk teorisi ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. Çalışmanın amacı belirtildikten sonra çubukların statik ve dinamik davranışları konusunda yapılan çalışmalar özetlenmiştir.

İkinci bölümde, çubuğun statik davranışını veren genel diferansiyel denklemler verilmiş, ardından bu denklemler çubuk kesitinin asal eksenlerinin eksen eğrisinin normal ve binormal eksenleri ile çakışması durumu için özelleştirilmiştir. Daha sonra bu çalışmanın sayısal hesaplamalarında kullanılacak helis geometrisi incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, çubuğun statik davranışını ifade eden değişken katsayılı, homojen diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, çubuk kesitinin çift simetrik olduğu, kesitin geometrik merkezi ile kayma merkezinin çakışmakta olduğu, normal ve binormal eksenleri kesitin asal eksenleri olduğu, çarpılma olmadığı, çubuğun elastik, homojen ve izotrop malzemedan yapıldığı varsayımıyla, başlangıç değerleri yöntemini kullanarak elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, sabit kesitli silindirik helisel çubuklar için çeşitli örnekler çözülmüştür. Hesaplanan değerler, mevcut yayınlar ve sonlu eleman programlarından elde edilenlerle karşılaştırılmıştır.

Yapılan çalışmada, değişken kesitli, elastik, izotrop malzemeli çubukların genel statik problemlerini ifade eden diferansiyel denklemlerin kesin çözümü eksen uzaması, kayma deformasyonu etkileri gözönüne alınarak, başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. İlgili çalışmalar incelenmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonlu eleman programlarıyla da yapılmış olup uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

ANALYTICAL SOLUTIONS OF STATIC PROBLEMS OF HELICAL BEAMS OF ISOTROPIC MATERIAL

SUMMARY

This study concerns with the static behaviour of a spatial bar, with variable cross section of an elastic and isotropic material, comprising the effects of axial and shear deformations. The problem is described by six differential equations and these equations are solved by using the method of initial values. Examples are given for cylindrical helical beams with constant cross section. In the literature, most of the studies solve these governing differential equations numerically. Also, a few of them neglect the axial and shear deformation effects. In this proposed method, the solutions are exact and axial and shear deformation effects are considered.

In the first chapter, a general view of beam theory and the aim of the study are given. Relevant literature about static and dynamic behaviour of the beams are summarized.

In the second chapter, six differential equations describing static behaviour of a spatial bar are given first, and then reduced assuming that the center of the cross section coincides with its shear center, and that the normal and binormal axes are principal axes of the cross section. At the end of the chapter, general geometry of a helix is reviewed.

Third chapter deals with the exact solutions of the differential equations that describe the static behaviour of a spatial bar. Method of initial values is used and it is assumed that the centroid of the cross section coincides with its shear center, and that the normal and binormal axes are the principal axes. Warping is neglected; elastic, homogeneous and isotropic material is considered.

In the last chapter, several examples are solved for cylindrical helical beams with constant cross section and compared to results from the relevant literature and finite element programs.

Based on method of initial values, the differential equations describing static behaviour of a spatial bar are solved and compared to results from the relevant literature and finite element programs. The results are in close agreement with each other. It is assumed that center of the cross section coincides with its shear center, and that the normal and binormal axes are principal axes of the cross section.

1. GİRİŞ

Çubuk teorisi yapısal mekanik konusunda çalışan bilim insanlarının her zaman ilgisini çekmiştir. Kirişler; makina, inşaat ve uçak endüstrisinde geniş kullanım alanına sahiptir. Mühendislikte birçok yapı kiriş elemanı olarak modellenebilir. Dolayısıyla, kirişlerin statik davranışının belirlenebilmesi, ilgili yapıların mühendislik analizi ve tasarımı sürecinde önem teşkil etmektedir. Son yıllarda, çubuk teorisini nano ölçekteki yapılara uyarlama çalışmaları da mevcuttur. Örnek olarak, rijitlik, mukavemet ve elektronik bakımdan çok uygun karakteristik özellikler göstermesi sebebiyle nanoteknoloji uygulamalarında geniş kullanım alanı bulunan karbon nanotüplerin mekanik incelenmesi verilebilir.

Kirişlerin statik ve dinamik davranışları ile ilgili yapılan çalışmaların çoğunda yaklaşık yöntemlerle sonuca ulaşmaya çalışıldığı görülmüştür. En yaygın olarak, sonlu eleman yöntemi konusunda yapılan çalışmalarda hesaplama etkinliğini iyileştirmek amacıyla değişik tipte elemanlar sunulmuştur.

Bu çalışmada, kesitin geometrik merkezi ile kayma merkezinin çakışmakta olduğu, normal ve binormal eksenlerin kesitin asal eksenleri olduğu, çarpılma olmadığı, çubuğun elastik, homojen ve izotrop malzeme özelliklerini taşıdığı varsayımıyla çubuk statik davranışını ifade eden diferansiyel denklemler, başlangıç değerleri yöntemiyle kesin olarak çözülmüştür. Hesaplanan değerler, ilgili yayınlar ve sonlu eleman programlarının sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

1.1 Tezin Amacı

Bu çalışmada, helisel çubukların statik davranışını ifade eden diferansiyel denklem takımı, eksen uzaması ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınarak elde edilmiştir. Elde edilen bu diferansiyel denklem takımı, helis yarıçapının ve çubuk kesitinin değişimini de içerdiği için, en genel durumda değişken katsayılı, lineer ve homojen bir denklem takımındır. Bu değişken katsayılı homojen diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. Örnekler, sabit kesitli, silindirik helisel çubuklar için çözülmüştür.

1.2 Literatür Özeti

Helisel çubukların statik davranışı ile ilgili öncü çalışmalardan biri Love'a ait olup çubuk statliğini belirleyen diferansiyel denklemler sunulmuştur (Love, 1944). Çalışmada, çubuk bir parametreye bağlı yönlendirilmiş bir ortam olarak ele alınmış ve teori skaler büyüklüklerle verilmiştir. Yine helisel çubukların dinamiği ile ilgili ilk denklemler Love'a ait olup (1899) bu çalışmalar Yoshimura ve Murata (1952) tarafından burulma eylemsizliği etkileri de hesaba katılarak geliştirilmiştir. Young ve Scordelis (1999) bu teorilerin doğruluğunu araştırmak üzere deneysel çalışmalar gerçekleştirmişlerdir. Scordelis (1960) iki ucundan sabitlenmiş uniform yüklü çubuğun ortasındaki kesit tesirlerini veren çözümü sunmuştur. Holmes (1957) iki ucundan mafsallı uniform çubuğa ait genel denklemler ve çözümlerini sunmuştur.

Eisenberg ve Busool (2001) değişken kesitli, elastik ve izotrop malzemeli helisel çubukların değişken yükler altındaki statik davranışını belirlemek amacıyla nümerik yöntem geliştirmiştir. Çubukların statik davranışını belirleyen diferansiyel denklemler, rijitlik matrisi metodunu esas alan bilgisayar programı yardımıyla, nümerik olarak çözülmüştür. Çalışmanın esas avantajının, kesin çözüme, yapıyı oluşturacak model için fazladan eleman kullanılmadan ulaşılması olduğu vurgulanmıştır. Kesin sonuçlar az sayıda eleman kullanılarak bulunmuştur. Elde edilen sonuçların betonarme merdivenlerde, rampalarda kullanılabileceği belirtilmiştir. Çalışmada, kesitin geometrik merkezi ile kayma merkezinin çakışmakta olduğu, normal ve binormal eksenleri kesitin asal eksenleri olduğu, çarpılma olmadığı, çubuğun elastik, homojen ve izotrop malzeme özelliklerini taşıdığı varsayılmıştır.

Tufekci ve Arpacı (2005), düzlemsel eğri eksenli çubukların statik problemleri için kayma deformasyonu ve eksenin uzaması etkilerini göz önüne alarak incelemiştir. Düzlem içinde yüklenmiş çubuğun statik davranışını ifade eden diferansiyel denklemlerin kesin çözümleri başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Tufekci ve Dogruer (2006), düzlemsel eğri eksenli çubukların düzlem dışı yükleme durumu için statik problemlerini kayma deformasyonu, eksenin uzaması etkilerini ihmal etmeden incelemiştir. Düzlem dışında yüklenmiş çubuğun statik davranışını ifade eden diferansiyel denklemlerin kesin çözümleri, başlangıç değerleri yöntemi ile elde edilmiştir.

Jafari ve Mahjoob (2010) değişken kesitli eğri eksenli kirişlerin rijitlik matrisinin kesin çözümünde kullanmak üzere sonlu eleman yöntemi geliştirmiştir. Eğilme ve burulma momentleri, çekme ve basma kuvvetleri etkisindeki kompleks yapıdaki kirişlerin yapısal analizinin hassas ve doğru olarak yapılması amaçlanmıştır. Daha önceki çalışmalarda tek eksenli çubuklar için kullanılan doğrudan integrasyon yöntemi ile üç boyutlu eğriliğe sahip değişken kesitli kirişin rijitlik matrisi elde edilmiştir. Benzer çalışmalar Taktak ve diğ. (2005) ile Zupan ve diğ. (2008) tarafından yapılmıştır.

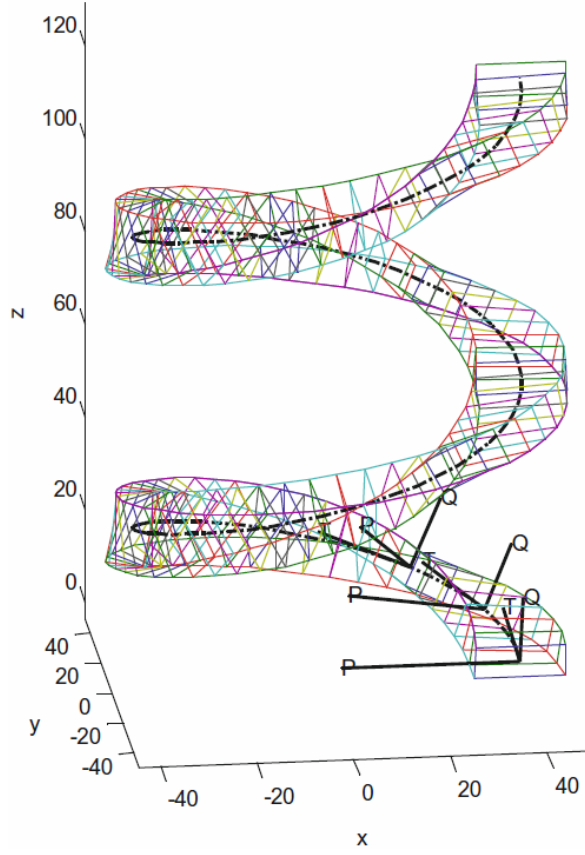
Taktak ve diğ. (2005) çalışmalarında, helisel çubuğun statik davranışını modellemek amacıyla her düğümü 6 serbestlik dereceli, toplam 2 düğüm noktası bulunan bir sonlu eleman sunmuştur. Formülasyon, kayma deformasyonu etkilerini içermektedir.

Zupan ve diğ. (2008) küçük yerdeğiştirme ve dönme olduğu varsayımıyla, değişken kesitli kirişler için, lineerleştirilmiş sonlu-birim uzama kiriş teorisine “wavelet” teorisini baz alan ayrıklaştırma uygulamıştır.

Yıldırım (1997) helis yarıçapı sabit olmayan çubukların serbest titreşimlerini transfer matrisi yöntemini kullanarak nümerik olarak çözmüştür. Eleman transfer matrisinin hesabı için sayısal algoritma geliştirilmiştir. Sürekli bir sistem olarak kabul edilen heliste, Timoshenko kiriş teorisi uygulanmıştır. Pratikte kullanılan helis tipleri için ilk üç doğal frekans hesaplanmıştır. Çalışmada, kesitin geometrik merkezi ile kayma merkezinin çakışmakta olduğu, normal ve binormal eksenleri kesitin asal eksenleri olduğu, çarpılma olmadığı, çubuğun elastik, homojen ve izotrop malzeme özelliklerini taşıdığı varsayılmıştır.

Yu ve Yang (2009) tarafından yapılan analitik çalışmada, silindirik helisel yayların serbest titreşim analizi yapılmıştır. Yayın hareket denklemlerinde, yer değiştirme fonksiyonları geometrik merkezden geçen eksenle tanımlanmış ve dönme eylemsizliği, aksenal ve kayma deformasyonları modelde hesaba katılmıştır. Mod şekillerini veren açık analitik ifadeler için sembolik hesaplama programı MATHEMATICA kullanılmış ve doğal frekansların kesin olarak belirlenmesi amaçlanmıştır. Doğal frekanslar Muller kök bulma yöntemi ile belirlenmiştir. Sonlu eleman modellerinin verdiği sonuçlar ve mevcut çalışmadakilerle yapılan kıyaslardan tatmin edici sonuçlar alındığı görülmüştür.

Girgin (2006), değişken kesitli silindirik olmayan helislerin serbest titreşimleri için karma sonlu eleman formülasyonu sunmuştur. Omurtag ve Akoz'e ait (1991) silindirik helisler için statik analizi temel alınarak geliştirilen yöntemde; kütle matrisi, dönme eylemsizliği ve burulma eylemsizlik momentini içermekte olup karma sonlu eleman matrisi ise kayma etkisini içermektedir. Sonuçlar, mevcut yayınlar ve diğer sonlu eleman yöntemleri ile elde edilen sonuçlarla kıyaslanmıştır.



Şekil 1.1 : Dikdörtgen kesitli genel helisel yapı.

2. ÇUBUK STATİĞİNİN GENEL DENKLEMLERİ

2.1 Amaç

Bu bölümde, ilk olarak çubuğun statik davranışını veren diferansiyel denklemler verilmiş, ardından bu denklemler çubuk kesitinin asal eksenlerinin eksen eğrisinin normal ve binormal eksenleri ile çakışması durumu için özelleştirilmiştir. Son olarak ise bir sonraki bölümde sayısal hesaplamalarda kullanılacak helis geometrisi incelenmiştir.

2.2 Çubuk Statığının Genel Denklemleri

Çubuk teorisinin genel denklemleri,

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} + \mathbf{t}^0 \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} - \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_0 = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{p} = 0 \quad (2.3)$$

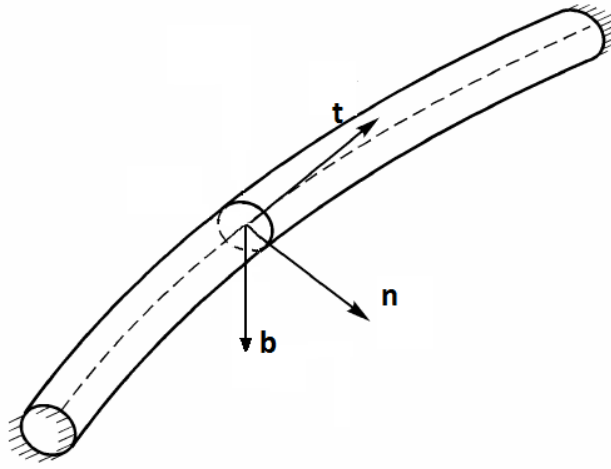
$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t}^0 \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = 0 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_0) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{C} \boldsymbol{\gamma} \quad (2.6)$$

olarak verilmiştir [17].

Verilen denklemlerden ilk ikisi yer değiştirme - Şekil değiştirme bağıntılarıdır. Burada sıfır üst indisiyle gösterilen kesit vektörü \mathbf{t}^0 çubuk eğrisinin teğet vektörüdür. Çubuğun dönme vektörü olan $\mathbf{\Omega}$, ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmeyi belirtmektedir. Eksenel Şekil değiştirme vektörü olan $\mathbf{\gamma}$, eksen eğrisinin boy değişimini ve eksen eğrisi ile dik kesit arasındaki kaymaları belirtmektedir. Eksen eğrisinde pozitif yönde ilerlendiğindeki açısal değişim Şekil değiştirmiş çubuk için $\mathbf{\omega}$, Şekil değiştirmemiş çubuk için $\mathbf{\omega}_0$ vektörleriyle belirtilmektedir.



Şekil 2.1 : Çubuk geometrisi.

