

KAPAK TAHRİKLİ EĞRİSEL OYUK AKIŞLARINDA YÜKSEK REYNOLDS SAYILARI İÇİN GİRDAP OLUŞUMU VE GELİŞİMİ

Hatice Mercan, Kunt Atalık
Boğaziçi Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü, 34342, Bebek İstanbul

ÖZET

Bu çalışmanın amacı yay biçimli oyuklarda sabit kapak hareketiyle oluşan akışların yüksek Reynolds sayılarındaki girdap yapılarının sayısal çözüm yöntemleri uygulanarak incelenmesidir. Çalışmada Reynolds sayısı ile karakterize edilen eylemsizlik kuvvetlerinin büyümesiyle ortaya çıkan akıştaki girdapların gelişimleri farklı yay kesitleri ele alınarak irdelenmiş ve periyodik çözümlerin varlığı araştırılmıştır. Bu amaçla, şekle oturan koordinatlarda durağan olmayan akış fonksiyonu-girdaplılık taşınımı formülasyonu kullanılmış ve denklemler ikinci mertebeden sonlu farklar yöntemiyle ayrıklaştırılmıştır. Zaman integrasyonu için yine ikinci mertebeden Adams-Bashforth şeması kullanılmıştır. Değişik yay kesitlerinde birincil, ikincil, üçüncül ve daha üst girdap yapılarının oluşumu ve gelişimi karşılaştırmalı olarak gösterilmiş ve bu yapıların durağan olmayan ve durağan akış rejimlerindeki periyodik özellikleri tartışılmıştır.

ABSTRACT

The aim of this study is to observe the vortical structures forming in the lid-driven flow in arc shape cavities at high Reynolds numbers. The formation and development of vortices as well as the periodicity of flow variables under inertia forces are investigated for different arc geometries. For this purpose, unsteady stream function-vorticity transport equations are used in body-fitted curvilinear coordinates and discretized by second order finite difference method. For the time integration, second order Adams-Bashforth algorithm has been used. Primary, secondary, tertiary and higher vortical structures formation and development for different arc cross sections are examined comparatively and periodicity of solutions in transient and steady flow regimes are discussed.

1. Giriş

Kapak tahrikli oyuk akışı doğal, endüstriyel ve biyomedikal uygulamalarda sıklıkla yer almasından dolayı çok sayıda incelemeye konu olmuştur. Eylemsizlik etkileri altındaki akışta girdap hareketinin irdelenmesi ve anlaşılması için yağlama sistemleri, toplayıcılar, buharlaştırıcılar ve akış kanalları gibi mühendislik uygulamalarında akışın fiziksel yapısını ortaya çıkarmada oldukça önem taşır. Birçok araştırmacının çalışmalarının asıl odak noktasını yağlama sistemlerine benzer sistemlerdeki katmanlı akış oluşturmuştur [1]. Yağlama yivlerinin içindeki akış, sabit hareket halindeki üst kapak ve hareketsiz alt ve yan duvarlar ile kapak tahrikli oyuk akışı olarak modellenebilmektedir. 1966 yılında Burgraff'ın öncü çalışmasıyla [2] kapak tahrikli oyuk akışı çalışmaları başlamış, zaman içinde bu problem çok sayıda çalışmaya ilham kaynağı olmuştur. Bu klasik problem yeni akış formülasyonlarının ve farklı sayısal yöntemlerin denenmesi için öncelikli olarak tercih edilmiştir. [3,4]

Kapak tahrikli oyuk akışını konu alan çalışmaların büyük bir bölümü iki boyutlu kare veya dikdörtgen oyukları konu almış, fiziksel problemde geometrinin tam olarak düzlemsel olmadığı durumlarda da genellikle düzlemsel oyuk akışı kabulü yapılmıştır. Yapılan çalışmaların çok azı eğrisel geometrideki oyuk problemleriyle ilgilidir.

