



ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRE EKSENLİ KİRİŞLERİN STATİK ANALİZİ

Ahmet DİNÇ ve Faruk Fırat ÇALIM
Mustafa Kemal Üniversitesi/İnşaat Mühendisliği Bölümü, İskenderun/HATAY

ÖZET

Bu çalışmada, Winkler tipi elastik zemine oturan daire eksenli kirişlerin statik analizi teorik olarak incelenmiştir. Tabii burulmuş ve eğilmiş uzaysal çubukları idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanılarak elde edilmiş ve elastik zemine oturan daire eksenli çubuklar için tekrar yazılmıştır. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Çubuk malzemesi homojen, lineer elastik ve izotropik kabul edilmiştir. Skaler formdaki adi diferansiyel denklemler, problemin rijitlik matrisini kesin olarak hesaplamak için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile sayısal olarak çözülmektedir. Elastik zemine oturan daire eksenli kirişlerin statik analizi için çeşitli örnekler ele alınmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçların literatürdeki mevcut sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmüştür.

GİRİŞ

Elastik zemine oturan kirişler ve plaklar mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Elastik zemine oturan kirişlerin analizlerinde Winkler, Pasternak ve Vlasov gibi çeşitli zemin modelleri kullanılmaktadır. Literatürde, elastik zemine oturan doğru eksenli kirişlerin statik ve dinamik analizleri ile ilgili birçok çalışma olmasına rağmen elastik zemine oturan daire eksenli çubukların analizlerine ait yeterli çalışma bulunmamaktadır.

Kıral ve Ertepinar (1974) statik yükleme altında elastik zemine oturan kirişlerin davranışını incelemişlerdir. Dasgupta ve Sengupta (1988) elastik zemine oturan eğri eksenli çubukların çözümü için üç düğümlü izoparametrik kiriş elemanı kullanarak bir sonlu eleman modeli geliştirmiştir. Formülasyonda, kayma deformasyonu etkisini dahil etmişlerdir. Banan ve ark. (1989) elastik zemine oturan uzaysal eğri eksenli kirişlerin çözümü için genel bir sonlu eleman formülasyonu geliştirmişlerdir. Haktanır and Kıral (1993) elastik ve izotropik malzemeden yapılmış helisel çubukların statik analizini taşıma matrisi yöntemine dayalı rijitlik matrisi yöntemi ile çalışmışlardır. Kadioğlu (1994) ve Erim (1997) Winkler tipi elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubukların statik analizini incelemişlerdir Aköz and Kadioğlu (1996) karışık sonlu eleman formülasyonu kullanarak elastik zemine oturan değişken kesite sahip daire eksenli çubukların keyfi yükler altında statik analizini incelemişlerdir. Zubaroğlu (1994) elastik zemine oturan daire eksenli çubukların analizini taşıma matrisi yöntemi ile incelemiştir. Çalim ve Akkurt (2011) elastik zemine oturan eğri eksenli çubukların statik ve serbest titreşim analizini çalışmışlardır. Daha sonraları Çalim (2012) elastik zemine oturan eğri eksenli kirişlerin zorlanmış titreşimini incelemiştir.

Bu çalışmada, elastik zemine oturan daire eksenli kirişlerin statik analizi için etkin bir yöntem sunulmuştur. Elastik zemine oturan daire eksenli kirişleri idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Kanonik formda elde edilen diferansiyel denklemlere tamamlayıcı fonksiyonlar

yöntemi uygulanarak problemin rijitlik matrisi istenildiği kadar hassasiyette kesin olarak hesaplanmıştır. Bu, genel sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde büyük avantajlar sağlamaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde, problemi yüzlerce eleman ile tanımlamak gerekirken, önerilen bu yöntemde sadece birkaç elemanla tanımlayarak istenilen hassasiyette kesin sonuçlar elde edilmektedir. Değişken katsayılı adi diferansiyel denklemler de tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla çözülebilmektedir.

FORMÜLASYON

Çubuk ekseninde herhangi bir s noktasında yer değiştirme \mathbf{U}^o ve bu noktadaki kesitin dönmesi Ω^o olarak gösterilsin. \mathbf{T} vektörü ile s noktasındaki kesite etkiyen iç kuvvetlerin vektörel toplamı ve \mathbf{M} ile bunların ağırlık merkezine indirgendikleri zaman elde edilen kuvvet çifti olarak gösterilsin. Çubuk ekseninin birim boyuna etkiyen yayılı dış kuvvet \mathbf{p} ve moment \mathbf{m} olsun. Çubuk malzemesi lineer elastik ve izotropiktir. Uzaysal çubuğu idare eden denklemler vektörel formda elde edilmektedir.