Üçüncü ve dördüncü denklemler çubuk elamanına ait denge denklemleridir. Burada s çubuk boyunu göstermek üzere $\mathbf{p}(s)$ ve $\mathbf{m}(s)$ sırasıyla birim uzunluktaki çubuğa etkiyen dış kuvvet ve momentleri ifade etmektedir. \mathbf{F} ve \mathbf{M} vektörleri ise sırasıyla kesite etkiyen iç kuvvetlerin ve momentlerin bileşkesinin ifadesidir.

Son iki denklem bünye denklemleridir. \mathbf{C} ve \mathbf{D} matrisleri sırasıyla çubuğa ait kayma ve dönme rijitlik matrislerini göstermektedir. \mathbf{n}^0 , \mathbf{b}^0 , \mathbf{t}^0 özel eksen takımında bu matrislerin ifadesi sadeleşmektedir. Yapılan çalışmada \mathbf{n}^0 , \mathbf{b}^0 eksenleri, kesitin simetri eksenleriyle çakışmaktadır. Çubuk eğrisinin normal \mathbf{n}^0 ve binormal \mathbf{b}^0 vektörleri, çubuk kesitinin simetri eksenleriyle çakıştığı durumlarda \mathbf{C} ve \mathbf{D} matrisleri Şu Şekilde ifade edilmektedir:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Kesitin belirlenmesinin ardından, matris bileşenleri şu şekilde olacaktır:

$$D_{11} = EI_n \quad (2.9)$$

$$D_{22} = EI_b \quad (2.10)$$

$$D_{33} = GI_t \quad (2.11)$$

$$C_{11} = \frac{1}{k_n} GA \quad (2.12)$$

$$C_{22} = \frac{1}{k_b} GA \quad (2.13)$$

$$C_{33} = EA \quad (2.14)$$

Burada, E ve G sırasıyla malzemenin elastiklik ve kayma modüllerini, I_n ve I_b kesit alanın normal ve binormal eksenlere göre eylemsizlik momentlerini, I_t kesit burulma eylemsizlik momentini göstermektedir. I_p kesitin polar eylemsizlik momentini göstermek üzere dairesel kesit için $I_t = I_p$ eşitliği mevcuttur (Coulomb burulması). Bunun yanında, yukarıdaki denklemlerde, A kesit alanını ifade etmekte olup, k_n ve k_b ise gerilmelerin kesitte uniform dağılmadığını belirten kayma sabitleridir.

Son iki denklemden;

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M} \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F} \quad (2.16)$$

eşitlikleri elde edilir. Bunlar, (2.9-14) ile verilen genel çubuk denklemlerinin ilk dördünde yerine konursa;

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} + \mathbf{t}^0 \times \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M} = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = -\mathbf{p} \quad (2.19)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t}^0 \times \mathbf{F} = -\mathbf{m} \quad (2.20)$$

denklemleri elde edilir.

\mathbf{U} , $\mathbf{\Omega}$, \mathbf{F} , \mathbf{M} , \mathbf{p} , \mathbf{m} vektörleri şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla, şekil değiştirmemiş çubuk eksenine yerleştirilmiş \mathbf{n}^0 , \mathbf{b}^0 , \mathbf{t}^0 eksen takımında;

$$\mathbf{U} = U_n \mathbf{n}^0 + U_b \mathbf{b}^0 + U_t \mathbf{t}^0 \quad (2.21)$$

$$\mathbf{\Omega} = \Omega_n \mathbf{n}^0 + \Omega_b \mathbf{b}^0 + \Omega_t \mathbf{t}^0 \quad (2.22)$$

$$\mathbf{F} = F_n \mathbf{n}^0 + F_b \mathbf{b}^0 + F_t \mathbf{t}^0 \quad (2.23)$$

$$\mathbf{M} = M_n \mathbf{n}^0 + M_b \mathbf{b}^0 + M_t \mathbf{t}^0 \quad (2.24)$$

$$\mathbf{p} = p_n \mathbf{n}^0 + p_b \mathbf{b}^0 + p_t \mathbf{t}^0 \quad (2.25)$$

$$\mathbf{m} = m_n \mathbf{n}^0 + m_b \mathbf{b}^0 + m_t \mathbf{t}^0 \quad (2.26)$$

şeklinde ifade edilebilir. κ_0 , (\mathbf{b}^0 - \mathbf{t}^0) düzlemindeki eğrilik bileşeni, κ'_0 , (\mathbf{n}^0 - \mathbf{t}^0) düzlemindeki eğrilik bileşeni, τ_0 ise eğrinin burulma açısı olmak üzere eğri eksenli bir çubuk için kesit asal eksenleriyle çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal eksenlerinin çakışmaması durumunda açısal değişim vektörü aşağıdaki gibi ifade edilir (Tüfekçi, 1994).

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \kappa_0 \mathbf{n}^0 + \kappa'_0 \mathbf{b}^0 + \tau_0 \mathbf{t}^0 \quad (2.27)$$

Türev hesabında,

$$\frac{d\mathbf{i}^0}{ds} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{i}^0 \quad (\mathbf{i}^0 = \mathbf{n}^0, \mathbf{b}^0, \mathbf{t}^0 \text{ olmak üzere}) \quad (2.28)$$

kullanılarak çubuğun genel statik denklemleri yeniden yazılacaktır. Kesidin asal eksenleri, eksen eğrisinin normal ve binormal eksenleri ile çakıştığında $\kappa_0 = 0$ ve $\kappa'_0 = 1/\rho_0$ olacak (ρ_0 : Eğrilik yarıçapı) ve (2.1-6) denklemleri;

$$\frac{dU_n}{ds} - \tau_0 U_b + \frac{U_t}{\rho_0} - \Omega_b - \frac{F_n}{C_{11}} = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{dU_b}{ds} + \tau_0 U_n + \Omega_n - \frac{F_b}{C_{22}} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{dU_t}{ds} + \frac{U_n}{\rho_0} - \frac{F_t}{C_{33}} = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{d\Omega_n}{ds} - \tau_0 \Omega_b + \frac{\Omega_t}{\rho_0} - \frac{M_n}{D_{11}} = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{d\Omega_b}{ds} + \tau_0 \Omega_n - \frac{M_b}{D_{22}} = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{d\Omega_t}{ds} - \frac{\Omega_n}{\rho_0} - \frac{M_t}{D_{33}} = 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{dF_n}{ds} - \tau_0 F_b + \frac{F_t}{\rho_0} + p_n = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{dF_b}{ds} + \tau_0 F_n + p_b = 0 \quad (2.36)$$

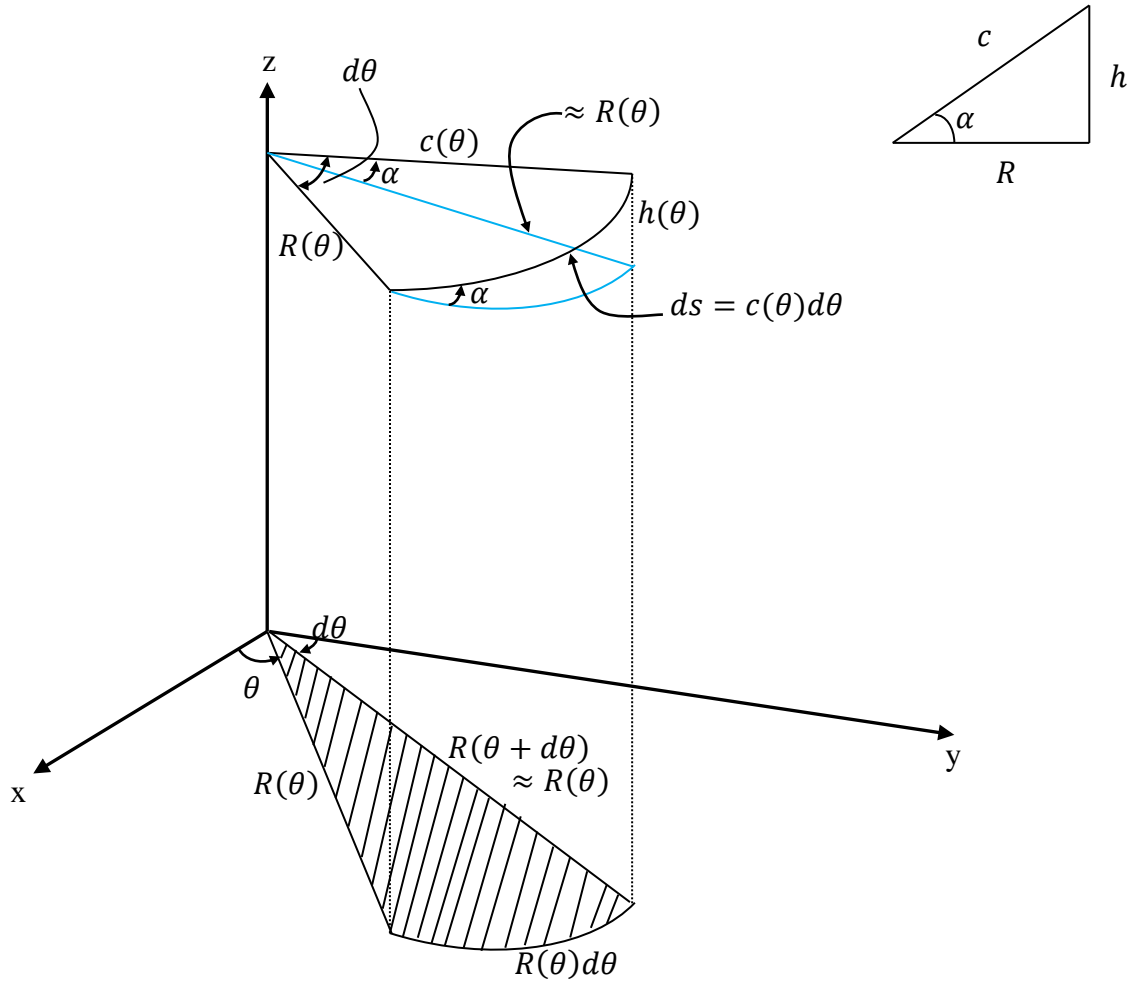
$$\frac{dF_t}{ds} - \frac{F_n}{\rho_0} + p_t = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{dM_n}{ds} - \tau_0 M_b + \frac{M_t}{\rho_0} - F_b + m_n = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{dM_b}{ds} + \tau_0 M_n + F_n + m_b = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{dM_t}{ds} - \frac{M_n}{\rho_0} + m_t = 0 \quad (2.40)$$

2.3 Helis Geometrisi



Şekil 2.2 : Helis geometrisi.

Helisin geometrik özellikleri aşağıda verilmiştir:

$$x = R(\theta) \cos \alpha \quad (2.41)$$

$$y = R(\theta) \sin \alpha \quad (2.42)$$

$$z = h(\theta)\theta \quad (2.43)$$

$$h(\theta) = R(\theta) \tan \alpha \quad (2.44)$$

Burada α helis açısını, $R(\theta)$ ve $h(\theta)$ ise sırasıyla yatay θ açısının fonksiyonu olacak şekilde helis yarıçapını ve birim açı başına yükselme miktarını belirtmektedir. Kartezyen koordinat sisteminde bir noktanın konum vektörü, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ olarak ifade edilir. Frenet koordinat sisteminde, çubuk eksenine bağlı üç birim vektör ise konum vektörü ile aşağıda verilen diferansiyel geometrik bağıntılarla ilişkilidir:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{n} = \frac{(d\mathbf{t}/ds)}{\|d\mathbf{t}/ds\|} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (2.47)$$

\mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} sırasıyla teğet, normal ve binormal eksen doğrultularındaki birim vektörlerdir. Kartezyen koordinat sisteminde, ds sonsuz küçük yay uzunluğunu göstermek üzere,

$$ds = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.48)$$

eşitliği yazılabilir. Frenet koordinat sisteminde,

$$ds = \sqrt{R^2(\theta) + h^2(\theta)}d\theta = c(\theta)d\theta \quad (2.49)$$

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\mathbf{n} \quad (2.50)$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \quad (2.51)$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n} \quad (2.52)$$

ifadeleri yazılabilir.

Silindirik helislerde ise, $R = R(\theta) = \text{sabit}$ olacağından;

$$\kappa = \frac{R}{c^2} \quad (2.53)$$

$$\tau = \frac{h}{c^2} \quad (2.54)$$

$$c^2 = R^2 + h^2 \quad (2.55)$$

$$h = R \tan \alpha \quad (2.56)$$

olarak yazılır.

3. DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, çubuğun statik davranışını ifade eden değişken katsayılı, homojen diferansiyel denklem takımının kesin çözümü başlangıç değerleri yöntemini kullanarak elde edilmiştir. Çubuk kesitinin çift simetrik olduğu, kesitin geometrik merkezi ile kayma merkezinin çakışmakta olduğu, normal ve binormal eksenleri kesitin asal eksenlerinin olduğu, çarpılma olmadığı, çubuğun elastik, homojen ve izotrop malzeme özelliklerini taşıdığı varsayılmaktadır.

3.1 Başlangıç Değerleri Yöntemiyle Denklemlerin Çözümü

Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem takımının genel ifadesi,

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x) \quad (3.1)$$

olarak yazılabilir. Bu çalışmada \mathbf{y} , 12 elemanlı değişkenler vektörünü, $\mathbf{A}(x)$, 12×12 elemanlı katsayılar matrisini, $\mathbf{f}(x)$ ise 12 elemanlı yayılı dış yüklerin bileşke vektörünü göstermektedir. Bu diferansiyel denklemin çözümü $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(x_0)$ başlangıç değerleri bilinmek üzere;

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{Y}(x, x_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{Y}(x, x_0) \int_{x_0}^x \mathbf{Y}^{-1}(\xi, x_0) \mathbf{f}(\xi) d\xi \quad (3.2)$$

olarak ifade edilmekte olup burada $\mathbf{Y}(x, x_0)$, x_0 referans noktasındaki asal matristir (Tüfekçi, 1994). Asal matrisin,

$$\mathbf{Y}(x, x_0) = \mathbf{Y}^{-1}(x_0, x) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{Y}(x, x_0) = \mathbf{Y}(x, x_a) \mathbf{Y}(x_a, x_0) \quad (3.4)$$

özelliklerine sahip olduğu bilinmektedir.