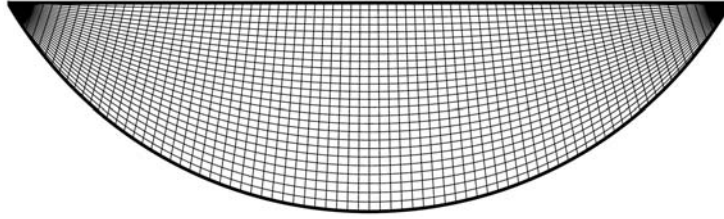
Son zamanlarda Cheng vd. [5,6] deneysel ve sayısal yöntemlerle yay biçimli oyuk içinde kapak hareketiyle oluşan akışta ısı transferi problemini incelemişlerdir. Migeon vd. [7] yaptıkları deneysel çalışmada akış yapılarının oluşumunu düzlemsel ve eğrisel çeşitli oyuk geometrileri için irdelenmiş ve eğrisel geometrinin etkilerini belirlemeye çalışmışlardır. Glowinski vd. [8] ise yaptıkları çalışmada sonlu elemanlar yöntemi kullanarak yarım çember şeklindeki oyuklarda yüksek Reynolds sayılarında gözlemlenen periyodik akışı irdelenmiş, bu geometride periyodik akışı $Re=6650$ civarında tespit etmişlerdir.

Mevcut çalışmada yay biçimli geometrilerde sabit kapak hareketli oyuk akışı yüksek Reynolds sayılarında ve farklı yay kesitlerinde akış fonksiyonu-girdaplılık taşınımı formülasyonu ile modellenerek incelenmiştir. Bu amaçla eliptik ağ oluşturma yöntemi kullanılarak akış denklemleri şekle oturan koordinatlarda (body fitted coordinates) yazılmış ve ikinci mertebeden sonlu farklar yöntemiyle uzayda ayrıklaştırılmıştır. Akış fonksiyonu denklemi bir iterasyon yöntemiyle çözülürken, girdaplılık taşınımı denkleminin zaman integrasyonunda ikinci mertebeden açık Adams-Bashforth şeması kullanılmıştır. Sayısal yöntemler ile hesap şemaları kare ve yay geometri için çeşitli Reynolds sayılarında uygulanarak, sonuçların literatürdeki mevcut çalışmalarla karşılaştırılması suretiyle sınanmıştır. Farklı yay kesitleri için artan Reynolds sayılarında oluşan girdap yapıları ve akış değişkenlerinin periyodik özellikleri karşılaştırılmış ve tartışılmıştır.

2. Matematiksel Modelleme ve Sayısal Yöntem

Bu çalışmada yüksekliği H ve kapak boyu L olan yay biçimli bir oyuk kullanılmıştır. Kapağın hızı sabit U_0 olup hareket yönü sağa doğrudur. Farklı kesitli oyuklar farklı en-boy (H/L) oranına göre ele alınmıştır. Başka bir deyişle yay açısının 2π 'ye olan oranı r ile karakterize edilmiş ve $r=2/3$, $r=1/2$, $r=1/3$ ve $r=1/4$ olmak üzere dört farklı durum incelenmiştir. Geometri, yay açısı oranı $r=1/2$ olduğu durumda yarım çembere denk gelmektedir. Bu geometriler içerisindeki akış alanı için ağlama işlemi eliptik ağ oluşturma yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Eliptik ağ üretimi

teknikleriyle, şekle oturan koordinatlar kullanılmak üzere kartezyen (x, y) koordinat takımından eğrisel (ξ, η) koordinat takımına dönüşüm elde edilmiştir. Bu dönüşümde eğrisel koordinat takımının dikeylik özelliğine sahip olmasına dikkat edilmiştir. Kullanılan geometriler için üretilmiş tipik bir ağ Şekil 1’de görülebilir.



