



XVII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
5-9 Eylül 2011, Fırat Üniversitesi, Elazığ

İKİ ELASTİK ÇEYREK DÜZLEME OTURAN ELASTİK İKİ TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ

Murat YAYLACI¹
Karadeniz Teknik Üniversitesi
TRABZON

Ahmet BİRİNCİ²
Karadeniz Teknik Üniversitesi
TRABZON

ÖZET

Bu çalışmada; homojen, izotrop ve simetrik iki elastik çeyrek düzleme oturan elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki elastik tabakanın sürtünmesiz değme problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. 1 nolu tabaka üst yüzeyinden sınırlı bölgede simetrik yayılı yük etkisinde bırakılmıştır. Problemden sürtünmenin bulunmadığı kabul edilmiştir. Problem; integral dönüşüm tekniği ve sınır şartlarının kullanılmasıyla, değme uzunluklarının ve değme gerilmelerinin bilimeyen olduğu iki tekil integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemine indirgenmiştir. Tabakalar için Fourier dönüşümleri, çeyrek düzlem için Mellin dönüşümleri uygulanmıştır. Tekil integral denklem sistemini sayısal çözümü, denge şartları dikkate alınarak, Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu ile gerçekleştirilmiş, değme uzunlukları ve değme gerilmeleri bulunmuştur.

GİRİŞ

Birçok yapının ve mekanik sistemin elemanları birbirleri ile temas halinde olduğundan değme problemleri mühendislik uygulamalarında önemli bir yer tutmaktadır. Değmenin karakteri, cisimlerin gerilmeleri birbirlerine iletişim şekilleri, değme halindeki cisimlerde meydana gelen şekil değiştirmeler, değme uzunlukları ve değme bölgesindeki değme gerilmesi dağılımı yapının davranışında önemli rol oynamaktadır. Temeller, karayolları, demiryolları, havaalanı pistleri, tahıl siloları, akaryakıt tankları, silindirik miller, küresel veya silindirik bilyeler temas konusunun uygulama alanlarından bazılarını oluşturmaktadır. Taşıt çarpışmalarının simülasyonu, insan eklemlerinin davranışı gibi konular da değme probleminin uygulama sahasına girmektedir. Temas halindeki elemanlarda meydana gelen deformasyonlar, değme uzunlukları, değme gerilmesi dağılımı yapının davranışında önemli rol oynamaktadır.

Elastik yarım düzleme, çeyrek düzleme, rijit düzleme veya başka bir tabakaya oturan tabakanın sürtünmesiz değme problemi günümüze kadar birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Temas problemleri ile ilgili ilk çalışma Hertz tarafından yapılmıştır ve bu nedenle temas problemleri literatürde "Hertz Değme Problemi" adı ile bilinmektedir [1]. Değme problemlerinin, elastisite ile çözüm yöntemleri Galin [2] ve çözümlerde integral dönüşümlerinin uygulama metodları ise Ufliand [3] tarafından verilmektedir. [4-9]'da elastik yarım düzleme oturan tabakanın sürtünmesiz değme problemi integral dönüşüm tekniği ile çözülmüştür. [4] ve [5]'de tabaka rijit veya elastik bir panç ile yüklenmiş ve yarım düzleme oturmuştur. Tabaka ile yarım düzlemin anizotrop olması halindeki