Çubuk üzerinde yayılı kuvvet veya momentin olmadığı durumda $\mathbf{f}(x)$ sıfıra özdeş olacaktır. Böylece (3.1) denklemi homojen hale gelecektir:

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{A}(x)y \quad (3.5)$$

Tekil kuvvet ve momentlerle yüklü çubuğa ait (3.5) denkleminin çözüm fonksiyonu ise;

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{Y}(x, x_0)\mathbf{y}_0 \quad (3.6)$$

biçiminde olacaktır. $\mathbf{Y}(x, x_0)$ asal matrisi, en genel durumda homojen denklemden elde edilir ve;

$$\frac{d\mathbf{Y}(x, x_0)}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x, x_0) \quad (3.7)$$

özelliğini sağlar. Eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularının, kesitin asal doğrultularıyla çakıştığı durumu belirleyen (2.29-40) homojen denklemler şu şekilde olacaktır:

$$\frac{dU_n(\theta)}{d\theta} = \sin \alpha U_b - \cos \alpha U_t + \frac{R(\theta)}{\cos \alpha} \Omega_b + \frac{k_n R(\theta)}{\cos \alpha G A(\theta)} F_n \quad (3.8)$$

$$\frac{dU_b(\theta)}{d\theta} = -\sin \alpha U_n - \frac{R(\theta)}{\cos \alpha} \Omega_n + \frac{k_b R(\theta)}{\cos \alpha G A(\theta)} F_b \quad (3.9)$$

$$\frac{dU_t(\theta)}{d\theta} = \cos \alpha U_n + \frac{R(\theta)}{\cos \alpha E A(\theta)} F_t \quad (3.10)$$

$$\frac{d\Omega_n(\theta)}{d\theta} = \sin \alpha \Omega_b - \cos \alpha \Omega_t + \frac{R(\theta)}{\cos \alpha E I_n(\theta)} M_n \quad (3.11)$$

$$\frac{d\Omega_b(\theta)}{d\theta} = -\sin \alpha \Omega_n + \frac{R(\theta)}{\cos \alpha E I_b(\theta)} M_b \quad (3.12)$$

$$\frac{d\Omega_t(\theta)}{d\theta} = \cos \alpha \Omega_n + \frac{R(\theta)}{\cos \alpha E I_t(\theta)} M_t \quad (3.13)$$

$$\frac{dM_n(\theta)}{d\theta} = \sin \alpha M_b - \cos \alpha M_t + \frac{R(\theta)}{\cos \alpha} F_b \quad (3.14)$$

$$\frac{dM_b(\theta)}{d\theta} = -\sin \alpha M_n - \frac{R(\theta)}{\cos \alpha} F_b \quad (3.15)$$

$$\frac{dM_t(\theta)}{d\theta} = \cos \alpha M_n \quad (3.16)$$

$$\frac{dF_n(\theta)}{d\theta} = \sin \alpha F_b - \cos \alpha F_t \quad (3.17)$$

$$\frac{dF_b(\theta)}{d\theta} = -\sin \alpha F_n \quad (3.18)$$

$$\frac{dF_t(\theta)}{d\theta} = \cos \alpha F_n \quad (3.19)$$

İlk olarak bu denklemlerden son üçü (3.17-19) incelenecektir. Helis açısı α sabit iken (3.17) denkleminin θ 'ya göre türevi alınırsa,

$$\frac{d^2F_n(\theta)}{d\theta^2} = \sin \alpha \frac{dF_b(\theta)}{d\theta} - \cos \alpha \frac{dF_t(\theta)}{d\theta} \quad (3.20)$$

elde edilir. Bu denklemde eşitliğin sağ tarafındaki diferansiyel ifadeler yerine (3.18) ve (3.19) denklemlerinden eşitleri yazılırsa,

$$\frac{d^2F_n(\theta)}{d\theta^2} = -\sin^2 \alpha F_n - \cos^2 \alpha F_n \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2F_n(\theta)}{d\theta^2} = -(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) F_n \quad (3.22)$$

$$\frac{d^2F_n(\theta)}{d\theta^2} + F_n = 0 \quad (3.23)$$

olduğu görülür. Elde edilen diferansiyel denklemden F_n 'in çözümü;

$$F_n(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta \quad (3.24)$$

olarak bulunur. Bu denklemde A ve B integral sabitleridir. Bulunan F_n değeri (3.18) ve (3.19) ifadelerinde yerine konulduğunda (3.25) ve (3.27) denklemleri elde edilir. Bu ifadeler integre edildiğinde F_b ve F_t ifadeleri belirlenir:

$$\frac{dF_b(\theta)}{d\theta} = -\sin \alpha \cos \theta A - \sin \alpha \sin \theta B \quad (3.25)$$

$$F_b(\theta) = C - \sin \alpha \sin \theta A + \sin \alpha \cos \theta B \quad (3.26)$$

Burada C integral sabitidir.

$$\frac{dF_t(\theta)}{d\theta} = \cos \alpha \cos \theta A + \cos \alpha \sin \theta B \quad (3.27)$$

$$F_t(\theta) = D + \cos \alpha \sin \theta A - \cos \alpha \cos \theta B \quad (3.28)$$

Burada D integral sabitidir. Benzer şekilde (3.17) denklemini incelenirse;

$$\frac{dF_n(\theta)}{d\theta} = \sin \alpha F_b - \cos \alpha F_t \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_n(\theta)}{d\theta} = & (\sin \alpha C - \sin^2 \alpha \sin \theta A + \sin^2 \alpha \cos \theta B) - (\cos \alpha D \\ & + \cos^2 \alpha \sin \theta A - \cos^2 \alpha \cos \theta B) \end{aligned} \quad (3.30)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade daha önce bulunan (3.24) denkleminin türevine eşit olmalıdır. İfadeler düzenlenirse;

$$\begin{aligned} -A \sin \theta + B \cos \theta \\ = & (\sin \alpha C - \sin^2 \alpha \sin \theta A + \sin^2 \alpha \cos \theta B) - (\cos \alpha D \\ & + \cos^2 \alpha \sin \theta A - \cos^2 \alpha \cos \theta B) \end{aligned} \quad (3.31)$$

elde edilir. Bulunan bu ifade sadeleştirildiğinde C ve D integral sabitleri arasındaki ilişki elde edilir:

$$C \sin \alpha - D \cos \alpha = 0 \quad (3.32)$$

$$D = \tan \alpha C \quad (3.33)$$

$\theta = 0$ için

$$F_n(0) = F_{n_0} \quad (3.34)$$

$$F_b(0) = F_{b_0} \quad (3.35)$$

$$F_t(0) = F_{t_0} = D - \cos \alpha B = \tan \alpha C - \cos \alpha B \quad (3.36)$$

olmak üzere, (3.22), (3.24), (3.26) ve (3.28) denklemleri düzenlenirse,

$$F_{n_0} = A \quad (3.37)$$

$$F_{b_0} = C + \sin \alpha B \quad (3.38)$$

$$F_{t_0} = D - \cos \alpha B = \tan \alpha C - \cos \alpha B \quad (3.39)$$

elde edilir. Buradan, A, B, C integrasyon sabitleri çözümlerse,

$$A = F_{n_0} \quad (3.40)$$

$$B = \sin \alpha F_{b_0} - \cos \alpha F_{t_0} \quad (3.41)$$

$$C = \cos^2 \alpha F_{b_0} + \sin \alpha \cos \alpha F_{t_0} \quad (3.42)$$

elde edilir. Bu sonuçlarla F_n , F_b , F_t ifadeleri düzenlenirse;

$$F_n(\theta) = \cos \alpha F_{n_0} + \sin \alpha \sin \theta F_{b_0} - \cos \alpha \sin \theta F_{t_0} \quad (3.43)$$

$$F_b(\theta) = -\sin \alpha \sin \theta F_{n_0} + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \theta) F_{b_0} + \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos \theta) F_{t_0} \quad (3.44)$$

$$F_t(\theta) = \cos \alpha \sin \theta F_{n_0} + \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos \theta) F_{b_0} + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos \theta) F_{t_0} \quad (3.45)$$

elde edilecektir. Bu denklemler matrisel ifadeler olarak düzenlenirse (3.4) çözümü elde edilir:

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_b \\ F_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \sin \theta & -\cos \alpha \sin \theta \\ -\sin \alpha \sin \theta & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \theta & \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos \theta) \\ \cos \alpha \sin \theta & \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos \theta) & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n_0} \\ F_{b_0} \\ F_{t_0} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Böylece (3.4) tipi çözüm için $\mathbf{Y}(\theta, \theta_0)$ asal matrisi:

$$\mathbf{Y}(\theta, \theta_0) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \sin \theta & -\cos \alpha \sin \theta \\ -\sin \alpha \sin \theta & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \theta & \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos \theta) \\ \cos \alpha \sin \theta & \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos \theta) & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

şeklinde bulunur. Kesit boyunca moment değişiminin ifadesi olan (3.12-14) denklemleri incelendiğinde denklemlerin homojen kısmının çözümünün (3.46)'ya benzer olacağı görülecektir. Özel çözüm ise (3.2) denklemini kullanılarak hesap edilecektir. Öncelikle $\mathbf{Y}^{-1}(\theta, \theta_0)$ matrisi belirlenir:

$$\mathbf{Y}^{-1}(\theta, \theta_0) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \theta & \cos \alpha \sin \theta \\ \sin \alpha \sin \theta & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \theta & \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos \theta) \\ -\cos \alpha \sin \theta & \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos \theta) & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Daha sonra (3.1)'de $\mathbf{f}(x)$ olarak gösterilen homojen olmayan kısım belirlenir:

$$\mathbf{f}(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{R(\theta)}{\cos \alpha} F_b \\ -\frac{R(\theta)}{\cos \alpha} F_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Böylece moment değişimini veren ifadenin çözümü:

$$\begin{bmatrix} M_n \\ M_b \\ M_t \end{bmatrix} = \mathbf{Y}(\theta, \theta_0) \begin{bmatrix} M_{n_0} \\ M_{b_0} \\ M_{t_0} \end{bmatrix} + \mathbf{Y}(\theta, \theta_0) \int_{\theta_0}^{\theta} \mathbf{Y}^{-1}(\xi, \xi_0) \begin{bmatrix} \frac{R(\xi)}{\cos \alpha} F_b \\ R(\xi) \\ -\frac{R(\xi)}{\cos \alpha} F_n \\ 0 \end{bmatrix} d\xi \quad (3.50)$$

olarak elde edilir. Denklemden bulunan F_b ve F_n ifadeleri (3.46)'dan elde edilir.

Kesitin dönme ve çubuk eğrisinin yerdeğiştirme bileşenlerini veren (3.11-13) ve (3.8-10) ifadeleri de benzer şekilde çözülecektir. Çubuk kesitinin dönme bileşenleri,

$$\begin{bmatrix} \Omega_n \\ \Omega_b \\ \Omega_t \end{bmatrix} = \mathbf{Y}(\theta, \theta_0) \begin{bmatrix} \Omega_{n_0} \\ \Omega_{b_0} \\ \Omega_{t_0} \end{bmatrix} + \mathbf{Y}(\theta, \theta_0) \int_{\theta_0}^{\theta} \mathbf{Y}^{-1}(\xi, \xi_0) \begin{bmatrix} \frac{R(\xi)}{\cos \alpha E I_n(\xi)} M_n \\ \frac{R(\xi)}{\cos \alpha E I_b(\xi)} M_b \\ \frac{R(\xi)}{\cos \alpha G I_t(\xi)} M_t \end{bmatrix} d\xi \quad (3.51)$$

denklemleriyle elde edilir. Burada, M_n, M_b ve M_t ifadeleri (3.50)'den elde edilir.

$\mathbf{Y}(\theta, \theta_0)$ asal matrisi (3.47) ile aynıdır. Çubuk eğrisinin yerdeğiştirme bileşenleri ise,

$$\begin{bmatrix} U_n \\ U_b \\ U_t \end{bmatrix} = \mathbf{Y}(\theta, \theta_0) \begin{bmatrix} U_{n_0} \\ U_{b_0} \\ U_{t_0} \end{bmatrix} + \mathbf{Y}(\theta, \theta_0) \int_{\theta_0}^{\theta} \mathbf{Y}^{-1}(\xi, \xi_0) \begin{bmatrix} \frac{R(\xi)}{\cos \alpha} \Omega_b + \frac{k_n R(\xi)}{\cos \alpha G A(\xi)} F_n \\ \frac{R(\xi)}{\cos \alpha} \Omega_n + \frac{k_b R(\xi)}{\cos \alpha G A(\xi)} F_b \\ \frac{R(\xi)}{\cos \alpha E A(\xi)} F_t \end{bmatrix} d\xi \quad (3.52)$$

denklemleriyle elde edilir. $\mathbf{Y}(\theta, \theta_0)$ asal matrisi (3.47) ile aynıdır. Denklemin son kısmında yer alan Ω_n ve Ω_b (3.51)'den; F_n, F_b ve F_t ise (3.46)'dan elde edilir.

4. SAYISAL UYGULAMALAR

Tekil yüklü helisel çubuk üzerinde, her noktadaki değişkenlerin değerleri (3.46), (3.50), (3.51), (3.52) denklemleri ile bulunabilir. Bu çalışmada, denklemlerin çözümünde eksen uzaması ve kayma deformasyonu etkileri gözönüne alınmıştır. Çubuk kesitinin geometrik merkezi ile kayma merkezinin çakışmakta olduğu, normal ve binormal eksenlerin kesitin asal eksenleri olduğu, çarpılma olmadığı, çubuğun elastik, homojen ve izotrop malzeme özelliklerini taşıdığı varsayılmıştır.

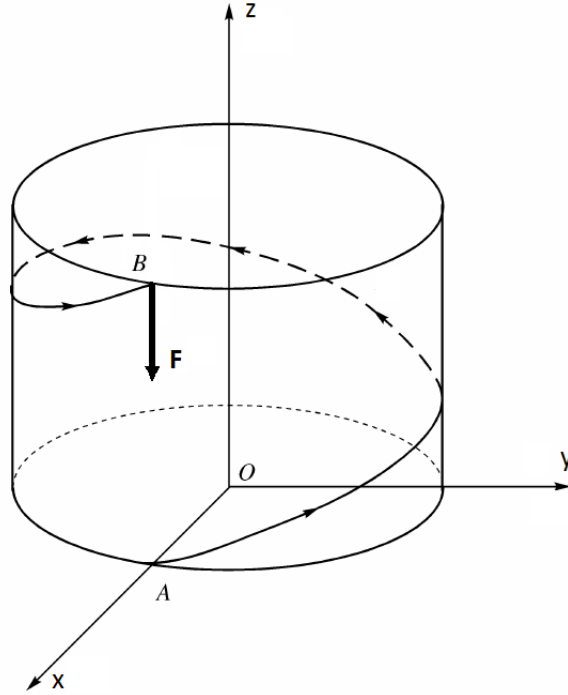
Bu bölüm, dört farklı çalışma içermektedir. İlk kısımda, bir ucu ankastre mesnetlenmiş, serbest ucuna tekil kuvvet etki eden helisel çubuk incelenmiştir. Sarım sayısı ve helis açısının değişimine bağlı olarak serbest uçtaki yer değiştirmenin hesabı yapılmış ve bulunan sonuçlar sonlu eleman analiz programlarından elde edilenlerle karşılaştırılmıştır. Sonlu eleman analizi için ANSYS ve ABAQUS programları kullanılmıştır. Çözümlerde, her iki programda da benzer tipte elemanlar kullanılmıştır ve eleman sayısının aynı olmasına dikkat edilmiştir.

İkinci bölümde farklı helis çaplarının yerdeğiştirme sonuçlarına etkisi incelenmiştir. Çalışmada dairesel kesitli silindirik helisel çubuğun, serbest ucundan etkileyen tekil kuvvet etkisinde serbest ucunda oluşacak yerdeğiştirme farklı helis çapları için incelenmiş ve ABAQUS ile sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Üçüncü bölümde, mevcut yayınlardaki bazı örnekler bu yöntemle çözümlenerek sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde silindirik helisel çubuğun ortasına etkileyen tekil kuvvet ve momentler etkisinde etki noktasındaki yerdeğiştirme büyüklükleri elde edilmiş ve sonlu eleman programı ABAQUS ile sonuçlar karşılaştırılmıştır.

4.1 Sarım Sayısı ve Helis Açısının Yerdeğiştirmeye Etkisi



Şekil 4.1 : Serbest ucundan tekil kuvvetle yüklenmiş helisel çubuk ($\theta = 2\pi$).

Bu çalışmada, bir ucu ankastre mesnetlenmiş silindirik helisel çubuğun, serbest ucuna etkiyen düşey kuvvet neticesinde serbest ucun yer değiştirmesi hesaplanmış ve sonuçlar sonlu eleman analizi programları ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. (3.8-19) denklemlerinin analitik çözümünde MATHEMATICA, sonlu eleman analizi için ANSYS ve ABAQUS yazılımları kullanılmıştır.

Silindirik helisel çubuğun kesidi dairesel olup (Şekil 4.1) sarım sayısı ile ilişkili olan yatay açı θ 'nın ve helis açısı α 'nın değişimine bağlı olarak sonuçlar incelenmiştir. Başlangıç değerleri olarak serbest uçtaki değerler alınmıştır. Serbest ucun çökme, dönme açısı, kuvvet ve moment değerlerinden oluşan başlangıç değerleri vektörü \mathbf{y}_0 'ın belirlenmesi gereklidir. Çubuğun statik durumunu belirleyen (3.46), (3.50), (3.51), (3.52) denklemlerinde, başlangıç değerleri vektörünün 12 adet bilinmeyeni vardır. Bu vektörünün F_{n0} , F_{b0} , F_{t0} , M_{n0} , M_{b0} , M_{t0} bileşenleri serbest uca etkiyen dış kuvvet ve momentlerle belirlenebilir.

$$F_{n0} = 0, \quad F_{b0} = F_z \cos \theta, \quad F_{t0} = F_z \sin \theta \quad (4.1)$$

$$M_{n0} = 0, \quad M_{b0} = 0, \quad M_{t0} = 0 \quad (4.2)$$

olarak bilinmektedir. Kalan başlangıç değerleri, serbest ucun çökme ve dönme değerleri olan U_{n0} , U_{b0} , U_{t0} , Ω_{n0} , Ω_{b0} , Ω_{t0} ise ankastre mesnetteki sınır şartlarından elde edilecektir:

$$\Omega_{nA} = 0, \quad \Omega_{bA} = 0, \quad \Omega_{tA} = 0 \quad (4.3)$$

$$U_{nA} = 0, \quad U_{bA} = 0, \quad U_{tA} = 0 \quad (4.4)$$

denklemlerinin çözümünden elde edilir.