Şekil 1. Yay geometri için eliptik olarak geliştirilmiş 27×81 ’lik tipik ağ örneği: $r=1/3$ geometrisi

Uzunluk ölçeği L , hız ölçeği U_0 seçilerek boyutsuzlaştırılmış akış fonksiyonu (ψ) girdaplılık (ω) taşınımı denklemleri eğrisel koordinatlarda aşağıdaki gibi yazılmıştır,

$$\alpha\psi_{\eta\eta} - 2\beta\psi_{\xi\eta} + \gamma\psi_{\xi\xi} = -J^2\omega \quad (2.1)$$

$$\omega_t + \frac{1}{J} \left[(uy_{\eta}\omega_{\xi} - uy_{\xi}\omega_{\eta}) + (vx_{\xi}\omega_{\eta} - vx_{\eta}\omega_{\xi}) \right] = \frac{1}{\text{Re}J^2} (\alpha\omega_{\xi\xi} - 2\beta\omega_{\xi\eta} + \gamma\omega_{\eta\eta}) \quad (2.2)$$

Bu denklemlerde koordinat dönüşümü jakobyeni J ile ifade edilmiştir. Alt indisler kısmi türevleri, u ve v hız bileşenlerini, α , β , ve γ koordinat dönüşüm fonksiyonlarına bağlı katsayıları simgelemektedir. Boyutsuz Reynolds sayısı, akışkanın yoğunluğu ρ ve viskozitesi μ cinsinden $\text{Re} = \rho U_0 L / \mu$ olarak tanımlanmıştır.

Kısmi diferansiyel denklem takımı ikinci mertebeden sonlu farklar yöntemiyle zamana bağlı sıradan bir denklem takımına indirgenmiştir. Girdaplılık taşınımı denklemi ve akış fonksiyonu denklemi ayrı ayrı ele alınarak yapılarına uygun sayısal yöntemler yardımıyla çözüm yoluna gidilmiştir. Girdaplılık taşınımı denkleminin zaman integrasyonu için ikinci mertebe Adams Bashforth yöntemi kullanılırken, eliptik yapısından dolayı akış fonksiyonu denklemi için ivmelendirilmiş Chebychev parametrelili ardıl aşırı gevşeme (successive over relaxation) iterasyon yöntemi kullanılmıştır. Adams Bashforth integrasyon şeması için ağ sayısına bağlı olarak zaman aralığı belirlenmiş ve çözümün durağan rejime erişmesi gerek iterasyonlar arasındaki fark gerek akış içerisindeki hız profili gözlemlenerek saptanmıştır. Tüm sonuçlar 101×101 ’lik sayısal ağ ile elde edilmiş ve çözümlerin ağ sayısından bağımsızlığı 61×61 , 81×81 ’lik ağlarla karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Aşağıda Tablo 1 ve Tablo 2’de çeşitli geometriler için yapılmış deneme çözümlerinin literatürdeki çözümler ile minimum ve maximum akış fonksiyonu karşılaştırılması verilmiştir.

Re		Ψ_{\min}	Ψ_{\max}
100	Cheng vd. [6]	-0.0415832	0.0
	Çalışma sonuçları	-0.0416261	0.0
1000	Cheng vd. [6]	-0.0450499	0.0001003
	Çalışma sonuçları	-0.0452365	0.00009182
1500	Cheng vd. [6]	-0.0437994	0.0016739
	Çalışma sonuçları	-0.0441206	0.00169348

Tablo 1. 1/3 geometrisi için Re=100, 1000 ve 1500 sayılarında karşılaştırma

Re		Ψ_{\min}
5000	Glowinski vd. [8]	-0.0726
	Çalışma sonuçları	-0.0694
6600	Glowinski vd. [8]	-0.0673
	Çalışma sonuçları	-0.06561

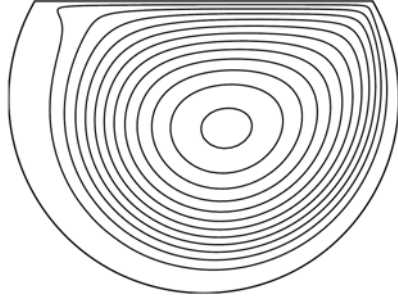
Tablo 2. 1/2 geometrisi için Re=5000 ve 6600 sayılarında karşılaştırma

3. Sayısal Sonuçlar

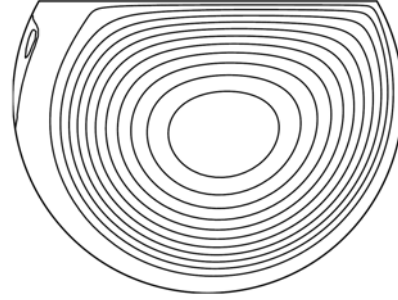
3.1. Girdap Yapısı

Ele alınan tüm yay açısı oranları için değişik Reynolds sayılarında erişilmiş durağan durum girdap yapıları karşılaştırmalı olarak irdelenmiştir.