$$\boldsymbol{\gamma}^o = \frac{\partial \mathbf{U}^o}{\partial s} + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega}^o, \quad \boldsymbol{\omega}^o = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}^o}{\partial s} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}^o}{\partial s} + \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}^o}{\partial s} + \mathbf{t} \times \mathbf{T}^o + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (2)$$

Çubuk kesitinin kayma merkezi ile geometrik merkezinin çakıştığı, kesit çarpılmasının ihmal edildiğini göz önüne alarak ve çubuk malzemesinin homojen, izotrop ve lineer elastik olduğu kabulü altında bünye denklemleri şöyle verilmektedir.

$$T_i^o = A_{ij} \gamma_j^o, \quad M_i^o = D_{ij} \omega_j^o \quad (i, j = t, n, b) \quad (3)$$

A_{ij} çubuğun aksenal ve kayma rijitliğini, D_{ij} ise çubuğun burulma ve eğilme rijitliğini göstermektedir.

$$[A] = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA/\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & GA/\alpha_b \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} GI_t & 0 & 0 \\ 0 & EI_n & 0 \\ 0 & 0 & EI_b \end{bmatrix} \quad (4)$$

A kesit alanı, E ve G elastik sabitler, α_n ve α_b kayma düzeltme faktörleridir. I_t burulma ve I_n , I_b ise eğilme atalet momentleridir.

Kesitin kayma merkezi ile ağırlık merkezinin üst üste düştüğü ve kesit çarpılmasının ihmal edildiği kabul edilirse \mathbf{n} , \mathbf{b} eksenleri asal eksenler olmaktadır. Eğri eksenli çubukların davranışını idare eden diferansiyel denklemler \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} hareketli eksen takımında aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$\frac{\partial U_t}{\partial s} = \chi U_n + \frac{1}{EA} T_t \quad (5a)$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial s} = -\chi U_t + \tau U_b + \Omega_b + \frac{\alpha_n}{GA} T_n \quad (5b)$$

$$\frac{\partial U_b}{\partial s} = -\tau U_n - \Omega_n + \frac{\alpha_b}{GA} T_b \quad (5c)$$

$$\frac{\partial \Omega_t}{\partial s} = \chi \Omega_n + \frac{1}{GI_t} M_t \quad (5d)$$

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial s} = -\chi \Omega_t + \tau \Omega_b + \frac{1}{EI_n} M_n \quad (5e)$$

$$\frac{\partial \Omega_b}{\partial s} = -\tau \Omega_n + \frac{1}{EI_b} M_b \quad (5f)$$

$$\frac{\partial T_t}{\partial s} = \chi T_n - p_t \quad (5g)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial s} = \tau T_b - \chi T_t - p_n \quad (5h)$$

$$\frac{\partial T_b}{\partial s} = -\tau T_n - p_b \quad (5i)$$

$$\frac{\partial M_t}{\partial s} = \chi M_n - m_t \quad (5j)$$

$$\frac{\partial M_n}{\partial s} = \tau M_b - \chi M_t + T_b - m_n \quad (5k)$$

$$\frac{\partial M_b}{\partial s} = -\tau M_n - T_n - m_b \quad (5l)$$

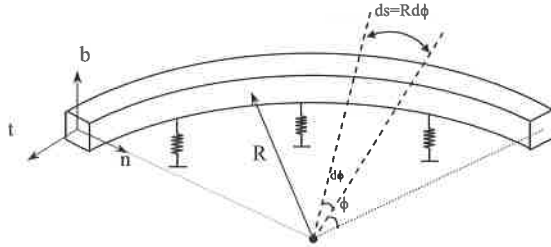
Bu çalışmada Winkler tipi elastik zemin modeli ele alınmaktadır (Şekil 1). Burada elastik zemine oturan kirişleri inceleyeceğimizden dolayı dış yük

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^e - \mathbf{p}^f, \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}^e - \mathbf{m}^f \quad (6)$$

şeklinde ifade edilecektir. (6) nolu ifadelerdeki e ve f notasyonları, sırasıyla kirişteki yükleri ve zeminin kirişe gösterdiği tepkiyi ifade etmektedir.

$$p_i^f = k_i U_i^o, \quad m_i^f = (k_1)_i \Omega_i^o \quad (i = t, n, b) \quad (7)$$

burada k ve k_1 yay sabitlerini ifade etmektedir.