Böylece, serbest uç için tüm başlangıç değerleri elde edilmiş olur. Bu veriler (3.46), (3.50), (3.51), (3.52) denklemlerinde kullanılarak çubuk ekseninde istenen konuma ait kesit tesiri ve yerdeğiştirme büyüklükleri elde edilebilir.

Bu çalışmaya ait helis geometrisi, kesit ve malzeme özellikleri aşağıda verilmiştir:

Dairesel kesit, kesit çapı, $d = 0.12 \text{ m}$

Elastiklik modülü, $E = 2.06 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

Poisson Oranı, $\nu = 0.3$

Helis yarıçapı, $R = 0.3 \text{ m}$

Helis açısı, $\alpha = 5^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 25^\circ$

Farklı helis açılara ve kesite sahip helislerde, denklemlerdeki önemli parametreleri belirlemek amacıyla boyutsuzlaştırma yapılmıştır. Böylece çubuk geometrisine bağlı olarak etkiyen kuvvetin değişmesi ve karşılaştırma açısından tutarlı yerdeğiştirme büyüklükleri elde edilmesi amaçlanmıştır.

Öncelikle, farklı helis açılarında aynı boyutsuz kuvvet \bar{F}_z için uygulanacak tekil kuvvet F_z belirlenmiştir:

Boyutsuz kuvvet: \bar{F}_z

Uygulanan tekil kuvvet: F_z ,

$$\bar{F}_z = \frac{c^2}{EI_n} F_z \quad (4.5)$$

formülünden hesaplanır. Burada yer alan $c = R/\cos \alpha$ olarak daha önce verilmişti. Uygulanan kuvvet F_z , helis açısının değişimine göre farklı değerler alacaktır. $\bar{F}_z = 5 \cdot 10^{-5} = \text{sabit}$ olmak üzere,

$\alpha = 5^\circ$ için uygulanan kuvvet, $F_z = -23169.3$ N,

$\alpha = 15^\circ$ için uygulanan kuvvet, $F_z = -21782.7$ N,

$\alpha = 25^\circ$ için uygulanan kuvvet, $F_z = -19176.8$ N olacaktır.

ABAQUS sonlu eleman programında kullanılacak model CATIA çizim programında hazırlanmıştır. ANSYS sonlu eleman programında kullanılacak model için ise EK-1'de verilen bir makro dosyası kullanılmıştır.

ANSYS programında,

Kullanılan Eleman Tipi: BEAM 188,

Eleman Sayısı: Her yarım çevrim için 20 eleman.

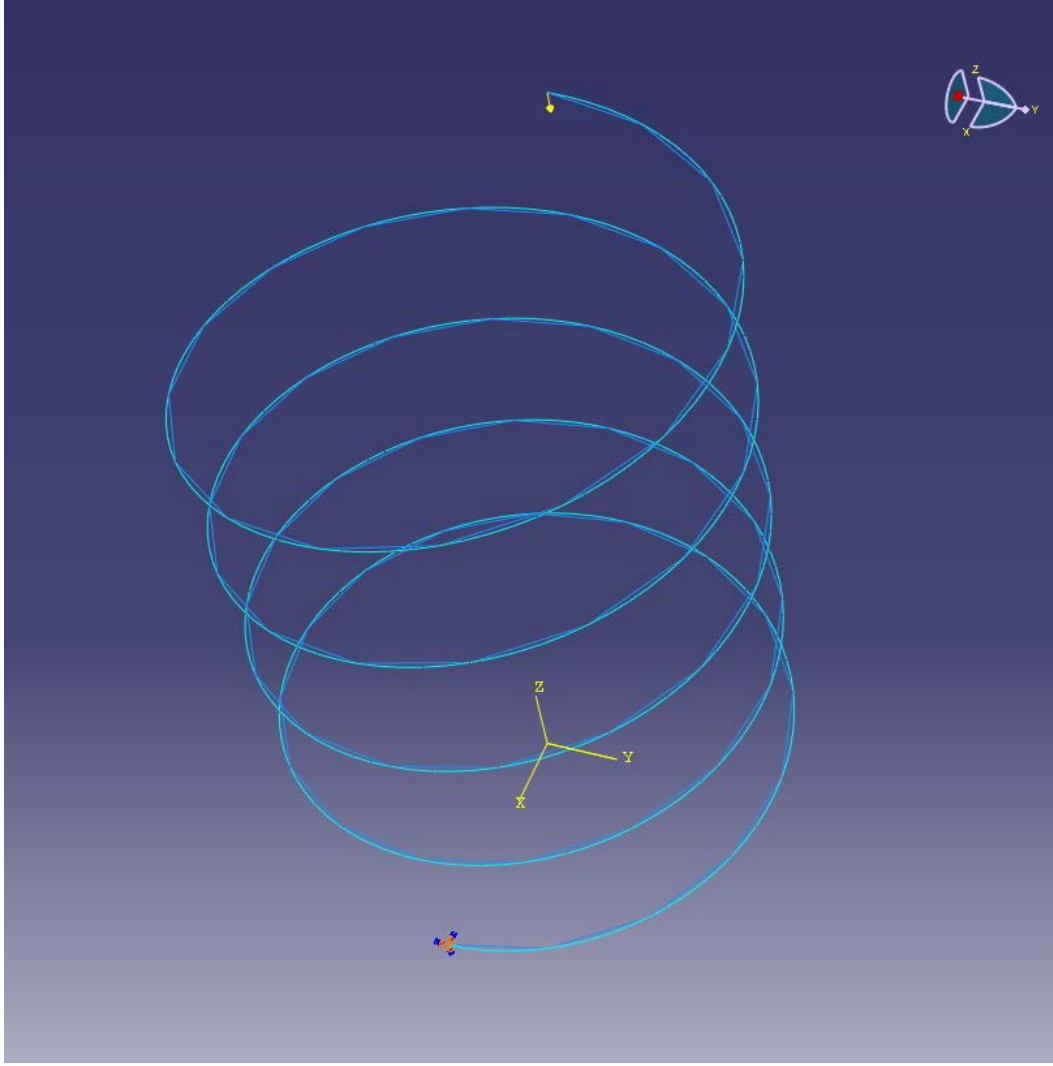


Şekil 4.2 : ANSYS programında kullanılan bir model ($\theta = 9\pi$, $\alpha = 5$).

ABAQUS programında,

Kullanılan Eleman Tipi: BEAM (Shear-Flexible)

Eleman Sayısı: Her yarım çevrim için 20 eleman.



Şekil 4.3 : ABAQUS programında kullanılan bir model ($\theta = 9\pi$, $\alpha = 5$).

Çizelge 4.1 – 4.6’da farklı $n = \theta/2\pi$ sarım sayıları için serbest ucun yer değiştirme bileşenlerinin değerleri verilmektedir. Çizelge 4.1 – 4.3’te bu çalışmadan elde edilen sonuçlar ile ANSYS sonuçları sırasıyla $\alpha = 5^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 25^\circ$ için karşılaştırılmıştır. Çizelge 4.4 – 4.6’da ise bu çalışmadan elde edilen sonuçlar ile ABAQUS sonuçları sırasıyla $\alpha = 5^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 25^\circ$ için karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma yapılırken sonlu eleman yazılımının verdiği global kartezyen eksen takımındaki serbest uçtaki düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (U_x, U_y, U_z), helis üzerinde tanımlanmış Frenet eksen takımındaki değerlere (U_n, U_b, U_t) (4.6-8) denklemleri kullanılarak dönüştürülmüştür. Böylece, açığa bağlı olmadan, yer değiştirme yönü hakkında yorum yapmak mümkün olmuştur. Tüm yer değiştirme değerleri (4.9) denklemi kullanılarak boyutsuz hale getirilmiştir.

$$U_n = -U_x \cos \theta - U_y \sin \theta \quad (4.6)$$

$$U_b = -U_x \sin \theta \sin \alpha + U_y \cos \theta \sin \alpha - U_z \cos \alpha \quad (4.7)$$

$$U_t = U_x \sin \theta \cos \alpha - U_y \cos \theta \cos \alpha - U_z \sin \alpha \quad (4.8)$$

$$\bar{U} = \frac{1}{c} U \quad (4.9)$$

Şekil 4.4 – 4.6’da sarım sayısını belirleyen yatay açığa (θ) bağlı olarak teğet eksen doğrultusundaki yer değişimi (\bar{U}_t) grafiği verilmiştir. Çizelge 4.1, Çizelge A.1 ve Çizelge A.2 incelendiğinde, ANSYS yazılımından elde edilen, normal doğrultusundaki yerdeğiştirme bileşeni \bar{U}_n değerlerindeki hataların, nispeten küçük olduğu görülmektedir. Küçük açı, $\theta < \pi$ değerleri için hata oranlarının tüm bileşenlerde oldukça büyük olduğu görülmektedir. Hata değerlerinin, \bar{U}_b bileşeni için de büyük olduğu; ancak, \bar{U}_t bileşeni için çok daha büyük olduğu görülmektedir. Sarım sayısının buçuklu değerlerine karşı gelen, yani $\theta = (2n + 1)\pi$ açı değerleri için tüm bileşenlerin hatalarının büyüdüğü, açı değeri arttıkça özellikle teğetsel bileşende hataların çok arttığı görülmektedir. \bar{U}_t değerlerine bakıldığında bazı açılarda negatif değerler görülmektedir. Bu, uygulanan basma kuvvetinin etkisinde \bar{U}_t bileşeninin negatif değere sahip olması, yani yer değiştirmenin eksenini uzatacak yönde olması anlamına gelmektedir. Bunun mümkün olmayacağı, bir hata meydana geldiği anlaşılmaktadır. Özellikle yarım sarıma karşı gelen açılar için elde edilen \bar{U}_t yer değiştirme bileşenlerinde aşırı farklılıklar görülmektedir. \bar{U}_n ve \bar{U}_b değerlerinde ise farkların oldukça küçük olduğu görülmektedir. Tam sarım sayılarına karşılık gelen $\theta = 2n \pi$ açı değerleri için mükemmel uyum görülürken, $\theta = (2n + 1)\pi$ buçuklu sarım sayıları için çok büyük hata değerlerinin oluşması, kullanıcıdan kaynaklanmayan, yazılımdan gelen bir hata olduğunu düşündürmektedir.

Aynı örneklerin ABAQUS programı ile çözülmesi sonucunda hataların %0.6 değerini pek aşmadığı görülmektedir (Çizelge 4.4-4.6). Kullanılan eleman tipinin, sayısının benzer olduğu çözümler, ANSYS yazılımındaki uyumsuzlukların programdan kaynaklı olduğunu teyid etmektedir.

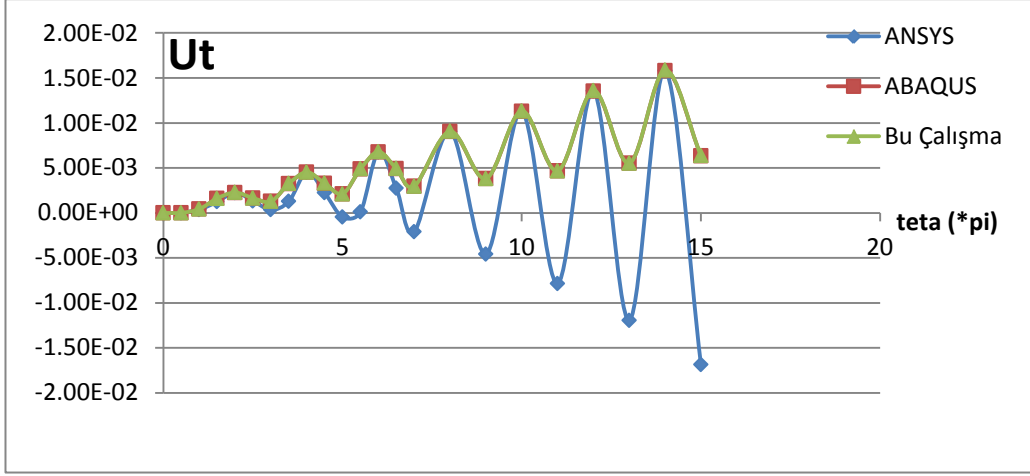
Artan helis açılarında, kullanılan eleman tipinden kaynaklanan hata artışı mevcuttur.

Çizelge 4.1 : $R = 0.3$ m, $\alpha = 5^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait $\bar{U}_n, \bar{U}_b, \bar{U}_t$ değerlerinin karşılaştırılması

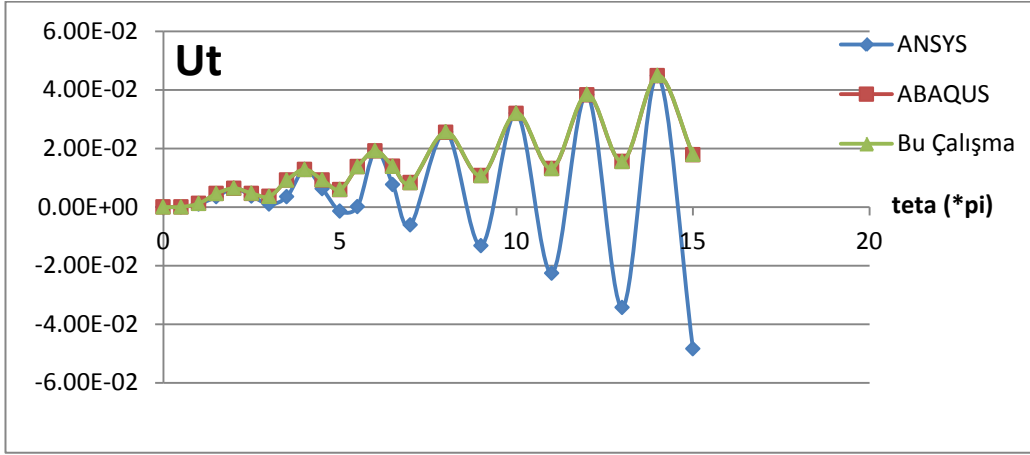
n	ANSYS			Analitik Çalışma			Hata		
	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t
0.25	-7.39E-05	1.55E-03	1.49E-05	-6.70E-05	1.29E-03	1.73E-05	10.26%	20.18%	13.81%
0.5	-8.61E-04	8.82E-03	3.63E-04	-7.76E-04	7.74E-03	4.24E-04	11.00%	13.98%	14.48%
0.75	-1.94E-03	1.47E-02	1.24E-03	-1.77E-03	1.41E-02	1.62E-03	10.11%	4.44%	23.76%
1	-1.97E-03	1.53E-02	2.26E-03	-1.97E-03	1.54E-02	2.27E-03	0.05%	0.15%	0.14%
1.25	-2.40E-03	1.70E-02	1.33E-03	-2.32E-03	1.67E-02	1.66E-03	3.52%	1.67%	19.64%
1.5	-4.92E-03	2.44E-02	3.56E-04	-4.92E-03	2.32E-02	1.27E-03	0.00%	4.97%	71.99%
1.75	-7.60E-03	3.03E-02	1.28E-03	-7.41E-03	2.95E-02	3.26E-03	2.57%	2.56%	60.91%
2	-7.90E-03	3.07E-02	4.52E-03	-7.90E-03	3.07E-02	4.53E-03	0.09%	0.07%	0.27%
2.25	-8.66E-03	3.25E-02	2.24E-03	-8.52E-03	3.21E-02	3.30E-03	1.64%	1.13%	32.09%
2.5	-1.28E-02	4.00E-02	-4.67E-04	-1.26E-02	3.87E-02	2.12E-03	1.69%	3.34%	122.02%
2.75	-1.70E-02	4.59E-02	9.71E-05	-1.70E-02	4.49E-02	4.90E-03	0.07%	2.21%	98.02%
3	-1.78E-02	4.60E-02	6.78E-03	-1.78E-02	4.61E-02	6.80E-03	0.09%	0.07%	0.28%
3.25	-1.88E-02	4.79E-02	2.73E-03	-1.87E-02	4.75E-02	4.94E-03	0.95%	0.90%	44.71%
3.5	-2.46E-02	5.57E-02	-2.11E-03	-2.45E-02	5.42E-02	2.97E-03	0.63%	2.77%	171.04%
4	-3.16E-02	6.14E-02	9.04E-03	-3.16E-02	6.14E-02	9.06E-03	0.09%	0.07%	0.28%
4.5	-4.03E-02	7.14E-02	-4.57E-03	-4.03E-02	6.97E-02	3.82E-03	0.03%	2.56%	219.70%
5	-4.94E-02	7.67E-02	1.13E-02	-4.94E-02	7.68E-02	1.13E-02	0.08%	0.07%	0.29%
5.5	-5.98E-02	8.73E-02	-7.85E-03	-6.00E-02	8.51E-02	4.67E-03	0.36%	2.50%	268.22%
6	-7.11E-02	9.21E-02	1.36E-02	-7.11E-02	9.21E-02	1.36E-02	0.09%	0.07%	0.29%
6.5	-8.32E-02	1.03E-01	-1.19E-02	-8.37E-02	1.01E-01	5.51E-03	0.62%	2.54%	316.64%
7	-9.68E-02	1.07E-01	1.58E-02	-9.67E-02	1.07E-01	1.59E-02	0.09%	0.07%	0.30%
7.5	-1.10E-01	1.19E-01	-1.69E-02	-1.11E-01	1.16E-01	6.36E-03	0.82%	2.63%	365.02%

Çizelge 4.2 : $R = 0.3 \text{ m}$, $\alpha = 5^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait $\bar{U}_n, \bar{U}_b, \bar{U}_t$ değerlerinin karşılaştırılması.