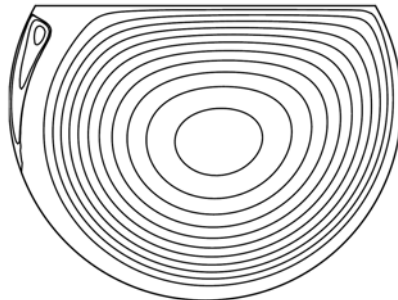
Tüm durumlarda düşük Reynolds sayılarında oluşan birincil merkezi girdap, Reynolds sayısı yükseldikçe kapağın hareketi yönünde kaymaktadır. $r=2/3$ durumunda birincil merkez girdabına ek olarak sol üst köşede Reynolds sayısı $Re=3000$ 'den itibaren ikincil bir girdap oluşmakta ve Reynolds sayısı $Re=6000$ olana kadar büyümektedir (Şekil 2). Reynolds sayısının daha fazla büyümesi bu ikincil girdabın yerini ve büyüklüğünü niteliksel olarak etkilememektedir.



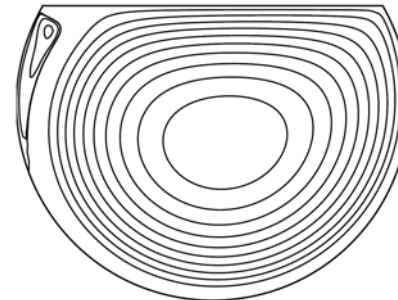
(a) $Re=1000$, $\psi_{\min}=-0.122557$,
 $\psi_{\max}=0.0$



(b) $Re=3000$, $\psi_{\min}=-0.120525$,
 $\psi_{\max}=0.00006883$



(c) $Re=5000$, $\psi_{\min}=-0.1115461$,
 $\psi_{\max}=0.00063078$

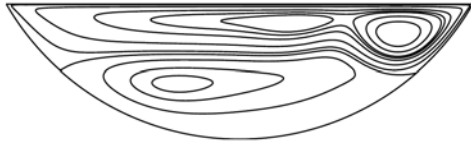


(d) $Re=6000$, $\psi_{\min}=-0.109029$,
 $\psi_{\max}=0.00080236$

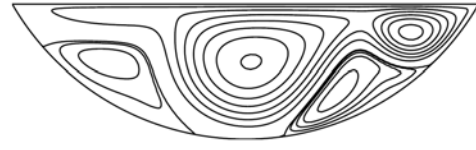
Şekil 2. $r=2/3$ durumu için farklı Reynolds sayılarında akış çizgileri

$r=1/2$ durumu test olarak ele alınmış ve sayısal karşılaştırmalar Tablo 2'de verilmiştir. Glowinski vd.[8] nin de çalışmasıyla uyumlu olarak sol alt köşede merkezi girdaba ek olarak ikincil bir girdap oluşmakta ve Reynolds sayısı $Re=7000$ 'e ulaştığında neredeyse oyuğun tüm sol bölümünü kaplamaktadır. Üçüncül bir girdap Reynolds sayısı $Re=5000$ civarında sol alt köşede oluşmakta ve Reynolds sayısı yükseldikçe büyümektedir.