Şekil 1. Elastik zemine oturan daire eksenli kiriş

Düzlemsel çubuklarda tabi burulma sıfır ($\tau = 0$) ve daire eksenli çubuklarda eğrilik ise sabittir ($\chi = 1/R$). Dairesel bir çubukta ds uzunluk elemanı $ds = R d\phi$ olarak ifade edilmektedir (Şekil 1). Hareketli koordinat takımında elastik zemine oturan düzlemine dik yüklü dairesel kirişleri idare eden 6 adet adi diferansiyel denklem takımı aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{dU_b}{d\phi} = -R\Omega_n + R \frac{\alpha_b}{GA} T_b \quad (8a)$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + \frac{R}{GI_t} M_t \quad (8b)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + \frac{R}{EI_n} M_n \quad (8c)$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} = Rk_b U_b - R p_b \quad (8d)$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = R (k_t)_t \Omega_t + M_n - R m_t \quad (8e)$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = R (k_t)_n \Omega_n - M_t + R T_b - R m_n \quad (8f)$$

Hem eleman rijitlik matrisi hem de yük vektörleri tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi kullanılarak elde edilmektedir.

TAMAMLAYICI FONKSİYONLAR YÖNTEMİ

Sabit katsayılı altı adet diferansiyel denklem (8a-f) eşitliklerinde verilmiştir. Bu denklemlerin her biri yere göre birinci mertbe türevleri içermektedir. (8a-f) denklemleri matris notasyonunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{d\mathbf{Y}(\phi)}{d\phi} = \mathbf{F}(\phi)\mathbf{Y}(\phi) + \mathbf{B}(\phi) \quad (9)$$

Uzaysal çubuklar için, durum vektörünün elemanları (10) ifadesinde tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{Y}(\phi) = \{\mathbf{U}(\phi), \mathbf{\Omega}(\phi), \mathbf{T}(\phi), \mathbf{M}(\phi)\}^T \quad (10)$$

Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi, başlangıç şartları yardımı ile (9) denkleminin çözümüne dayanmaktadır. Bu yöntem ile sınır değer problemi başlangıç değer problemine indirgenmektedir. (9) denkleminin genel çözümü

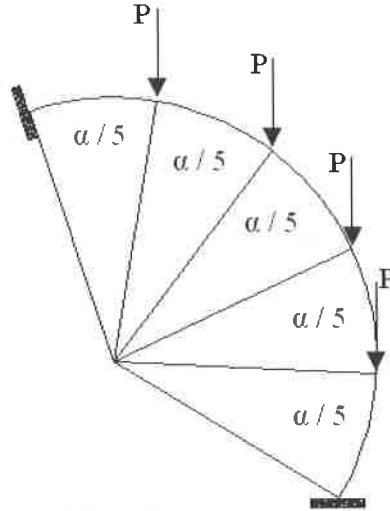
$$\mathbf{Y}(\phi) = \sum_{m=1}^6 C_m (\mathbf{U}^{(m)}(\phi)) + \mathbf{V}(\phi) \quad (11)$$

şekindedir. $\mathbf{U}^{(m)}(\phi)$ m 'inci bileşenine 1, diğerlerine sıfır değeri verilerek elde edilen homojen çözümdür. $\mathbf{V}(\phi)$ ise, başlangıç şartları sıfır alınarak elde edilen özel çözümdür. Burada C_m integrasyon sabitleri sınır şartlarından elde edilmektedir.

SAYISAL UYGULAMA

Bu çalışmada, statik yüklemeye altında elastik zemine oturan daire eksenli kirişlerin davranışını analiz etmek için genel amaçlı Fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için Butcher'ın beşinci mertebeye Runge-Kutta algoritması kullanılmıştır. Önerilen yöntemin geçerliliğini test etmek amacı ile literatürdeki mevcut örnekler ele alınmıştır.

Örnek 1 Winkler tipi elastik zemine oturan iki ucu ankastre dairesel kiriş problemi incelenmiştir. Dairesel kirişin yay açıklığı $\alpha = 140^\circ$ olup beş eşit parçaya bölünmüştür (Şekil 2). Dairesel kirişe dört adet $P = 50 t$ şiddetinde tekil yük uygulanmıştır. Dairesel kiriş dikdörtgen kesite sahip olup, kesit genişliği ve yüksekliği $b = h = 1.5 m$, yarıçapı $R = 8 m$ ve yay katsayısı $k = 10 t/m^2$ olarak alınmıştır. Malzeme özellikleri ise elastisite modülü $E = 2.7 \times 10^7 t/m^2$, Poisson oranı $\nu = 0.3$ 'dir. Probleme ait sonuçlar Tablo 1'de verilmektedir. Tablo 1 incelendiğinde, önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar ile literatürde farklı yöntem kullanarak elde edilen sonuçların uyumlu oldukları gözlemlenmektedir.