¹ Arş. Gör., Gemi İnş. ve Gemi Mak. Müh. Böl., E-posta: muratayylaci@ktu.edu.tr

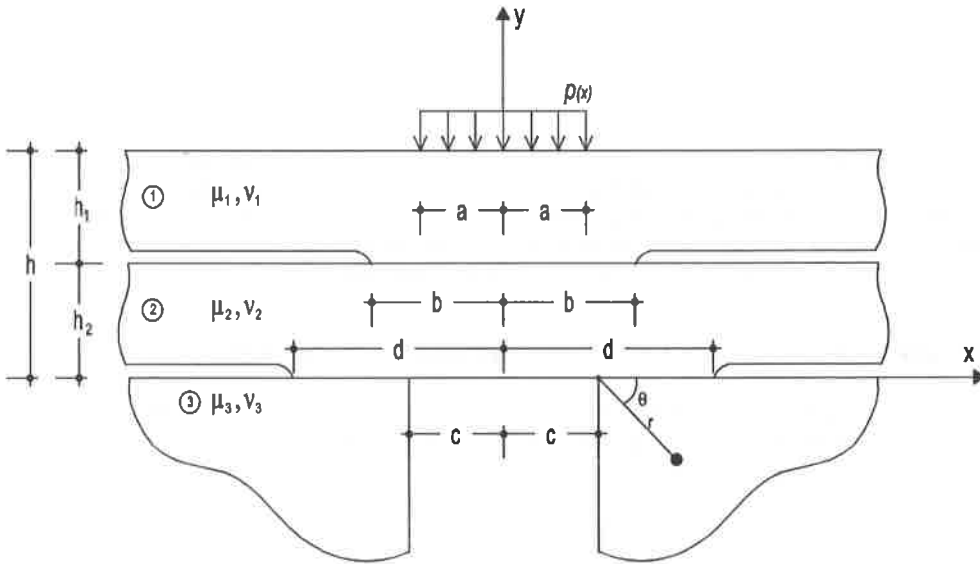
² Prof. Dr., İnşaat Müh. Böl., E-posta: birinci@ktu.edu.tr

değme problemi [6]'da ele alınmıştır. [7]'de elastik tabaka yayılı yükü yüklenirken, aynı problem tabakanın fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden olması halinde [8]'da incelenmiştir. Alttan tam bağlı bir elastik tabakaya oturan eğrisel bir pançla bastırılan tabakanın değme problemi [9]'da incelenmiştir. Çeyrek düzlemle ilgili temas problemi ve bu problemle ilgili sayısal yöntemlerin geliştirilmesi [10]'da ele alınmıştır. Çeyrek düzlem ve kama tipi problemlerin çözüm yöntemi ve temas mesafelerinde oluşan gerilmeler [11,12]'de verilmektedir. Tekil ve yayılı yüklü çeyrek düzlemlere oturan tabakanın temas problemleri ele alınarak, değişik yüklemeler ve malzeme durumlarında oluşan gerilme ve yer değiştirmeler [13-16]'da incelenmiştir. Sınır değer problemlerinin çeyrek düzlemlerde incelenmesi [17]'de ele alınmıştır.

Bu çalışmada, düzgün yayılı yük etkisi altında homojen, izotrop ve simetrik iki elastik çeyrek düzleme oturan elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki elastik tabakanın sürtünmesiz değme problemi elastisite teorisine göre çözülmüştür. 1 nolu tabaka üst yüzeyinden sınırlı bölgede simetrik yayılı basınç yükünün etkisinde bırakılmıştır. Problemden sürtünmenin bulunmadığı kabul edilmiştir. Problem; integral dönüşüm tekniği ve sınır şartlarının kullanılmasıyla, değme uzunluklarının ve değme gerilmelerinin bilinmeyen olduğu iki tekil integral denklemden oluşan bir integral denklem takımına indirgenmiştir. İntegral denklem takımının sayısal çözümü, denge şartlarında dikkate alınarak, Gauss-Jacobi integrasyonu formülasyonu ile gerçekleştirilmiştir; değme uzunlukları ve değme gerilmeleri çeşitli boyutsuz büyüklükler için elde edilmiştir. Çalışmada kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir.

PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Problemden 1 nolu tabaka ile 2 nolu tabaka $(-b, b)$ aralığında ve 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlemler (c, d) aralığında temas halindedir. Problemden h_1 ve h_2 tabaka yüksekliklerini, μ_i, ν_i ($i = 1, 2, 3$) tabakalara ve çeyrek düzlemlere ait elastik sabitleri göstermektedir. Çeyrek düzlemler ve tabakalar $(-\infty, +\infty)$ aralığında olup y eksenine göre simetrik olduğundan, hesaplar $0 \leq x < \infty$ aralığında yapılmıştır. İki boyutlu problemden z eksenini doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır (Bkz. Şekil 1).