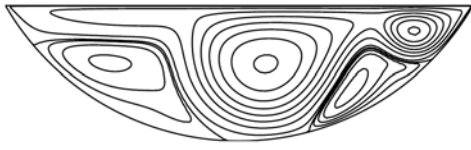
$r=1/3$ durumunda Reynolds sayısı $Re=1500$ 'ün üzerindeyken Reynolds sayısı $Re=1000$ civarında oluşmuş olan ikincil girdap kapağın hareketi yönünde büyümekte ve yay biçimli oyuğun alt kısmını kaplamaktadır. Bu arada birincil merkez girdabı kendi içinde ikiye ayrılmış ve bir parça merkezde kalırken diğeri sağ üst köşeye yaklaşmıştır. Reynolds sayısı daha da büyütüldüğü zaman üst merkez girdabı oyuk merkezini tamamen kaplamakta ve alt ikincil girdap sol ve sağ olmak üzere iki parçaya ayrılmaktadır. İkincil girdabın ayrılması $4000 < Re < 4250$ aralığında gerçekleşmektedir. Sol ve sağ alt girdapların büyüklükleri Reynolds sayısı $Re=8000$ iken neredeyse eşitlenmiştir (Şekil 3).



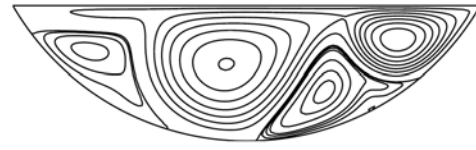
(a) $Re=3000$, $\psi_{\min}=-0.0295961$,
 $\psi_{\max}=0.00536434$



(b) $Re=5000$, $\psi_{\min}=-0.0354721$,
 $\psi_{\max}=0.00422793$



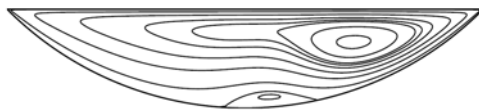
(c) $Re=6000$, $\psi_{\min}=-0.0356826$,
 $\psi_{\max}=0.00402288$



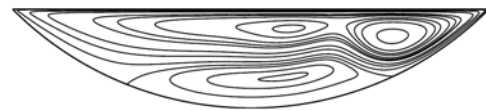
(d) $Re=8000$, $\psi_{\min}=-0.0389991$,
 $\psi_{\max}=0.00645591$

Şekil 3. $r=1/3$ durumu için farklı Reynolds sayılarında akış çizgileri

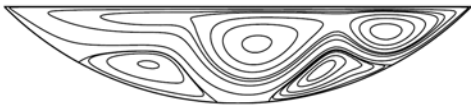
$r=1/4$ durumunda Reynolds sayısı $Re=1500$ 'de oyuğun alt kısmında ikincil girdap oluşmuştur. Bu girdap Reynolds sayısı büyüdükçe alt boşluğun daha büyük bir kısmını kaplarken sağ üst köşeye itilen merkezi girdap biri merkezde diğeri sağ üst köşede olmak üzere iki girdaba ayrılmaktadır. Reynolds sayısı $Re=4750$ iken alt kısımdaki ikincil girdap sağ ve sol alt girdaplara ayrılmış ve Reynolds sayısı daha da büyütüldüğünde sol alt girdap sağ alt girdaba göre daha büyük bir alanı kaplamıştır.



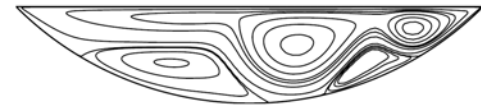
(a) $Re=1500$, $\psi_{\min}=-0.031064$,
 $\psi_{\max}=0.00009465$