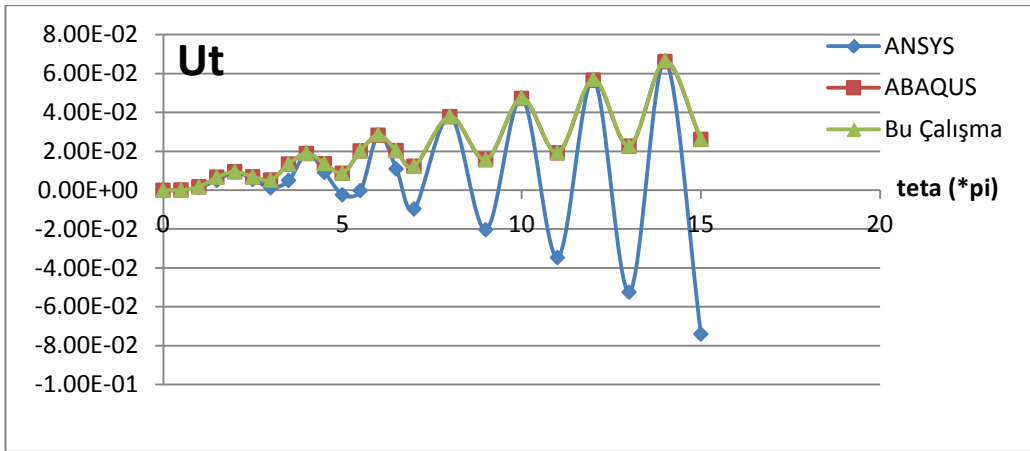
n	ABAQUS			Analitik Çalışma			Hata		
	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t
0.25	-6.80E-05	1.29E-03	1.72E-05	-6.70E-05	1.29E-03	1.73E-05	1.47%	0.07%	0.59%
0.5	-7.77E-04	7.70E-03	4.23E-04	-7.76E-04	7.74E-03	4.24E-04	0.08%	0.58%	0.23%
0.75	-1.76E-03	1.40E-02	1.62E-03	-1.77E-03	1.41E-02	1.62E-03	0.28%	0.55%	0.38%
1	-1.97E-03	1.53E-02	2.26E-03	-1.97E-03	1.54E-02	2.27E-03	0.18%	0.58%	0.45%
1.25	-2.32E-03	1.66E-02	1.65E-03	-2.32E-03	1.67E-02	1.66E-03	0.00%	0.54%	0.45%
1.5	-4.72E-03	2.31E-02	1.27E-03	-4.92E-03	2.32E-02	1.27E-03	4.01%	0.58%	0.16%
1.75	-7.39E-03	2.94E-02	3.25E-03	-7.41E-03	2.95E-02	3.26E-03	0.25%	0.56%	0.40%
2	-7.88E-03	3.05E-02	4.51E-03	-7.90E-03	3.07E-02	4.53E-03	0.18%	0.58%	0.44%
2.25	-8.51E-03	3.19E-02	3.28E-03	-8.52E-03	3.21E-02	3.30E-03	0.10%	0.56%	0.43%
2.5	-1.26E-02	3.85E-02	2.12E-03	-1.26E-02	3.87E-02	2.12E-03	0.17%	0.58%	0.14%
2.75	-1.70E-02	4.47E-02	4.88E-03	-1.70E-02	4.49E-02	4.90E-03	0.23%	0.57%	0.40%
3	-1.77E-02	4.58E-02	6.77E-03	-1.78E-02	4.61E-02	6.80E-03	0.18%	0.58%	0.44%
3.25	-1.86E-02	4.73E-02	4.92E-03	-1.87E-02	4.75E-02	4.94E-03	0.13%	0.56%	0.42%
3.5	-2.44E-02	5.39E-02	2.97E-03	-2.45E-02	5.42E-02	2.97E-03	0.18%	0.58%	0.13%
4	-3.15E-02	6.11E-02	9.02E-03	-3.16E-02	6.14E-02	9.06E-03	0.18%	0.58%	0.42%
4.5	-4.02E-02	6.93E-02	3.81E-03	-4.03E-02	6.97E-02	3.82E-03	0.18%	0.58%	0.08%
5	-4.93E-02	7.63E-02	1.13E-02	-4.94E-02	7.68E-02	1.13E-02	0.18%	0.58%	0.42%
5.5	-5.99E-02	8.46E-02	4.66E-03	-6.00E-02	8.51E-02	4.67E-03	0.18%	0.58%	0.06%
6	-7.09E-02	9.16E-02	1.35E-02	-7.11E-02	9.21E-02	1.36E-02	0.18%	0.58%	0.41%
6.5	-8.35E-02	1.00E-01	5.51E-03	-8.37E-02	1.01E-01	5.51E-03	0.18%	0.58%	0.16%
7	-9.66E-02	1.07E-01	1.58E-02	-9.67E-02	1.07E-01	1.59E-02	0.18%	0.58%	0.36%
7.5	-1.11E-01	1.15E-01	6.35E-03	-1.11E-01	1.16E-01	6.36E-03	0.18%	0.58%	0.15%



Şekil 4.4 : R = 0.3 m, $\alpha = 5^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait \bar{U}_t yerdeğiştirme bileşeni değerinin karşılaştırılması.



Şekil 4.5 : R = 0.3 m, $\alpha = 15^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait \bar{U}_t yerdeğiştirme bileşeni değerinin karşılaştırılması.



Şekil 4.6 : R = 0.3 m, $\alpha = 25^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait \bar{U}_t yerdeğiştirme bileşeni değerinin karşılaştırılması.

4.2 Helis Yarıçapının Yerdeğiştirmeye Etkisi

Bu çalışmada $d = 0.12 \text{ m}$ çaplı dairesel kesitli silindirik helisel çubuğun, serbest ucundan etkiyen tekil kuvvet etkisinde serbest ucunda oluşacak yerdeğiştirme incelenmiştir. Narinlik oranı,

$$\lambda = R/i, \quad i = \sqrt{I/A} \quad (4.10)$$

ile tanımlanır ve çubuğun uzunluğu ve kalınlığı arasındaki ilişkinin bir göstergesidir. Bu bölümde, farklı narinlik oranları için verilen yükleme durumunda serbest uçun yerdeğiştirmesi hesaplanmıştır. ABAQUS sonuçları ile karşılaştırma yapılmıştır (Çizelge 4.7).

$\lambda = 10$ için: Helis çapı, $R = 0.3$

$\lambda = 50$ için: Helis çapı, $R = 1.5$

$\lambda = 100$ için: Helis çapı, $R = 3$

$\lambda = 150$ için: Helis çapı, $R = 4.5$

$\bar{F}_z = 1000$ için verilen helis yarıçaplarına göre (4.5) denklemi kullanılarak uygulacak kuvvet belirlenmiştir.

Çubuğa ait diğer özellikler:

Elastiklik modülü, $E = 2.06 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

Poisson Oranı, $\nu = 0.3$

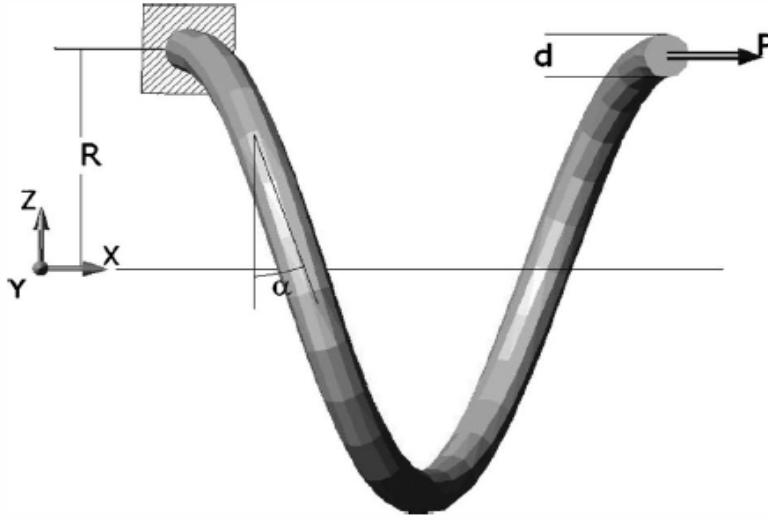
olarak verilmiştir. Çizelge 4.7'de yer alan karşılaştırma yapılırken sonlu eleman yazılımı ABAQUS'un verdiği global kartezyen eksen takımındaki serbest uçtaki düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (U_x, U_y, U_z) , helis üzerinde tanımlanmış Frenet eksen takımındaki değerlere (U_n, U_b, U_t) (4.6-8) denklemleri kullanılarak dönüştürülmüştür. Böylece, açığa bağlı olmadan, yer değiştirme yönü hakkında yorum yapmak mümkün olmuştur. Tüm yer değiştirme değerleri (4.9) denklemi kullanılarak boyutsuz hale getirilmiştir. Çizelge 4.7 incelendiğinde, genel olarak ABAQUS ve bu çalışmanın sonuçları arasındaki farkların %1'in altında olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.3 : Helis yarıçapının yerdeğıştirmeye etkisi

λ	α	θ/π	ABAQUS Sonuçları			Analitik Çalışma			Hata		
			\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t
10	5	1	-7.77E-04	7.72E-03	4.25E-04	-7.79E-04	7.77E-03	4.26E-04	0.08%	0.58%	0.23%
		2	-1.97E-03	1.53E-02	2.26E-03	-1.98E-03	1.54E-02	2.27E-03	0.18%	0.58%	0.45%
	15	1	-2.20E-03	7.33E-03	1.20E-03	-2.28E-03	7.40E-03	1.20E-03	0.14%	0.82%	0.33%
		2	-5.65E-03	1.36E-02	6.36E-03	-5.84E-03	1.37E-02	6.44E-03	0.19%	0.59%	1.29%
	25	1	-3.29E-03	6.67E-03	1.75E-03	-3.63E-03	6.73E-03	1.76E-03	0.16%	0.79%	0.79%
		2	-8.50E-03	1.06E-02	9.48E-03	-9.39E-03	1.06E-02	9.55E-03	0.13%	0.80%	0.81%
50	5	1	-7.67E-04	7.62E-03	4.13E-04	-7.76E-04	7.68E-03	4.18E-04	0.77%	0.87%	1.24%
		2	-1.97E-03	1.52E-02	2.24E-03	-1.98E-03	1.52E-02	2.26E-03	0.17%	0.55%	0.71%
	15	1	-2.19E-03	7.28E-03	1.17E-03	-2.27E-03	7.32E-03	1.18E-03	0.42%	0.51%	0.90%
		2	-5.63E-03	1.35E-02	6.35E-03	-5.84E-03	1.36E-02	6.40E-03	0.15%	0.51%	0.69%
	25	1	-3.26E-03	6.62E-03	1.72E-03	-3.61E-03	6.65E-03	1.73E-03	0.38%	0.44%	0.85%
		2	-8.48E-03	1.04E-02	9.41E-03	-9.37E-03	1.05E-02	9.47E-03	0.11%	0.42%	0.64%
100	5	1	-7.69E-04	7.64E-03	4.14E-04	-7.76E-04	7.68E-03	4.18E-04	0.46%	0.54%	0.94%
		2	-1.97E-03	1.52E-02	2.24E-03	-1.98E-03	1.52E-02	2.26E-03	0.17%	0.54%	0.72%
	15	1	-2.19E-03	7.28E-03	1.17E-03	-2.27E-03	7.32E-03	1.18E-03	0.44%	0.51%	0.91%
		2	-5.63E-03	1.35E-02	6.35E-03	-5.84E-03	1.35E-02	6.40E-03	0.15%	0.50%	0.69%
	25	1	-3.27E-03	6.63E-03	1.72E-03	-3.62E-03	6.66E-03	1.73E-03	0.39%	0.43%	0.85%
		2	-8.50E-03	1.05E-02	9.43E-03	-9.39E-03	1.05E-02	9.49E-03	0.11%	0.41%	0.63%
150	5	1	-7.69E-04	7.64E-03	4.14E-04	-7.76E-04	7.68E-03	4.18E-04	0.47%	0.54%	0.95%
		2	-1.97E-03	1.52E-02	2.24E-03	-1.98E-03	1.52E-02	2.26E-03	0.17%	0.54%	0.72%
	15	1	-2.18E-03	7.26E-03	1.16E-03	-2.27E-03	7.31E-03	1.18E-03	0.60%	0.78%	1.24%
		2	-5.63E-03	1.35E-02	6.35E-03	-5.84E-03	1.35E-02	6.40E-03	0.15%	0.50%	0.69%
	25	1	-3.27E-03	6.63E-03	1.72E-03	-3.62E-03	6.66E-03	1.73E-03	0.39%	0.43%	0.85%
		2	-8.50E-03	1.05E-02	9.43E-03	-9.39E-03	1.05E-02	9.49E-03	0.11%	0.41%	0.63%

4.3 Mevcut Yaylardaki Örneklerin Çözümü ve Sonuçların Karşılaştırılması

Bu bölümde mevcut yaylardaki bazı örnekler çözümlenerek sonuçlar karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.7 : Serbest ucundan tekil kuvvetle yüklü helisel çubuk (Jafari ve Mahjoob, 2010)

Jafari ve Mahjoob (2010) değişken kesitli eğri eksenli çubukların rijitlik matrisinin kesin çözümünde kullanmak üzere sonlu eleman yöntemi geliştirmiştir. Eğilme ve burulma momentleri, çekme ve basma kuvvetleri etkisindeki kompleks yapıdaki çubukların yapısal analizinin hassas ve doğru olarak yapılması amaçlanmıştır. Çalışmalarında bulunan örneklerden biri şekil 4.7’de görülmektedir: Bir ucu ankastre mesnetlenmiş diğer ucu serbest helisel yayın serbest ucuna +x yönünde P kuvveti etki etmektedir. Kesit ve malzeme özellikleri aşağıda verilmiştir:

$$d = 1, \quad R = 10, \quad P = 100, \quad E = 10^7, \quad \nu = 0.3, \quad \theta = 2\pi$$

Uniform kesite sahip yay, farklı helis açıları için incelenmiş ve serbest ucun x doğrultusundaki yer değişimi çizelge 4.1’de verilmiştir. Çözüm bölüm 4.1’de izlenen yol ile gerçekleştirilmiştir. Sonuçların uyumlu olduğu görülmektedir.