Şekil 1: İki elastik çeyrek düzleme oturan elastik iki tabakanın temas problemi

Problemin çözümünde tabakalar için kullanılacak olan $u(x, y), v(x, y)$ yerdeğiştirme ve $\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y)$ gerilme bileşenleri elastisitenin temel denklemleri ve Fourier dönüşüm teknikleri kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_i(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [A_i + B_i y] e^{-\alpha y} + [C_i + D_i y] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (1)$$

$$v_i(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A_i + B_i \left(\frac{x}{a} + y \right) \right] e^{-\alpha y} + \left[-C_i + D_i \left(\frac{x}{a} - y \right) \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (2)$$

$$\frac{1}{2\mu_i} \sigma_x(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha (A_i + B_i y) - \left(\frac{3 - \kappa_i}{2} \right) B_i \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha (C_i + D_i y) + \left(\frac{3 - \kappa_i}{2} \right) D_i \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (3)$$

$$\frac{1}{2\mu_i} \sigma_y(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha (A_i + B_i y) + \left(\frac{1 + \kappa_i}{2} \right) B_i \right] e^{-\alpha y} + \left[-\alpha (C_i + D_i y) + \left(\frac{1 + \kappa_i}{2} \right) D_i \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (4)$$

$$\frac{1}{2\mu_i} \tau_{xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha (A_i + B_i y) + \left(\frac{\kappa_i - 1}{2} \right) B_i \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha (C_i + D_i y) - \left(\frac{\kappa_i - 1}{2} \right) D_i \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (5)$$

Problemin çözümünde çeyrek düzlemler için kullanılacak olan u_θ yerdeğiştirme, $\sigma_r(r, \theta), \sigma_\theta(r, \theta), \tau_{r\theta}(r, \theta)$ gerilme bileşenleri ve ϕ^M Airy gerilme fonksiyonu Mellin dönüşüm teknikleri kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$2\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} r^2 \right)^M = s(s+1) i \left[F_1 e^{is\theta} - F_2 e^{-is\theta} \right] + [(s+1)(s+2) + (1-\nu)(-4s-4)] \left[G_1 e^{i(s+2)\theta} - G_2 e^{-i(s+2)\theta} \right] \quad (6)$$

$$\left(r^2 \sigma_r \right)^M = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - s \right) \left[\phi^M \right] \quad (7)$$

$$\left(r^2 \sigma_\theta \right)^M = s(s+1) \left[\phi^M \right] \quad (8)$$

$$\left(r^2 \tau_{r\theta} \right)^M = (s+1) \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\phi^M \right] \quad (9)$$

$$\phi^M(s, \theta) = F_1 e^{is\theta} + F_2 e^{-is\theta} + G_1 e^{i(s+2)\theta} + G_2 e^{-i(s+2)\theta} \quad (10)$$

Yukarıdaki ifadelerde geçen i ($i = 1, 2$) alt indisi tabaka numaralarını göstermektedir. Tabaklara ait gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde geçen A_i, B_i, C_i, D_i ($i = 1, 2$) bilinmeyen katsayılar olup problemin sınır şartlarından elde edilecektir. κ_i ($i = 1, 2$) bir malzeme sabiti olup düzlem şekil değiştirme halinde $\kappa_i = (3 - 4\nu_i)$ ve düzlem gerilme halinde ise $\kappa_i = (3 - \nu_i)/(1 + \nu_i)$ olarak verilmektedir. ν_i tabakalara ait Poisson oranını ifade etmektedir.

SINIR ŞARTLARI VE İNTEGRAL DENKLEM SİTEMİNİN ELDE EDİLMESİ

$u_i(x, y), v_i(x, y)$ tabakalara ait yerdeğiştirme ve $\sigma_{x_i}(x, y), \sigma_{y_i}(x, y), \tau_{xy_i}(x, y)$ 'de gerilme bileşenlerini göstermek üzere tabakaya ait sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, h) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (11)$$

$$\sigma_y^{(1)}(x, h) = \begin{cases} -P_0 & (0 \leq x < a) \\ 0 & (a \leq x < \infty) \end{cases} \quad (12)$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, h_2) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (13)$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, h_2) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (14)$$

$$\sigma_y^{(1)}(x, h_2) = \begin{cases} -p_1(x) & (0 \leq x < b) \\ 0 & (b \leq x < \infty) \end{cases} \quad (15)$$

$$\sigma_y^{(1)}(x, h_2) = \sigma_y^{(2)}(x, h_2) \quad (0 \leq x < \infty) \quad (16)$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, 0) = \begin{cases} -p_2(x) & (c < x < d) \\ 0 & (0 \leq x < c, \quad d \leq x < \infty) \end{cases} \quad (17)$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (18)$$

$$\frac{\partial v_2(x, 0)}{\partial x} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \quad (c < x < d) \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h_2) - v_2(x, h_2)] = 0 \quad (0 \leq x < b) \quad (20)$$