(b) $Re=3000$, $\psi_{\min}=-0.0267877$,
 $\psi_{\max}=0.00201124$



(c) $Re=4750$, $\psi_{\min}=-0.0276731$,
 $\psi_{\max}=0.00232197$



(d) $Re=6000$, $\psi_{\min}=-0.0273867$,
 $\psi_{\max}=0.002182$

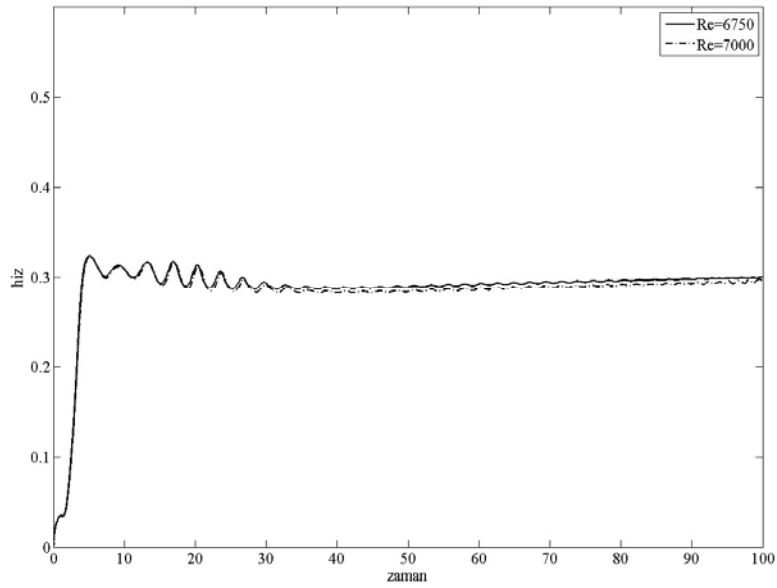


(e) $Re=8000$, $\psi_{\min} = -0.0272293$,
 $\psi_{\max} = 0.0022504$

Şekil 4. $r=1/4$ durumu için farklı Reynolds sayılarında akış çizgileri

3.2. Çözümlerin Periyodikliği

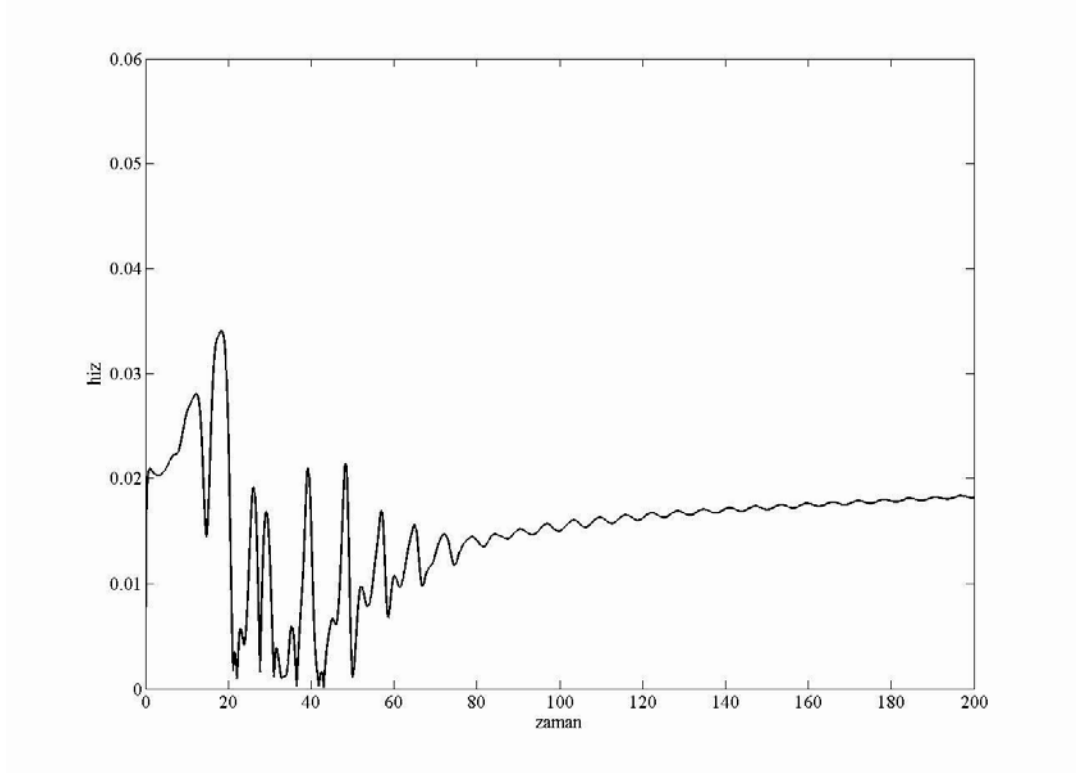
Glowinski vd. [6] çalışmalarında $r=1/2$ durumu için Reynolds sayısı $Re=6600$ civarında Hopf çatallanması (bifurkasyon) tespit etmiş ve daha yüksek Reynolds sayılarında sonuçlarda periyodik salınımlara rastlamışlardır. Bu çalışmada aynı durum için Reynolds sayısı $Re=6750$ ve $Re=7000$ arasındayken benzer periyodik çözümler elde edilmiştir (Şekil 5).