Şekil 2. İki ucu ankastre daire eksenli kiriş

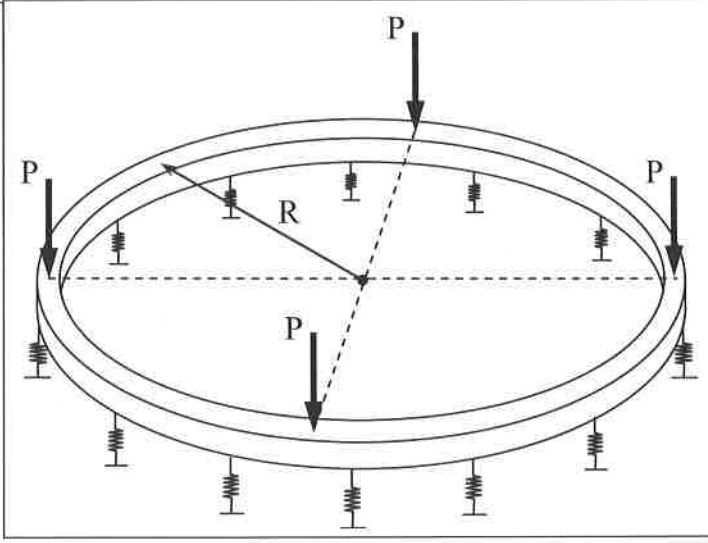
Tablo 1. İki ucu ankastre daire eksenli kirişe ait sayısal sonuçlar

Açı	Kesit Tesirleri	Zubaroğlu (1994)	Bu Çalışma
0	Tb (t)	99.71	99.92
	Mt (tm)	75.32	82.42
	Mn (tm)	-464.2	-467.7
α	Tb (t)	-99.71	-99.92
	Mt (t)	-75.32	-82.42
	Mn (t)	-464.2	-467.7

Örnek 2 Dört adet tekil yüke maruz elastik zemine oturan daire eksenli kirişin statik analizi incelenmiştir (Şekil 3). Simetri nedeni ile problemin dörtte biri sekiz elemana bölerek analiz yapılmıştır. Probleme ait malzeme ve kesit özellikleri; tekil yük $P = 1524 \text{ kN}$, dairenin yarıçapı $R = 7.63 \text{ m}$, kesit genişliği ve yüksekliği $b = h = 0.762 \text{ m}$, elastisite modülü $E = 47.24 \text{ GPa}$, kayma modülü $G = 19.68 \text{ GPa}$, yay katsayısı $k_b = 23.623 \text{ MPa}$ ve yayın dönme katsayısı $(k_1)_t = 1143 \text{ kNm/m}$ olarak verilmiştir. Örneğe ait sayısal sonuçlar Tablo 2'de verilmektedir. Tablo 2 incelendiğinde, önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar ile literatürde farklı yöntemler kullanarak elde edilen sonuçların uyumlu oldukları gözlemlenmektedir.