Elastik çeyrek düzlem için sınır şartları ise,

$$\sigma_\theta(r, \theta) = -p_2(r) \quad (c < r < d) \quad (\theta = 0) \quad (21)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = 0 \quad (d < r < \infty) \quad (\theta = 0) \quad (22)$$

$$\sigma_\theta(r, \theta) = 0 \quad (0 < r < \infty) \quad (\theta = \pi/2) \quad (23)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = 0 \quad (0 < r < \infty) \quad (\theta = \pi/2) \quad (24)$$

şeklinde yazılabilir. Probleme ait denge şartları,

$$\int_{-b}^b p_1(x_1) dx_1 = 2ap_0 \quad (25)$$

$$\int_c^d p_2(x_2) dx_2 = ap_0 \quad (26)$$

şeklinde ifade edilebilir. Yukarıdaki ifadelerde geçen p_0 ; yayılı yükün şiddetini göstermektedir. $p_1(x)$; 1 nolu tabaka ile 2 nolu tabaka arasında ve $p_2(x)$ ise 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlemler arasında oluşan bilinmeyen değme gerilmesi fonksiyonlarıdır. a ; yayılı yük ile 1 nolu tabaka, b ; 1 nolu tabaka ile 2 nolu tabaka, $(c - d)$; ise 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki yarı değme uzunluklarıdır. (11-18) nolu denklemleriyle verilen sınır şartlarında, gerilme ve yer değiştirme ifadelerinin yerine konulup Fourier integral dönüşümü kullanılarak sekiz bilinmeyenli sekiz cebrik denklemden oluşan bir denklem takımı elde edilir. Elde edilen bu denklem takımının çözülmesiyle gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde geçen katsayılar A_i, B_i, C_i, D_i ($i = 1, 2$) bilinmeyen $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ değme gerilmesi fonksiyonlarına bağlı olarak bulunur. (21-24) nolu ifadelerde verilen çeyrek düzleme ait sınır şartları (6-10) ifadelerinde yerlerine konulup Mellin integral dönüşümü kullanılarak (19) nolu sınır şartındaki $\partial u_\theta / \partial r$ ifadesi elde edilir. Elde edilen bu

ifade ve A_i, B_i, C_i, D_i ($i = 1, 2$) katsayıları (19) ve (20) nolu sınır şartlarında yerlerine yazılır ve gerekli ara işlemler yapıldığında temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu iki tane tekil integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \left[\frac{1}{t-x} - M_{11}(x, t) - R_{11}(x, t) \right] p_1(t_1) dt_1 + \frac{1}{\pi} \int_c^d R_{12}(x, t) p_2(t_2) dt_2 = \frac{1}{\pi} p_0 M(x) \quad (27)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^b M_{21}(x, t) p_1(t_1) dt_1 + \frac{1}{\pi} \int_c^d \left[\frac{1}{t+x} - \frac{1}{t-x} + M_{22}(x, t) - \frac{\mu_2}{\mu_3} \frac{1+\kappa_3}{1+\kappa_2} k_{22}(x, t) \right] p_2(t_2) dt_2 = 0 \quad (28)$$

Yukarıdaki ifadelerde geçen;

$$M_{11}(x_1, t_1) = \int_0^{\infty} \left[\frac{2m}{K} \right] \left[\frac{1}{\Delta_1} \left(-\frac{1}{2} e^{-4\alpha h_1} (-1 + e^{4\alpha h_1} + 4\alpha h_1 e^{2\alpha h_1}) (1 + \kappa_1) \right) + \left(\frac{1 + \kappa_1}{2} \right) \right] \sin \alpha [t_1 - x_1] d\alpha \quad (29)$$

$$R_{11}(x_1, t_1) = \int_0^{\infty} \left[-\frac{2m}{K} \right] \left[\frac{1}{\Delta_2} \left(-\frac{1}{2} e^{-4\alpha h_2} (-1 + e^{4\alpha h_2} + 4\alpha h_2 e^{2\alpha h_2}) (1 + \kappa_1) \right) - \left(\frac{1 + \kappa_2}{2m} \right) \right] \sin \alpha [t_1 - x_1] d\alpha \quad (30)$$