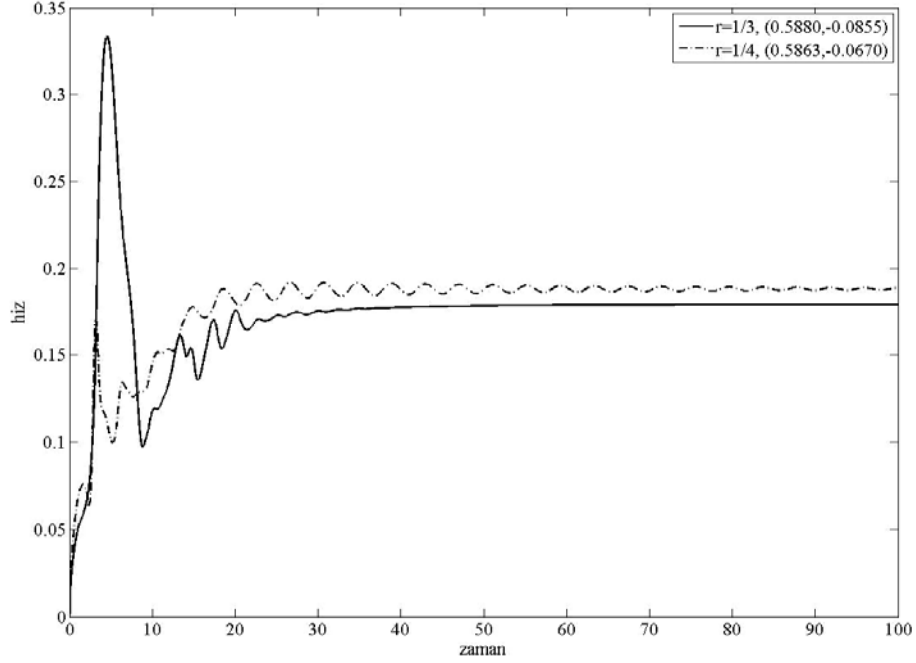
Şekil 5. $r=1/2$ durumunda $Re=6750$ ve $Re=7000$ için $(0.7188, -0.0981)$ noktasında hızın zaman evrimi

Diğer yay aç oranlarında Reynolds sayısı $Re=8000$ 'e kadar olan çözümlerde geçiş rejimi ve durağan durumda periyodik çözümler araştırılmıştır. $r=2/3$ durumu için boyutsuz zaman $t \sim 200$ 'de sol üst köşeye yakın bir noktadaki hız evriminde, genliği 10^{-4} mertebesinde olan bir periyodiklik Reynolds sayısı $Re=7500$ civarında tespit edilmiştir. Reynolds sayısının

Re=7500'den küçük olduğu durumlarda böyle bir periyodikliğe rastlanmamıştır (Şekil 6). $r=1/3$ ve $r=1/4$ durumları için sol üst köşeye yakın bir noktada hız değışimi Reynolds sayısı Re=8000 için ve boyutsuz zaman $t=100$ 'e dek Şekil 7'deki gibidir. Önceki zamanlarda bir salınım gözlemlenmesine karşın bu periyodiklik zamanla sönümlenmiş ve durağan durumda salınım bulunmamıştır. Ancak $r=1/4$ durumu için oldukça yavaş sönümlenen bir periyodik çözümden bahsedilebilir. Bu durumda boyutsuz zaman $t=100$ dolaylarında 10^{-3} mertebesinde sönümlenen bir periyodik çözümler bulunmuştur.