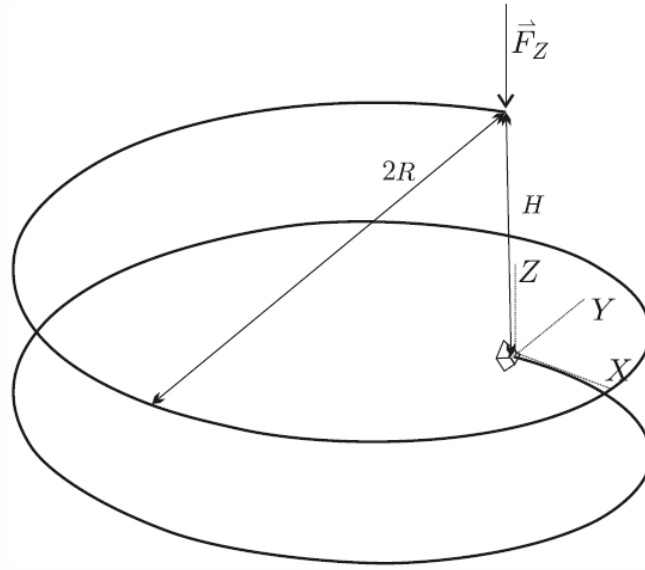
Çizelge 4.4 : Farklı helis açıları için serbest ucun yerdeğiştirme sonuçlarının karşılaştırılması

α	10°	20°	30°	40°
Jafari ve Mahjoob. (2010)	3.169	3.268	3.457	4.030
Analitik çalışma	3.176	3.275	3.465	4.039

İkinci örnek Zupan ve diğ. (2008)'dan çalışmasından alınmıştır (Şekil 4.8). Çalışmada, küçük yerdeğiştirme ve dönme olduğu varsayımıyla, değişken kesitli kirişler için, lineerleştirilmiş sonlu-birim uzama kiriş teorisine “wavelet” teorisini baz alan ayrıklaştırma uygulanmıştır. Sayısal uygulamalardan biri şekil 4.8’de görülmektedir. Bu örnekte, serbest ucundan $-z$ yönünde tekil kuvvet etkileyen, diğer ucu ankastre mesnetlenmiş çubuğun serbest ucunun yerdeğiştirmesi hesap edilmiştir. Kesit ve malzeme özellikleri ile uygulanan kuvvet boyutsuz olarak verilmiştir :

$$F = F_z = 1, \quad E = 0.207 \cdot 10^{12}, \quad G = 0.95 \cdot 10^{11},$$

$$R = 5, \quad H = 5, \quad r = 0.015, \quad \theta = 4\pi$$



Şekil 4.8 : Serbest ucundan tekil kuvvet etkileyen helisel çubuk (Zupan ve diğ., 2008)

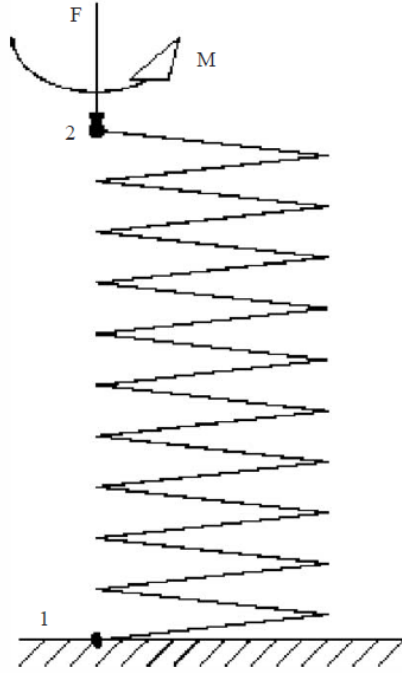
Uniform kesite sahip ($r = 0.015$) çubuk için çözüm bölüm 4.1’de izlenen yol ile gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar çizelge 4.9’da verilmiştir. Sonuçların uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.5 : Serbest ucun yerdeğiştirme miktarı ($\theta=4\pi$).

	U_x	U_y	U_z
Zupan ve diğ. (2008)	0.018127	-0.099119	-0.404918
Analitik çalışma	0.018311	-0.1000135	-0.409069

Taktak ve diğ. (2005) çalışmalarında, helisel çubuğun statik davranışını modellemek amacıyla her düğümü 6 serbestlik dereceli, toplam 2 düğüm noktası bulunan bir sonlu eleman sunmuştur. Formülasyon, kayma deformasyonu etkilerini içermektedir. Çalışmalarında bulunan bir örnek çözülmüş ABAQUS sonuçlarıyla beraber

karşılaştırılmıştır. Örnekte, helisel çubuk bir ucundan ankastre mesnetlenmiş, serbest ucundan ise tekil kuvvet ve moment ile yüklenmiştir (Şekil 4.9 ve 4.11).



Şekil 4.9 : Serbest ucundan tekil kuvvet ve moment ile yüklü silindirik helisel çubuk (Taktak ve diğ., 2005)

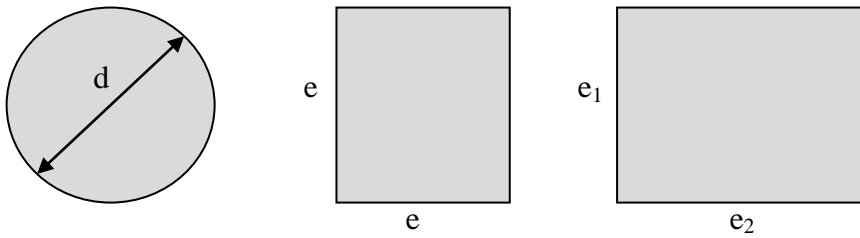
Çubuk geometrisi ve malzeme özellikleri aşağıda verilmiştir:

$$M = M_z = 60 \text{ Nm}, \quad F = F_z = 500 \text{ N}, \quad E = 2.1248 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2,$$

$$R = 0.0565 \text{ m}, \quad \nu = 0.28, \quad \theta = 20\pi, \quad \alpha = 4.19^\circ$$

Serbest uçta uygulanan tekil kuvvet ve moment $-z$ yönündedir (Şekil 4.9 ve 4.11).

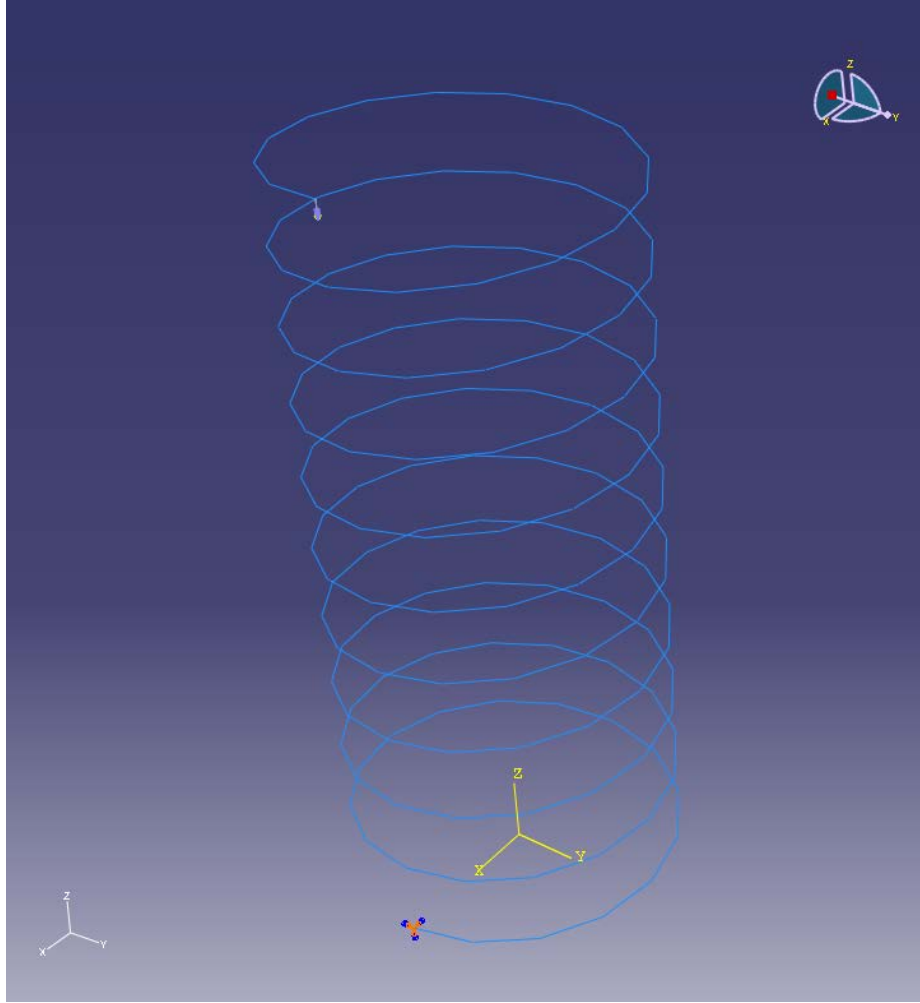
Dairesel kesit için kesit yarıçapı $d = 0.015 \text{ m}$, kare kesit için $e = 0.015 \text{ m}$ ve son olarak dikdörtgen kesit için $e_1 = 0.015 \text{ m}$, $e_2 = 0.0020 \text{ m}$ olarak verilmiştir (Şekil 4.10).



Şekil 4.10 : Dairesel, kare ve dikdörtgen kesit boyutları (Taktak ve diğ., 2005)

Verilen yükleme durumunda uniform kesite sahip helisel çubuğun serbest ucundaki yerdeğiştirmesi çizelge 4.10'da verilmiştir. Çözüm, bölüm 4.1'de izlenen yol ile gerçekleştirilmiştir. Fakat serbest uçta yazılan başlangıç değerlerinden moment ifadeleri aşağıdaki gibi değişecektir:

$$M_{n0} = 0, \quad M_{b0} = M_z \cos \alpha, \quad M_{t0} = M_z \sin \alpha \quad (4.11)$$



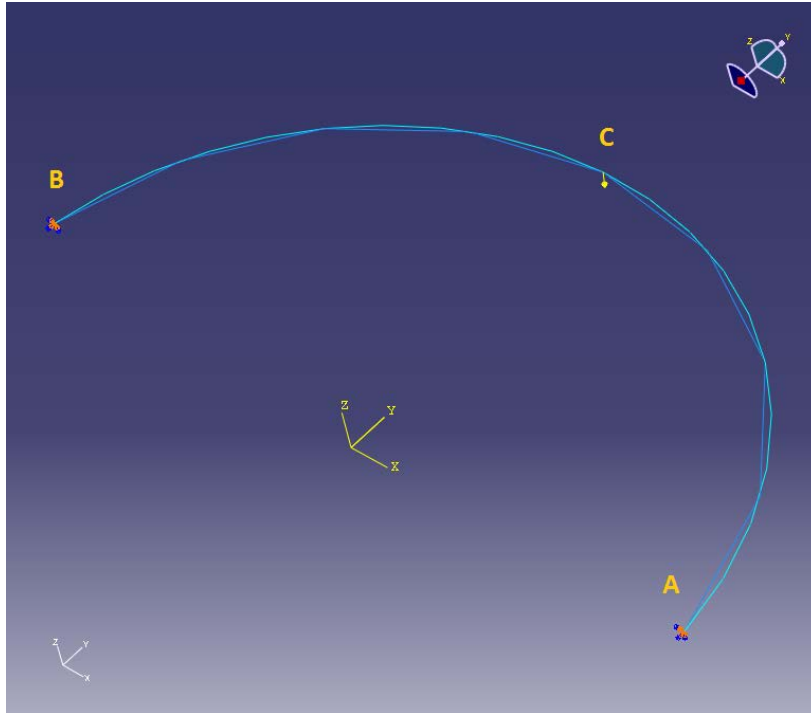
Şekil 4.11 : ABAQUS programında kullanılan bir model ($\theta = 20\pi$, $\alpha = 4.19^\circ$)

Burulma momenti I_t dairesel kesitler için polar eylemsizlik momentine eşittir. Çizelge 4.10 incelendiğinde dairesel kesit için tüm sonuçların uyumlu olduğu görülmektedir. Çarpılma olmadığı durumlarda, kare veya dikdörtgen kesitler için burulma momenti ise;

$$I_t = \frac{e_2 e_1^3}{3} \left[1 - 0.63 \frac{e_1}{e_2} \left(1 - \frac{e_1^4}{12 e_2^4} \right) \right] \quad e_2 \geq e_1 \text{ olmak üzere} \quad (4.12)$$

formülü ile yaklaşık olarak hesap edilir. Kare ve dikdörtgen kesitler için yapılan çözümlerde bu formül kullanılmıştır. ABAQUS sonuçları ile uyum elde edilmiştir. Taktak ve diğ. (2005) elde ettiği verilerle karşılaştırma yapıldığında ise kare kesitli silindirik helisel çubuğa ait sonuçların uyumlu olduğu, fakat, dikdörtgen kesitli silindirik helisel çubuğa ait sonuçlarda yerdeğiştirme vektörü bileşenlerinden U_x ve U_z , dönme vektörü bileşenlerinden Ω_y değerlerinin uyumsuz olduğu görülmüştür. Dikdörtgen kesitte, $I_t = I_p$ alınarak yapılan çözümde sonuçlar birbirine yaklaşmıştır. Kare kesitli silindirik helisel çubuğa ait çözümdeki uyumlu sonuçlardan dolayı, dikdörtgen kesitli silindirik helisel çubuk için yapılan hesaplamalardaki hatanın yazarların, I_t olarak belirlemeleri gereken değeri yanlışlıkla I_p olarak almalarından kaynaklandığı düşünülmektedir.

4.4 İki Bölge Çubukların İncelenmesi



Şekil 4.12 : ABAQUS programında kullanılan bir model ($\theta = \pi$, $\alpha = 5^\circ$)

Bu bölümde silindirik helisel çubuğun ortasına etkiyen tekil kuvvet ve momentler etkisinde etki noktasındaki yerdeğiştirme büyüklükleri hesaplanmış ve sonlu eleman programı ABAQUS ile sonuçlar karşılaştırılmıştır. ABAQUS programında her yarım çevrim için 20 adet kiriş elemanı kullanılmıştır. Çizim CATIA'da tamamlanıp .igs formatında programa aktarılmıştır.

Çizelge 4.6 : Dairesel, kare ve dikdörtgen kesitli helisel çubuğun serbest ucunun yerdeğiştirme ve dönmesi * $I_t = I_p$ alındığı durum

Kesit		U_x (m)	U_y (m)	U_z (m)	Ω_x (rad)	Ω_y (rad)	Ω_z (rad)
Daire	Taktak ve diğ. (2005)	0.028205	-0.024207	-0.026622	0	0.2170	-0.4090
	ABAQUS	0.028171	-0.024176	-0.026510	≈ 0	0.2167	-0.4084
	Analitik çalışma	0.028180	-0.024181	-0.026593	0	0.2168	-0.4086
Kare	Taktak ve diğ. (2005)	0.018317	-0.014539	-0.018163	0	0.1409	-0.2431
	ABAQUS	0.018295	-0.014519	-0.018085	≈ 0	0.1407	-0.2428
	Analitik çalışma	0.018314	-0.014530	-0.018162	0	0.1409	-0.2430
Dikdörtgen	Analitik çalışma*	0.016609	-0.014252	-0.015708	0	0.1409	-0.2408
	Taktak ve diğ. (2005)	0.008241	-0.010359	-0.008116	0	0.0633	-0.1783
	ABAQUS	0.009524	-0.010557	-0.009932	≈ 0	0.0732	-0.1797
	Analitik çalışma	0.009979	-0.010559	-0.009535	0	0.0733	-0.1798
	Analitik çalışma*	0.007973	-0.010327	-0.008116	0	0.0624	-0.1780

Şekil 4.12’de verilen ilk örnekte yatay açısı $\theta = \pi$ olan silindirik helisel çubuğun şekilde C ile gösterilen orta noktasından tekil kuvvet etki etmektedir. A ve B ile gösterilen diğer uçlar ankastre mesnetlenmiştir. Kuvvetin uygulama noktasındaki ($\theta = \pi/2$) yerdeğiştirme değerleri hesaplanacaktır.

$$F = F_z = 20000 \text{ N}, \quad E = 2.06 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2,$$

$$R = 0.3 \text{ m}, \quad \nu = 0.3, \quad \theta = \pi, \quad \alpha = 5^\circ$$

Serbest uçta uygulanan tekil kuvvet $-z$ yönündedir (Şekil 4.12). Çubuk, A-C ve C-B kısımları olmak üzere 2 bölgede incelenecektir. Çubuğun statik durumunu belirleyen (3.46), (3.50), (3.51), (3.52) denklemleri bu iki bölgeli sistem için çözülecektir.