$$R_{21}(x_1, t_2) = \int_0^{\infty} \left[-\frac{2}{K} \right] \left[\frac{m}{\Delta_2} \left(\frac{1}{2} e^{-3\alpha h_2} (-1 + \alpha h_2 + e^{2\alpha h_2} (1 + \alpha h_2)) (1 + \kappa_2) \right) \right] \sin [\alpha x_2] \cos [\alpha t_2] d\alpha \quad (31)$$

$$M(\alpha) = \int_0^{\infty} \left[-\frac{4m}{K} \right] \left[\frac{1}{\Delta_1} \left(e^{-3\alpha h_1} (-1 + \alpha h_1 + e^{2\alpha h_1} (1 + \alpha h_1)) (1 + \kappa_1) \right) \right] \sin [\alpha x] \frac{\sin [\alpha a]}{\alpha} d\alpha \quad (32)$$

$$M_{21}(x_2, t_1) = \int_0^{\infty} \left[\frac{2m}{1 + \kappa_2} \right] \left[\frac{1}{\Delta_2} \left(-e^{-3\alpha h_2} (-1 + \alpha h_2 + e^{2\alpha h_2} (1 + \alpha h_2)) \right) (1 + \kappa_2) \right] \sin \alpha [t_1 - x_2] d\alpha \quad (33)$$

$$M_{21}(x_2, t_1) = \int_0^{\infty} \left[\frac{2m}{1 + \kappa_2} \right] \left[\frac{1}{\Delta_2} \left(-e^{-3\alpha h_2} (-1 + \alpha h_2 + e^{2\alpha h_2} (1 + \alpha h_2)) \right) (1 + \kappa_2) \right] \sin \alpha [t_1 - x_2] d\alpha \quad (34)$$

$$M_{22}(x_2, t_2) = \int_0^{\infty} \left[-\frac{2}{1 + \kappa_2} \right] \left[\frac{m}{\Delta_2} \left(\frac{1}{2} e^{-4\alpha h_2} (-1 + 4\alpha h_2 + 4\alpha h_2 e^{2\alpha h_2}) (1 + \kappa_2) \right) + \left(\frac{1 + \kappa_2}{2} \right) \right] \sin [\alpha x_2] \cos [\alpha t_2] dz \quad (35)$$

$$k_{22}(x_2, t_2) = \frac{1}{t_2 - x_2} + \int_0^{\infty} \left(\frac{\sinh \pi y}{\cosh \pi y - 1 - 2y^2} - 1 \right) \frac{\sin \left[\log \frac{t_2 - c}{x_2 - c} \right] y}{x_2 - c} dy - \frac{\pi^2}{(x_2 - c)(\pi^2 - 4)} \quad (36)$$

olarak tanımlanabilir. (29-36) ifadelerinde geçen,

$$\Delta_1 = \left[e^{-4\alpha h_1} + 1 - 2e^{-2\alpha h_1} + (1 + 2\alpha^2 h_1^2) \right] \quad (37)$$

$$\Delta_2 = \left[-1 - e^{-4\alpha h_2} + 2e^{-2\alpha h_2} + (1 + 2\alpha^2 h_2^2) \right] m \quad (38)$$

$$K = 1 + \kappa_2 + m + m\kappa_1 \quad (39)$$

şeklinde tanımlanabilir.

İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

İntegral denklemlerin sayısal çözümleri [18,19]'de verilen Gauss-Jacobi İntegrasyon Formülasyonu ile gerçekleştirilecektir. Bu integral denklem sistemine, Gauss-Jacobi metodunu uygulamak için önce denklem takımının tanımlı olduğu integral aralığını $(-1, 1)$ 'e normalize etmek uygun olur. Bunun için $\alpha = \frac{z}{h_2}$ değişken dönüşümü yapılır ve aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanır.

$$t_1 = br_1, \quad t_2 = \frac{d-c}{2} r_2 + \frac{d+c}{2} \quad (40)$$

$$x_1 = bs_1, \quad x_2 = \frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} \quad (41)$$

$$g(r_1) = \frac{p_1(b r_1)}{p_0}, \quad g(r_2) = \frac{p_2 \left(\frac{d-c}{2} r_2 + \frac{d+c}{2} \right)}{p_0} \quad (42)$$