Şekil 6. $r=2/3$ durumunda Re=7500 için (-0.0311,-0.1494) noktasındaki hızın zaman evrimi



Şekil 7. $r=1/3$ ve $r=1/4$ durumlarında $Re=8000$ için sol üst köşedeki bir noktadaki hızın zaman evrimi

4. Değerlendirme

Özet olarak, yay geometrili boşluklardaki akışlarda yüksek Reynolds sayılarında en-boy oranı akış oluşumu ve girdap yapısı ile durağan durum ve geçiş rejimlerindeki çözümlerin özelliklerini önemli ölçüde etkilemektedir. $r=2/3$ yay geometrisi için sol üst köşede yüksek Reynolds sayılarında oluşan ikincil girdap merkezi girdaba eşlik ederken, $r=1/2$ durumunda daha büyük bir ikincil girdap ve hareketsiz duvar yakınında üçüncül bir girdap gözlemlenmektedir. $r=1/3$ ve $r=1/4$ durumlarında nihai girdap yapısı yüksek Reynolds sayılarında daha zenginleşmekte ve merkezi girdapla üst köşe girdabına dördüncül bir girdap alt üçüncül girdabın ikiye ayrılmasıyla eklenmektedir. Bu girdap ayrılması $r=1/3$ 'den $r=1/4$ 'e gidildikçe daha yüksek Reynolds sayılarında meydana gelmektedir. $r=1/2$ durumu için literatürdeki periyodik sonuçlar Reynolds sayısı $Re=6750$ civarında doğrulanmış ve benzer periyodik çözüm $r=2/3$ durumu için Reynolds sayısı $Re=7500$ 'de boyutsuz zaman $t \sim 200$ 'de gözlemlenmiştir. Ancak $r=1/3$ ve $r=1/4$ durumları için $Re=8000$ 'e dek geçiş rejiminde zaman içinde sönümlenen salınımlar gözlemlenmiştir. $r=1/4$ durumunda geçiş rejiminde salınımlar $r=1/3$ durumuna kıyasla daha yavaş bir şekilde sönümlenmektedir.

Teşekkür: Bu çalışma BAP05HA602 kodlu Boğaziçi Üniversitesi Araştırma Projesi tarafından desteklenmiştir.

Kaynaklar

1. P. Pavyer, "Laminar heat transfer in the oil groove of a wet clutch", International Journal of Heat Mass Transfer, 34 1791-1798, 1991.
2. O. R. Burgraff, "Analytical and Numerical Studies of the Structures of Steady Separated Flows", Journal of Fluid Mechanics, 24(1) 113-151, 1966 .
3. M. M. Gupta, J. C. Kallita, "A New Paradigm for Solving Navier-Stokes Equations: Stream Function-Velocity Formulation, Journal of Computational Physics, 207 52-68, 2005.
4. M. Şahin, R. G. Owens, "A novel fully implicit finite volume method applied to lid-driven cavity problem: Part I. High Reynolds number flow calculations", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 42(4) 57-77, 2003.
5. M. H. Chang, C. H. Cheng, "Prediction of Lid-Driven Flow and Heat Convection in an Arc-Shape Cavity", International Comm. of Heat and Mass Transfer, 26(6) 829-838, 1999.
6. C. L. Chen, C. H. Cheng, "Numerical Prediction of Buoyancy Induced Periodic Flow Pattern and Heat Transfer in a Lid-Driven Arc-Shape Cavity", Numerical Heat Transfer, Part A, 44 645-663, 2003.
7. C. Migeon, A. Texier, G. Pineau, "Effects of Lid Driven Cavity Shape on the Flow Establishment Phase", Journal of Fluids and Structures, 14 469-488, 2000.
8. R. Glowinski, G. Guidoboni, T.W. Pan, "Wall Driven Incompressible Viscous Flow in a Two-Dimensional Semi-Circular Cavity", Journal of Computational Physics, 216 76-91, 2006.