Öncelikle A-C kısmı incelendiğinde, A noktasında başlangıç değerleri vektörünün 12 adet bilinmeyeni olduğu ve bunlardan sırasıyla dönme ve yerdeğiştirme bileşenlerinin,

$$\Omega_{An} = 0, \quad \Omega_{Ab} = 0, \quad \Omega_{At} = 0 \quad (4.13)$$

$$U_{An} = 0, \quad U_{Ab} = 0, \quad U_{At} = 0 \quad (4.14)$$

olarak görülecektir. C noktasında, iki bölge arasındaki 12 geçiş şartı;

$$F_{ACn} = F_{CBn}, \quad F_{ACb} = F_{CBb} - F \cos \alpha, \quad F_{ACt} = F_{CBt} - F \sin \alpha \quad (4.15)$$

$$M_{ACn} = M_{CBn}, \quad M_{ACb} = M_{CBb}, \quad M_{ACt} = M_{CBt} \quad (4.16)$$

$$\Omega_{ACn} = \Omega_{CBn}, \quad \Omega_{ACb} = \Omega_{CBb}, \quad \Omega_{ACt} = \Omega_{CBt} \quad (4.17)$$

$$U_{ACn} = U_{CBn}, \quad U_{ACb} = U_{CBb}, \quad U_{ACt} = U_{CBt} \quad (4.18)$$

olarak yazılır. Çubuğun C-B bölgesi için B noktasında,

$$\Omega_{Bn} = 0, \quad \Omega_{Bb} = 0, \quad \Omega_{Bt} = 0 \quad (4.19)$$

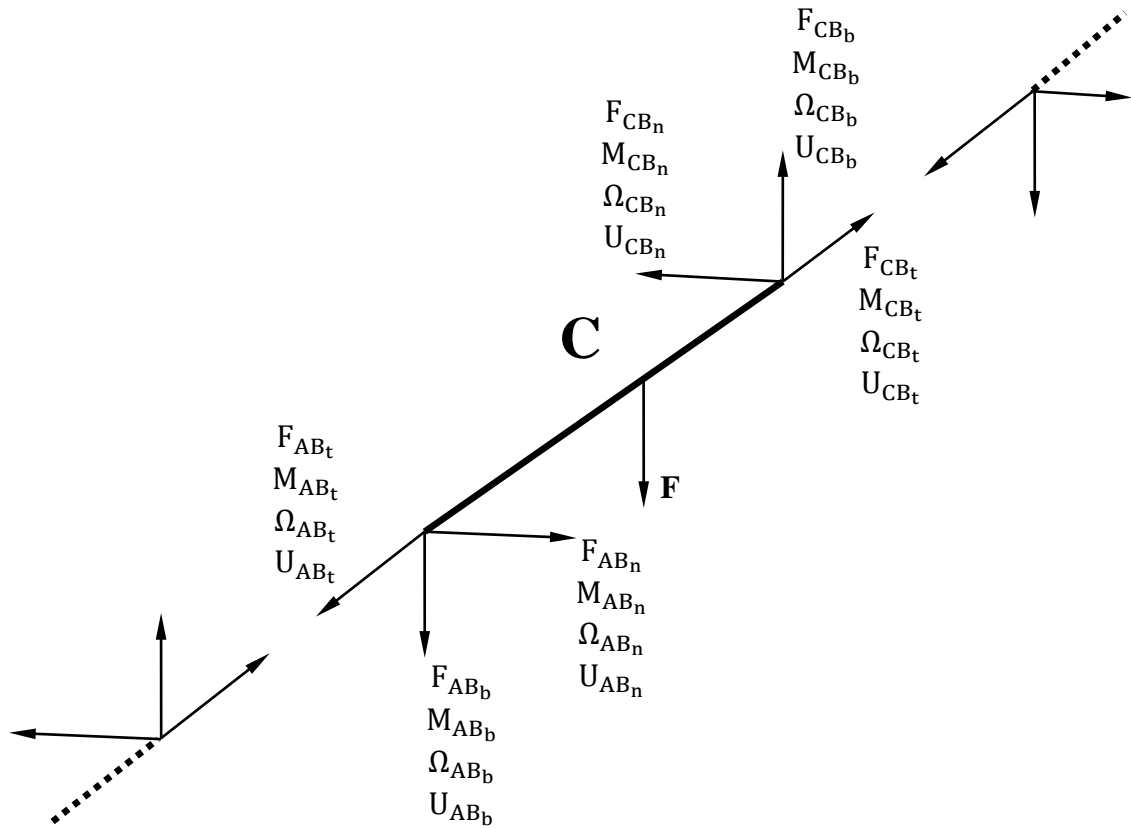
$$U_{Bn} = 0, \quad U_{Bb} = 0, \quad U_{Bt} = 0 \quad (4.20)$$

sınır şartları yazılabilir. Böylece A-C bölgesinin A noktasındaki 12 adet başlangıç değeri ile C-B kısmının C noktasındaki 12 başlangıç değeri yukarıdaki 24 denklem yardımıyla bulunur. Başlangıç değerleri vektörü bulunduğu anda ise çubuğun statik durumunu belirleyen (3.46), (3.50), (3.51), (3.52) denklemleri kullanılarak istenen nokta için değişken değerleri hesaplanabilir.

Çizelge 4.11'deki sonuçlar incelendiğinde verilen yükleme durumunda, $\theta = \pi/2$ 'de sonuçların ABAQUS ile uyumlu olduğu görülmektedir:

Çizelge 4.7 : $\theta = \pi/2$ 'de yerdeğiştirme bileşenlerinin değeri

	U_n	U_b	U_t
ABAQUS	-5.38E-11	7.23E-05	-1.23E-06
Analitik çalışma	-5.35E-11	7.21E-05	-1.24E-06



Şekil 4.13 : Çubuğun C noktasındaki denge durumu

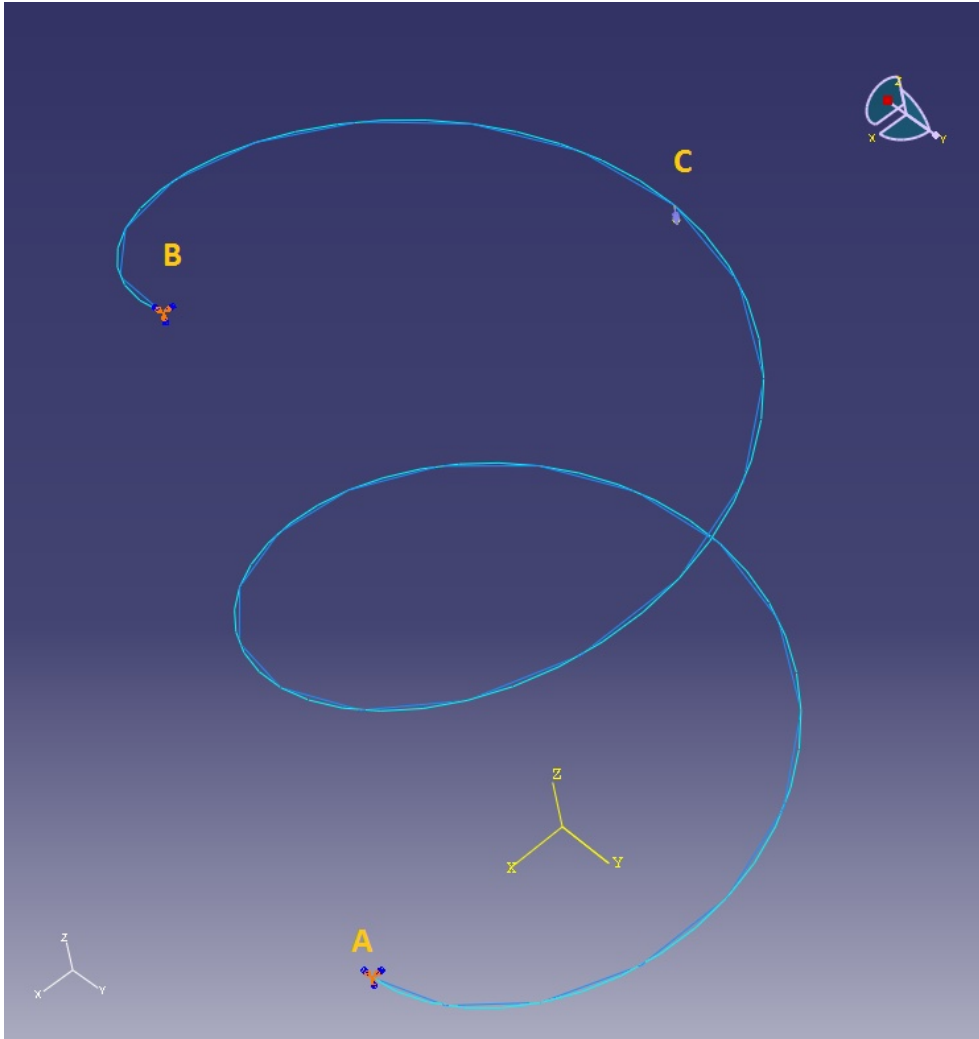
Şekil 4.13’de verilen ikinci örnekte yatay açısı $\theta = 4\pi$ olan silindirik helisel çubuğun şekilde C ile gösterilen $\theta = 3\pi$ ’deki noktasından $-z$ yönünde tekil kuvvet ve moment uygulanmaktadır. A ve B ile gösterilen diğer uçlar ankastre mesnetlenmiştir. Kuvvetin uygulama noktasındaki ($\theta = \pi/2$) yerdeğiştirme değerleri hesaplanacaktır.

$$F = F_z = 2000 \text{ N}, \quad M = M_z = 100 \text{ Nm} \quad E = 2.06 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 ,$$

$$R = 0.3 \text{ m}, \quad \nu = 0.3, \quad \theta = \pi, \quad \alpha = 15^\circ$$

Çözümde bir önceki örnekteki yol izlenecektir. Fakat, sınır şartlarında moment için yazılan kısımda aşağıdaki değişiklik yapılacaktır:

$$M_{ACn} = M_{CBn}, \quad M_{ACb} = M_{CBb} - M \cos \alpha, \quad M_{ACt} = M_{CBt} - M \sin \alpha \quad (4.21)$$



Şekil 4.14: ABAQUS programında kullanılan bir model ($\theta = 4\pi$, $\alpha = 15^\circ$)

Çizelge 4.12 incelendiğinde verilen yükleme durumunda, $\theta = 3\pi$ 'de sonuçların ABAQUS ile uyumlu olduğu görülmektedir:

Çizelge 4.8 : $\theta = 3\pi$ 'de yerdeğiştirme bileşenlerinin değeri

	U_n	U_b	U_t
ABAQUS	1.39E-03	5.04E-03	3.12E-04
Analitik çalışma	1.36E-03	5.03E-03	3.14E-04

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, helisel çubukların statik davranışını ifade eden diferansiyel denklem takımı, eksen uzaması ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınarak elde edilmiştir. Elde edilen bu diferansiyel denklem takımı, helis yarıçapının ve çubuk kesitinin değişimini de içerdiği için, en genel durumda değişken katsayılı, lineer ve homojen bir denklem takımıdır. Bu değişken katsayılı homojen diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. Çözümlerde, çubuk kesitinin çift simetrik olduğu, kesitin geometrik merkezi ile kayma merkezinin çakışmakta olduğu, normal ve binormal eksenleri kesitin asal eksenleri olduğu, çarpılma olmadığı, çubuğun elastik, homojen ve izotrop malzemeden yapıldığı varsayılmıştır. Örnekler, sabit kesitli, silindirik helisel çubuklar için çözülmüştür. Hesaplamalarda, MATHEMATICA yazılımı kullanılmıştır.

Yapılan çalışmalar incelendiğinde, çubukların statik davranışını ifade eden diferansiyel denklem takımının çözümünde yaklaşık yöntemlerle sonuca ulaşılmaya çalışıldığı görülmüştür. Mevcut yayınlardaki bazı örnekler çözülerek sonuçlar karşılaştırıldığında, genelde uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. Bölüm 4.3'te incelenen, Taktak ve diğ. (2005) çalışmalarında bulunan serbest ucundan tekil kuvvet ve moment ile yüklü dikdörtgen kesitli silindirik helisel çubuğun serbest ucuna ait dönme ve yerdeğiştirme bileşenlerindeki görülen uyumsuzluğun yazarların kesit alanının burulma eylemsizlik momenti I_t 'yi, kesit alanının polar eylemsizlik momenti I_p 'ye eşit almasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Sonlu eleman programlarının sonuçları incelendiğinde ise ABAQUS yazılımında çok yakın değerler elde edilirken, ANSYS yazılımında büyük farklılıklar görülmüştür. ANSYS sonuçlarında, uygulanan basma kuvvetine karşılık yerdeğiştirmelerin ekseni uzatacak yönde olması, tam çevrimlerde hatanın %1'in altında iken diğer açılarda %300 gibi çok büyük değerlere ulaşması, mevcut hatanın programdan kaynaklandığı düşündürmektedir.

Değişken kesitli, elastik, izotrop malzemeli çubukların genel statik problemleri eksen uzaması, kayma deformasyonu etkileri gözönüne alınarak incelendiği bu çalışma, helisel çubuklara uygulanmıştır. Örneklerde, tekil kuvvet ve momentler etkisindeki çubuklardaki dönme ve yerdeğiştirme bileşenleri incelenmiş ve sonuçlar ilgili yayınlarla ve sonlu eleman programlarıyla karşılaştırılmıştır. Çalışmalar yayılı yüklerin etkisindeki çubukların incelenmesi ve çubuk titreşimlerinin incelenmesi ile genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- Cinemre, V.**, 1982: “Çubuk teorisinde yer ve şekil değiştirme ilişkileri”, İ.T.Ü. Dergisi, Cilt **40**, pp. 3-6.
- Eisenberg, M., and Busool, W.**, 2001: Exact static analysis of helicoidal structures of arbitrary shape and variable cross section. *J. Struct. Eng.*, Vol. **127**, pp. 1266-1275.
- Girgin, K.**, 2006: Free vibration analysis of non-cylindrical helices with, variable cross-section by using mixed FEM. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **297**, pp. 931-945.
- Holmes, A. M. C.**, 1957: Analysis of helical beams under symmetrical loading” *J. Struc. Div.*, ASCE, Vol. **83(6)**, pp. 1-37.
- İnan, M.**, 1966: Elastik Çubukların Genel Teorisi. İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- Jafari, M., and Mahjoob, M. J.**, 2010: An exact three-dimensional beam element with nonuniform cross section. *J. App. Mech.*, Vol. **77**, pp. 061009-1-061009-7.
- Love, A.E.M.**, 1899: The propagation of waves of elastic displacement along a helical wire, *Transactions of Cambridge Philosophical Society*, pp. 364-374.
- Love, A.E.M.**, 1944: A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover Publication, New York.
- Omurtag, M. H., Akoz, A.Y.**, 1991: The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading, *Computers and Structures*, Vol. **43**, pp. 325-331.
- Scordelis, A.C.**, 1960: Internal forces in uniformly loaded helicoidal girders, *Journal of American Concrete Institute*, Vol. **56**, pp. 1013-1026.
- Taktak, M., Dammak, F., Abid, S., and Haddar, M.**, 2005: A mixed-hybrid finite element for three-dimensional isotropic helical beam analysis. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. **47**, pp. 209-229.
- Tufekci, E., and Arpacı, A.**, 2005: Analytical solutions of in-plane static problems for non-uniform curved beams including axial and shear deformations” *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. **22**, pp. 131-150.

- Tufekci, E., and Dogruer, O.Y.** 2006: Exact solution of out-of-plane problems of an arch with varying curvature and cross section. *J. Eng.Mech.*, Vol. 132, pp. 600-609.
- Tüfekçi, E.**, 1994: Eğri eksenli düzlemsel çubukların statik ve dinamik problemlerinin analitik çözümü, *Doktora Tezi*, İTÜ, İstanbul.
- Yoshimura, Y., and Murata, Y.**, 1952: On the elastic waves propagated along coil springs. *Institute of Science and Technology*, Vol. 6, Tokyo Uni.
- Young, Y. F., Scordelis, A.C.** 1999: An analytical and experimental study of helicoidal girders, *Proceedings of American Society of Civil Engineering*, ST1756.
- Yıldırım, V.**, 1997: Natural frequencies of helical springs of arbitrary shape, *J. Sound and Vibration*, Vol. 204(2), pp. 311-329.
- Yu, A., and Yang, C.**, 2009: Formulation and evaluation of an analytical study for cylindrical helical springs. *Acta Mech. Solida Sinica*, Vol. 23, pp. 85-94.
- Zupan, E., Zupan, D., and Saje, M.** 2009: The wavelet-based theory of spatial naturally curved and twisted linear beams. *Computational Mech.*, Vol. 43, pp. 675–686.