Tanımlanan boyutsuz büyüklükler, integral denklemlerde ve denge şartlarında yerlerine yazılırsa;

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{r_1 - s_1} - \bar{M}_{11}(s, r) - \bar{R}_{11}(s, r) \right] g_1(r_1) dr_1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{R}_{12}(s, r) g_2(r_2) dr_2 = \frac{1}{\pi} \bar{M}(s_1) \quad (43)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{M}_{21}(s, r) g_1(r_1) dr_1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{(r_2 + s_2) + 2 \left(\frac{d+c}{d-c} \right)} - \frac{1}{(r_2 - s_2)} + \bar{M}_{22}(s, r) - \frac{\mu_2}{\mu_3} \frac{1 + \kappa_3}{1 + \kappa_2} k_{22}(s, r) \right] g_2(r_2) dr_2 = 0 \quad (44)$$

$$\frac{b}{2a} \int_{-1}^1 g_1(r_1) dr_1 = 1, \quad \frac{d-c}{2a} \int_{-1}^1 g_2(r_2) dr_2 = 1 \quad (45)$$

olarak elde edilir.

İntegral denklem sisteminin sayısal çözümü aşağıdaki ifadelerle aranabilir,

$$g_j(r_j) = G_j(r_j) w_j(r_j) \quad (46)$$

$$w_j(r_j) = (1 - r_j)^{\alpha_j} (1 + r_j)^{\beta_j}, \quad j = 1, 2$$

İntegral denklemlerin sayısal çözümü için kullanılacak olan integral denklem indeksleri birbirinden farklıdır. Tabakalar arasında temas gerilmeleri, temas bölgesinin bittiği noktalardan itibaren "0" olduğundan (43) nolu integral denklemin indeksi "-1" olmaktadır. 2 nolu tabakanın çeyrek düzlemden ayrıldığı noktada temas gerilmesi "0"dır. Çeyrek düzlemin iç kenarında ise temas gerilmesi sonsuza gideceğinden (44) nolu integral denklemin indeksi "0" olmaktadır. "-1" indeks için çözüm ele alındığında;

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0.5 \quad (47)$$

olarak ifade edilir. Sayısal çözüm yöntemiyle (43) nolu integral denklemden ve (25) nolu denge şartından $G_j(r_j)$ ($j = 1, 2$) fonksiyonunun N noktadaki değerleri için bir lineer denklem takımı elde edilir.

$$\sum_{i=1}^N W_{li}^N \left[\frac{1}{r_{li} - s_{1k}} + k_{11}(s_{1k}, r_{li}) \right] G_1(r_{li}) + \sum_{i=1}^N W_{2i}^N \bar{R}_{12}(s_{1k}, r_{2i}) G_2(r_{2i}) = \frac{1}{\pi} \bar{M} \quad (k = 1, 2, \dots, N+1) \quad (48)$$

$$\frac{b}{2a} \sum_{i=1}^N W_{li}^N G_1(r_{li}) - \frac{1}{\pi} = 0 \quad (49)$$

Burada r_{1i} ve s_{1k} Jacobi polinomlarının kökleri olup aşağıdaki gibi ifade edilirler.

$$r_{1i} = \cos \left(\frac{i\pi}{N+1} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (50)$$

$$s_{1k} = \cos \left(\frac{\pi 2k-1}{2(N+1)} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N+1) \quad (51)$$

Jacobi polinomunun ağırlık katsayısı olup W_{ii}^N ise aşağıdaki gibi yazılırlar.

$$W_{ii}^N = \frac{1-r_{ii}^2}{N+1} \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (52)$$

"0" indeksi için çözüm ele alındığında ise;

$$\alpha_2 = 0.5 \quad (53)$$

olup, β_2 aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\frac{\mu_2}{\mu_3} \frac{1+\kappa_3}{1+\kappa_2} (2\lambda^2 - 1 + \cos \pi\lambda) \cos \pi\lambda - \sin^2 \pi\lambda = 0 \quad (54)$$

$$\beta_2 = \lambda_1 - 1$$

Sayısal çözüm yöntemiyle (44) nolu integral denklemden ve (26) nolu denge şartından $G_j(r_j)$ ($j = 1,2$) fonksiyonunun N noktadaki değerleri için bir lineer denklem takımına dönüşür.