Tablo 2. Elastik zemine oturan daire eksenli kirişe ait sayısal sonuçlar

$\phi(^{\circ})$	Ub (m)	Ω_t (rad)	Ω_n (rad)	Tb (kN)	Mt (kNm)	Mn (kNm)	
0	[7] $(k_1)_t \neq 0$	-0,008150	0,000770	0	762	0	-1355,65
	[4] $(k_1)_t = 0$	-0,008064	-	-	762	0	-1362,78
	[4] $(k_1)_t \neq 0$	-0,008063	-	-	762	0	-1362,54
	Bu çalışma $[(k_1)_t = 0]$	-0,008150	0,000705	0	762	0	-1361,11
	Bu çalışma $[(k_1)_t \neq 0]$	-0,008147	0,000702	0	762	0	-1360,11
11,25	[7] $(k_1)_t \neq 0$	-0,007096	0,000486	-0,001089	487,578	-166,640	-405,060
	Bu çalışma $[(k_1)_t = 0]$	-0,007099	0,000445	-0,001083	489,702	-167,390	-407,433
	Bu çalışma $[(k_1)_t \neq 0]$	-0,007098	0,000443	-0,001082	489,803	-166,290	-407,333
22,5	[7] $(k_1)_t \neq 0$	-0,005208	-0,000048	-0,00122	269,413	-182,480	-189,702
	[4] $(k_1)_t = 0$	-0,005198	-	-	272,674	-184,505	-192,353
	[4] $(k_1)_t \neq 0$	-0,005198	-	-	272,705	-183,431	-192,346
	Bu çalışma $[(k_1)_t = 0]$	-0,005223	-0,000044	-0,00122	271,201	-183,378	-190,176
	Bu çalışma $[(k_1)_t \neq 0]$	-0,005223	-0,000044	-0,00122	271,303	-181,982	-190,176
37,75	[7] $(k_1)_t \neq 0$	-0,003642	-0,000492	-0,000755	115,001	-110,719	-500,447
	Bu çalışma $[(k_1)_t = 0]$	-0,003668	-0,000451	-0,000749	115,997	-111,326	-503,070
	Bu çalışma $[(k_1)_t \neq 0]$	-0,003669	-0,000449	-0,000748	116,098	-110,329	-502,869
45	[7] $(k_1)_t \neq 0$	-0,003050	-0,000660	0	0	0	595,125
	[4] $(k_1)_t = 0$	-0,003115	-	-	0	0	605,211
	[4] $(k_1)_t \neq 0$	-0,003116	-	-	0	0	605,013
	Bu çalışma $[(k_1)_t = 0]$	-0,003081	0,000604	0	0	0	598,506
	Bu çalışma $[(k_1)_t \neq 0]$	-0,003083	0,000601	0	0	0	598,308
67,5	[7] $(k_1)_t \neq 0$	-0,005208	-0,000048	0,001224	-269,413	182,480	189,7022
	Bu çalışma $[(k_1)_t = 0]$	-0,005223	-0,000044	0,001215	-271,201	183,378	190,176
	Bu çalışma $[(k_1)_t \neq 0]$	-0,005223	-0,000044	0,001214	-271,302	181,982	190,176
90	[7] $(k_1)_t \neq 0$	-0,008150	0,000770	0	-762	0	-1355,65
	Bu çalışma $[(k_1)_t = 0]$	-0,007099	0,000710	0	-762	0	-1361,11
	Bu çalışma $[(k_1)_t \neq 0]$	-0,008148	0,000710	0	-762	0	-1360,11



Şekil 3. Elastik zemine oturan dairesel kiriş

SONUÇLAR

Bu çalışmada, elastik zemine oturan daire eksenli kirişlerin statik analizi için etkin bir yöntem sunulmuştur. Elastik zemine oturan daire eksenli kirişleri idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Skaler formdaki adi diferansiyel denklemler, problemin rijitlik matrisini kesin olarak hesaplamak için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmektedir. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için Butcher'in beşinci mertbe Runge-Kutta algoritması kullanılmıştır.

Kaynaklar

- [1] Çalim, F. F., "Forced vibration of curved beams on two-parameter elastic foundation" *Applied Mathematical Modelling*, doi:10.1016/j.apm.2011.07.066.
- [2] Çalim, F.F., and Akkurt, F.G., "Static and Free Vibration Analysis of Straight and Circular Beams on Elastic Foundation" *Mechanics Research Communications*, 38(2), 89-94, 2011.
- [3] Erim, Y., *Elastik Zemine Oturan Doğru ve Daire Eksenli Çubuklar*, (Yüksek Lisans Tezi), Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1997.
- [4] Aköz, A.Y., and Kadioğlu, F., "The Mixed Finite Element Solution of Circular Beam on Elastic Foundation" *Computers&Structures* 60(4), 643-651, 1996.
- [5] Kadioğlu, F., *Elastik Zemine Oturan Doğru ve Daire Eksenli Çubuklar* (Yüksek Lisans Tezi), İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, 1994.
- [6] Zubaroğlu, S., *Elastik Zemine Oturan Daire Eksenli Çubuklar ve Taşıma Matrisi* (Yüksek Lisans Tezi), İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, 1994.
- [7] Haktanır, V., and Kırıl, E., "Statical Analysis of Elastically and Continuously Supported Helicoidal Structures by the Transfer and Stiffness Matrix Methods" *Computers & Structures*, 49(4), 663-77, 1993.
- [8] Banan, M.R., Karami G., and Farshad M., "Finite Element Analysis of Curved Beams on Elastic Foundations" *Computers & Structures*, 32, 45-53, 1989.
- [9] Dasgupta, S., Sengupta, D., "Horizontally Curved Isoparametric Beam Element with or without Elastic Foundation Including Effect of Shear Deformation" *Computers & Structures*, 29(6), 967-73, 1988.

- [10] Kırıl, E., and Ertepinar, A., "Studies on Elastic Rods Subject to Diverse External Agencies- Part II- Planar Rods on an Elastic Foundation" *METU Journal of Pure and Applied Sciences* 7 (1), 41-53, 1974.
- [11] Sokolnikoff, I.S., and Redheffer, R.M., "*Mathematics of Physics and Modern Engineering*" Tokyo: McGraw-Hill, 1958.