EKLER

EK A.1 : ANSYS yazılımında helis çizimi için kullanılan makro

EK A.1

```
!HELIX1.MAC
!HELIS CIZIMI ICIN KULLANILAN MAKRO
/PREP7
PI=4*ATAN(1)
T=0
DT=2*PI/(4*ARG3-1)
*DO,I,1,4*ARG3
K,,ARG1*SIN(T),ARG1*COS(T),ARG2*T
T=T+DT
*ENDDO
HELIX2,ARG3
LGEN,ARG4,ALL,,,,,2*PI*ARG2
LGLUE,ALL
/EOF

!HELIX2.MAC
KSEL,S,KP,,1,ARG1+1
BSPLIN,ALL
KSEL,S,KP,,ARG1+1,2*ARG1+1
BSPLIN,ALL
KSEL,S,KP,,2*ARG1+1,3*ARG1+1
BSPLIN,ALL
KSEL,S,KP,,3*ARG1+1,4*ARG1+1
BSPLIN,ALL
ALLSEL
LGLUE,ALL
```

Çizelge A.1 : $R = 0.3 \text{ m}$, $\alpha = 15^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait $\bar{U}_n, \bar{U}_b, \bar{U}_t$ değerlerinin karşılaştırılması.

n	ANSYS			Analitik Çalışma			Hata		
	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t
0.25	-2.17E-04	1.53E-03	4.23E-05	-1.97E-04	1.27E-03	4.92E-05	10.22%	20.52%	13.96%
0.5	-2.52E-03	8.49E-03	1.01E-03	-2.27E-03	7.37E-03	1.20E-03	10.80%	15.18%	15.10%
0.75	-5.71E-03	1.38E-02	3.48E-03	-5.19E-03	1.29E-02	4.58E-03	9.98%	6.88%	23.98%
1	-5.82E-03	1.37E-02	6.40E-03	-5.82E-03	1.37E-02	6.42E-03	0.11%	0.03%	0.24%
1.25	-7.08E-03	1.59E-02	3.75E-03	-6.84E-03	1.54E-02	4.68E-03	3.48%	3.25%	19.85%
1.5	-1.45E-02	2.39E-02	9.69E-04	-1.39E-02	2.21E-02	3.59E-03	3.95%	7.98%	72.99%
1.75	-2.24E-02	2.91E-02	3.53E-03	-2.18E-02	2.70E-02	9.20E-03	2.50%	7.79%	61.60%
2	-2.33E-02	2.73E-02	1.28E-02	-2.33E-02	2.73E-02	1.28E-02	0.11%	0.03%	0.25%
2.25	-2.55E-02	3.06E-02	6.28E-03	-2.51E-02	2.95E-02	9.30E-03	1.61%	3.58%	32.53%
2.5	-3.78E-02	3.99E-02	-1.42E-03	-3.72E-02	3.68E-02	5.98E-03	1.65%	8.25%	123.68%
2.75	-5.01E-02	4.54E-02	1.15E-04	-5.01E-02	4.11E-02	1.38E-02	0.04%	10.34%	99.17%
3	-5.24E-02	4.10E-02	1.92E-02	-5.24E-02	4.10E-02	1.92E-02	0.10%	0.03%	0.25%
3.25	-5.55E-02	4.56E-02	7.63E-03	-5.50E-02	4.37E-02	1.39E-02	0.95%	4.42%	45.23%
3.5	-7.25E-02	5.65E-02	-6.14E-03	-7.21E-02	5.16E-02	8.37E-03	0.60%	9.57%	173.35%
4	-9.32E-02	5.46E-02	2.56E-02	-9.31E-02	5.46E-02	2.57E-02	0.10%	0.02%	0.26%
4.5	-1.19E-01	7.38E-02	-1.32E-02	-1.19E-01	6.63E-02	1.08E-02	0.01%	11.26%	222.67%
5	-1.46E-01	6.83E-02	3.20E-02	-1.45E-01	6.83E-02	3.21E-02	0.10%	0.02%	0.26%
5.5	-1.76E-01	9.17E-02	-2.26E-02	-1.77E-01	8.10E-02	1.32E-02	0.36%	13.10%	271.84%
6	-2.10E-01	8.19E-02	3.84E-02	-2.09E-01	8.19E-02	3.85E-02	0.10%	0.02%	0.27%
6.5	-2.45E-01	1.10E-01	-3.43E-02	-2.47E-01	9.58E-02	1.55E-02	0.63%	15.03%	320.92%
7	-2.85E-01	9.56E-02	4.48E-02	-2.85E-01	9.56E-02	4.49E-02	0.10%	0.02%	0.27%
7.5	-3.25E-01	1.29E-01	-4.84E-02	-3.28E-01	1.11E-01	1.79E-02	0.82%	17.02%	369.97%

Çizelge A.2 : $R = 0.3 \text{ m}$, $\alpha = 25^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait \bar{U}_n , \bar{U}_b , \bar{U}_t değerlerinin karşılaştırılması.

n	ANSYS			Analitik Çalışma			Hata		
	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t
0.25	-3.49E-04	1.49E-03	6.28E-05	-3.17E-04	1.23E-03	7.35E-05	9.96%	20.99%	14.61%
0.5	-4.00E-03	7.87E-03	1.48E-03	-3.62E-03	6.70E-03	1.76E-03	10.53%	17.50%	15.82%
0.75	-9.07E-03	1.19E-02	5.03E-03	-8.31E-03	1.06E-02	6.74E-03	9.14%	11.60%	25.40%
1	-9.37E-03	1.06E-02	9.50E-03	-9.36E-03	1.06E-02	9.52E-03	0.14%	0.06%	0.19%
1.25	-1.14E-02	1.40E-02	5.49E-03	-1.10E-02	1.31E-02	6.89E-03	3.40%	6.91%	20.27%
1.5	-2.32E-02	2.30E-02	1.32E-03	-2.23E-02	2.01E-02	5.27E-03	3.80%	14.36%	74.97%
1.75	-3.58E-02	2.71E-02	5.02E-03	-3.50E-02	2.25E-02	1.36E-02	2.38%	20.31%	62.97%
2	-3.75E-02	2.12E-02	1.90E-02	-3.74E-02	2.12E-02	1.90E-02	0.14%	0.07%	0.20%
2.25	-4.11E-02	2.73E-02	9.15E-03	-4.05E-02	2.50E-02	1.37E-02	1.59%	9.53%	33.25%
2.5	-6.07E-02	3.98E-02	-2.37E-03	-5.98E-02	3.35E-02	8.79E-03	1.56%	18.64%	126.98%
2.75	-8.04E-02	4.46E-02	-3.00E-04	-8.04E-02	3.44E-02	2.04E-02	0.04%	29.77%	101.47%
3	-8.43E-02	3.18E-02	2.85E-02	-8.42E-02	3.18E-02	2.85E-02	0.14%	0.07%	0.20%
3.25	-8.95E-02	4.15E-02	1.10E-02	-8.86E-02	3.68E-02	2.05E-02	0.95%	12.72%	46.27%
3.5	-1.17E-01	5.82E-02	-9.59E-03	-1.16E-01	4.69E-02	1.23E-02	0.55%	23.98%	177.97%
4	-1.50E-01	4.24E-02	3.80E-02	-1.50E-01	4.24E-02	3.81E-02	0.14%	0.07%	0.21%
4.5	-1.91E-01	7.82E-02	-2.03E-02	-1.91E-01	6.03E-02	1.58E-02	0.02%	29.69%	228.60%
5	-2.34E-01	5.31E-02	4.75E-02	-2.34E-01	5.30E-02	4.76E-02	0.14%	0.07%	0.21%
5.5	-2.83E-01	9.99E-02	-3.46E-02	-2.84E-01	7.37E-02	1.93E-02	0.39%	35.54%	279.11%
6	-3.37E-01	6.37E-02	5.70E-02	-3.37E-01	6.36E-02	5.71E-02	0.14%	0.07%	0.21%
6.5	-3.94E-01	1.23E-01	-5.24E-02	-3.97E-01	8.71E-02	2.28E-02	0.64%	41.49%	329.52%
7	-4.59E-01	7.43E-02	6.65E-02	-4.58E-01	7.42E-02	6.66E-02	0.14%	0.07%	0.22%
7.5	-5.22E-01	1.47E-01	-7.40E-02	-5.28E-01	1.01E-01	2.64E-02	1.13%	46.24%	380.91%

Çizelge A.3 : R = 0.3 m, $\alpha = 15^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait $\bar{U}_n, \bar{U}_b, \bar{U}_t$ değerlerinin karşılaştırılması.

n	ABAQUS			Analitik Çalışma			Hata		
	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t
0.25	-2.00E-04	1.27E-03	4.76E-05	-1.97E-04	1.27E-03	4.92E-05	1.24%	0.15%	3.23%
0.5	-2.27E-03	7.31E-03	1.19E-03	-2.27E-03	7.37E-03	1.20E-03	0.14%	0.82%	0.33%
0.75	-5.17E-03	1.28E-02	4.55E-03	-5.19E-03	1.29E-02	4.58E-03	0.32%	0.65%	0.54%
1	-5.83E-03	1.36E-02	6.33E-03	-5.82E-03	1.37E-02	6.42E-03	0.19%	0.59%	1.29%
1.25	-6.84E-03	1.53E-02	4.65E-03	-6.84E-03	1.54E-02	4.68E-03	0.04%	0.63%	0.61%
1.5	-1.39E-02	2.20E-02	3.57E-03	-1.39E-02	2.21E-02	3.59E-03	0.14%	0.68%	0.40%
1.75	-2.18E-02	2.68E-02	9.15E-03	-2.18E-02	2.70E-02	9.20E-03	0.25%	0.66%	0.56%
2	-2.32E-02	2.71E-02	1.28E-02	-2.33E-02	2.73E-02	1.28E-02	0.17%	0.68%	0.59%
2.25	-2.51E-02	2.93E-02	9.25E-03	-2.51E-02	2.95E-02	9.30E-03	0.06%	0.65%	0.60%
2.5	-3.71E-02	3.66E-02	5.95E-03	-3.72E-02	3.68E-02	5.98E-03	0.15%	0.68%	0.38%
2.75	-5.00E-02	4.09E-02	1.38E-02	-5.01E-02	4.11E-02	1.38E-02	0.22%	0.66%	0.58%
3	-5.23E-02	4.07E-02	1.91E-02	-5.24E-02	4.10E-02	1.92E-02	0.17%	0.68%	0.58%
3.25	-5.50E-02	4.34E-02	1.38E-02	-5.50E-02	4.37E-02	1.39E-02	0.10%	0.66%	0.59%
3.5	-7.20E-02	5.12E-02	8.34E-03	-7.21E-02	5.16E-02	8.37E-03	0.16%	0.68%	0.36%
4	-9.29E-02	5.43E-02	2.55E-02	-9.31E-02	5.46E-02	2.57E-02	0.17%	0.68%	0.59%
4.5	-1.18E-01	6.59E-02	1.07E-02	-1.19E-01	6.63E-02	1.08E-02	0.16%	0.68%	0.33%
5	-1.45E-01	6.78E-02	3.19E-02	-1.45E-01	6.83E-02	3.21E-02	0.16%	0.68%	0.59%
5.5	-1.76E-01	8.05E-02	1.31E-02	-1.77E-01	8.10E-02	1.32E-02	0.16%	0.68%	0.38%
6	-2.09E-01	8.14E-02	3.83E-02	-2.09E-01	8.19E-02	3.85E-02	0.16%	0.68%	0.58%
6.5	-2.46E-01	9.51E-02	1.55E-02	-2.47E-01	9.58E-02	1.55E-02	0.16%	0.68%	0.27%
7	-2.85E-01	9.49E-02	4.48E-02	-2.85E-01	9.56E-02	4.49E-02	0.17%	0.72%	0.23%
7.5	-3.27E-01	1.10E-01	1.79E-02	-3.28E-01	1.11E-01	1.79E-02	0.16%	0.68%	0.38%

Çizelge A.4 : R = 0.3 m, $\alpha = 25^\circ$ için hesaplanan, serbest uca ait $\bar{U}_n, \bar{U}_b, \bar{U}_t$ değerlerinin karşılaştırılması.

n	ABAQUS			Analitik Çalışma			Hata		
	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t	\bar{U}_n	\bar{U}_b	\bar{U}_t
0.25	-3.20E-04	1.23E-03	7.10E-05	-3.17E-04	1.23E-03	7.35E-05	0.86%	0.26%	3.43%
0.5	-3.61E-03	6.65E-03	1.74E-03	-3.62E-03	6.70E-03	1.76E-03	0.16%	0.79%	0.79%
0.75	-8.28E-03	1.05E-02	6.69E-03	-8.31E-03	1.06E-02	6.74E-03	0.36%	0.77%	0.78%
1	-9.34E-03	1.05E-02	9.44E-03	-9.36E-03	1.06E-02	9.52E-03	0.13%	0.80%	0.81%
1.25	-1.11E-02	1.30E-02	6.83E-03	-1.10E-02	1.31E-02	6.89E-03	0.11%	0.74%	0.87%
1.5	-2.23E-02	1.99E-02	5.23E-03	-2.23E-02	2.01E-02	5.27E-03	0.13%	0.80%	0.77%
1.75	-3.49E-02	2.23E-02	1.35E-02	-3.50E-02	2.25E-02	1.36E-02	0.25%	0.79%	0.80%
2	-3.74E-02	2.10E-02	1.89E-02	-3.74E-02	2.12E-02	1.90E-02	0.13%	0.80%	0.81%
2.25	-4.05E-02	2.48E-02	1.36E-02	-4.05E-02	2.50E-02	1.37E-02	0.00%	0.76%	0.87%
2.5	-5.97E-02	3.32E-02	8.72E-03	-5.98E-02	3.35E-02	8.79E-03	0.13%	0.80%	0.77%
2.75	-8.03E-02	3.41E-02	2.02E-02	-8.04E-02	3.44E-02	2.04E-02	0.21%	0.79%	0.81%
3	-8.41E-02	3.16E-02	2.83E-02	-8.42E-02	3.18E-02	2.85E-02	0.13%	0.80%	0.81%
3.25	-8.86E-02	3.65E-02	2.04E-02	-8.86E-02	3.68E-02	2.05E-02	0.04%	0.78%	0.84%
3.5	-1.16E-01	4.65E-02	1.22E-02	-1.16E-01	4.69E-02	1.23E-02	0.13%	0.80%	0.77%
4	-1.50E-01	4.21E-02	3.78E-02	-1.50E-01	4.24E-02	3.81E-02	0.13%	0.80%	0.80%
4.5	-1.91E-01	5.98E-02	1.57E-02	-1.91E-01	6.03E-02	1.58E-02	0.13%	0.81%	0.76%
5	-2.34E-01	5.26E-02	4.72E-02	-2.34E-01	5.30E-02	4.76E-02	0.13%	0.80%	0.81%
5.5	-2.84E-01	7.31E-02	1.92E-02	-2.84E-01	7.37E-02	1.93E-02	0.13%	0.81%	0.74%
6	-3.36E-01	6.31E-02	5.66E-02	-3.37E-01	6.36E-02	5.71E-02	0.13%	0.80%	0.81%
6.5	-3.96E-01	8.64E-02	2.27E-02	-3.97E-01	8.71E-02	2.28E-02	0.13%	0.81%	0.76%
7	-4.58E-01	7.36E-02	6.61E-02	-4.58E-01	7.42E-02	6.66E-02	0.13%	0.81%	0.80%
7.5	-5.27E-01	9.97E-02	2.62E-02	-5.28E-01	1.01E-01	2.64E-02	0.13%	0.81%	0.75%

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Serhan Aydın AYA

Doğum Yeri ve Tarihi: Malatya, 30.07.1985

Adres: İstanbul Teknik Üniversitesi Makina Fakültesi İnönü Cad. No: 65 Beyoğlu
34467 İstanbul

Lisans Üniversitesi: İstanbul Teknik Üniversitesi

Haziran 2008 – Ocak 2009 İTÜ Mekatronik Eğitim ve Araştırma Merkezi'nde Prof.
Dr. Ata Muğan yönetiminde Araştırma Elemanı olarak
görev aldı.

Şubat 2009 - İTÜ Makina Mühendisliği Mukavemet Birimi'nde Araştırma
Görevlisi olarak çalışmaktadır.