$$\sum_{i=1}^N W_{ii}^N \bar{M}_{21}(s_{2k}, r_{ii}) G_1(r_{ii}) + \sum_{i=1}^N W_{2i}^N \left[-\frac{1}{r_{2i} - s_{2k}} + K_{22}(s_{2k}, r_{2i}) \right] G_2(r_{2i}) = 0 \quad (k=1,2,\dots,N+1) \quad (55)$$

$$\frac{d-c}{2a} \sum_{i=1}^N W_{2i}^N G_2(r_{2i}) - \frac{1}{\pi} = 0 \quad (56)$$

Burada r_{2i} ve s_{2k} Jacobi polinomlarının kökleri olup aşağıdaki gibi ifade edilirler.

$$P_N^{(\alpha_2, \beta_2)}(r_{2i}) = 0 \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (57)$$

$$P_N^{(\alpha_2-1, \beta_2-1)}(s_{2k}) = 0 \quad (k=1,2,\dots,N) \quad (58)$$

Jacobi polinomunun ağırlık katsayısı W_{2i}^N ise aşağıdaki gibi yazılırlar.

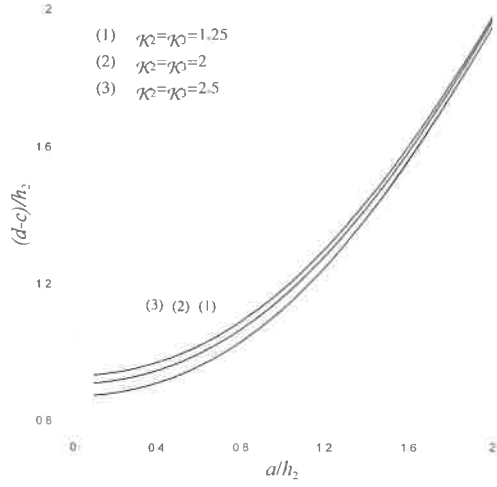
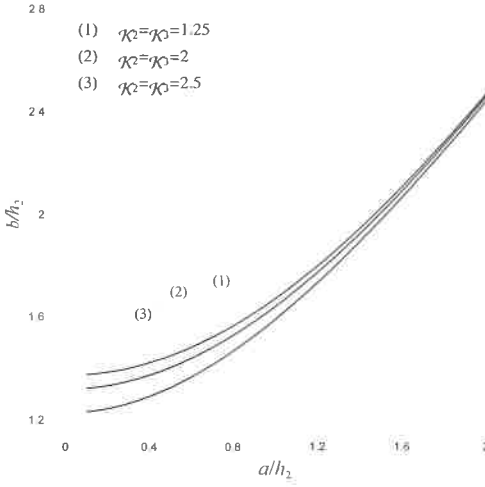
$$W_{2i}^N = -\frac{1}{\pi} \frac{2N + \alpha_2 + \beta_2 + 2}{(N+1)!(N + \alpha_2 + \beta_2 + 1)} \frac{\Gamma(N + \alpha_2 + 1)\Gamma(N + \beta_2 + 1)}{\Gamma(N + \alpha_2 + \beta_2 + 1)} \frac{2^{\alpha_2 + \beta_2}}{P_N^{(\alpha_2 + \beta_2)}(r_{2i})P_{N+1}^{(\alpha_2 + \beta_2)}(r_{2i})} \quad (59)$$

Integral denklem sistemindeki $\left(\frac{b}{h_2}\right)$ ve $\left(\frac{d-c}{h_2}\right)$ boyutsuz büyüklükler problemin bilinmeyenleri arasında olup dış yük, geometri ve malzemeye bağlı olarak değişmektedir. Bu büyüklükler, denge şartlarını sağlamak koşulu ile denklem sistemi çözülerek deneme yanılma yöntemi ile bulunur. İstenilen hassaslıkta sağlanan değerler ile gerilme dağılımları elde edilir. Bu çalışmada elde edilen formülasyonlar kullanılarak Gauss-Jacobi metodu ile birlikte iteratif bir yöntem uygulayan bilgisayar programı yazılmıştır. Bu program ile bilinmeyen temas uzunlukları ve temas gerilmeleri bulunabilmektedir

SONUÇLAR

Bu çalışmada; homojen, izotrop ve simetrik iki elastik çeyrek düzleme oturan elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki elastik tabakanın sürtünmesiz değme problemi incelenmiştir. Teorik olarak çözümü verilmiş olan problemin; değişik yük genişliği, malzeme ve geometri değerlerine göre oluşan değme uzunlukları ve değme gerilmeleri incelenmiş, sayısal uygulamalardan elde edilen grafikler ve bulgular aşağıda verilmektedir.

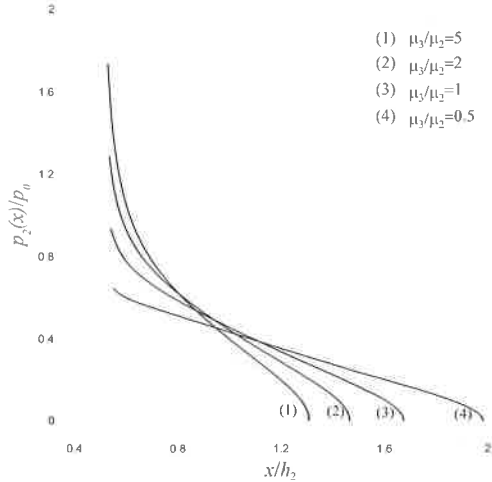
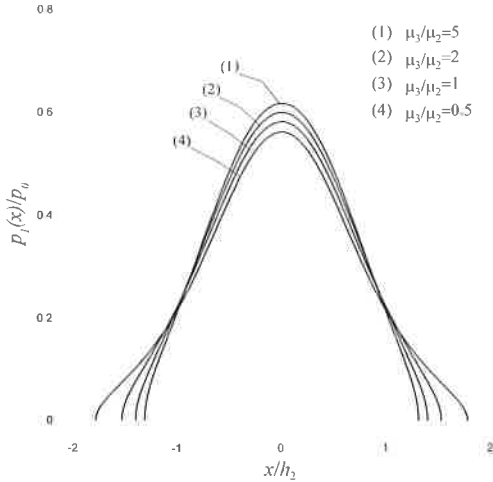
- Çeyrek düzlemler arası açıklık mesafesi arttıkça; tabakalar arası temas mesafesi artmakta ve bu nedenle gerilme dağılımları azalmaktadır. Ancak 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlemler arası temas mesafesi ise azalmaktadır.
- Çeyrek düzlemin kayma modülünün 2 nolu tabaka kayma modülüne oranı arttıkça tabakalar arası ve 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arası temas mesafesi azalmaktadır.
- 1 nolu tabakanın 2 nolu tabaka yüksekliğine oranı arttıkça; tabakalar arası temas mesafesi artmakta ancak 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlem arası temas mesafesi azalmaktadır.
- 1 nolu tabaka üzerindeki yayılı yük genişliği arttıkça tabakalar arası ve 2 nolu tabaka ile çeyrek düzlemler arası temas mesafeleride artmaktadır.



($c/h_2 = 0.5, a/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \kappa_1 = 2, \mu_2/\mu_1 = 2$)

Şekil 2. Malzeme özelliklerine (κ_2, κ_3) bağlı olarak, yük genişliğine (a/h_2) göre tabakalar arası temas mesafesi

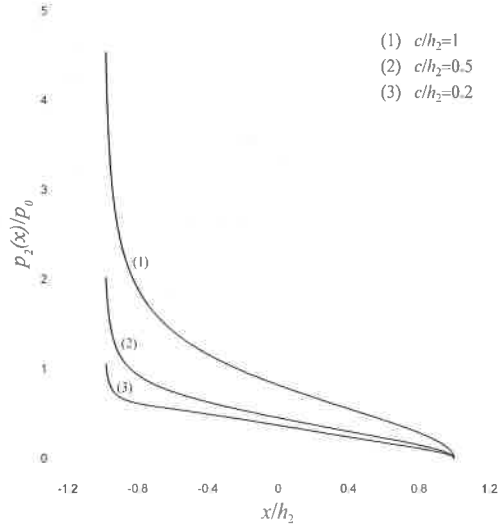
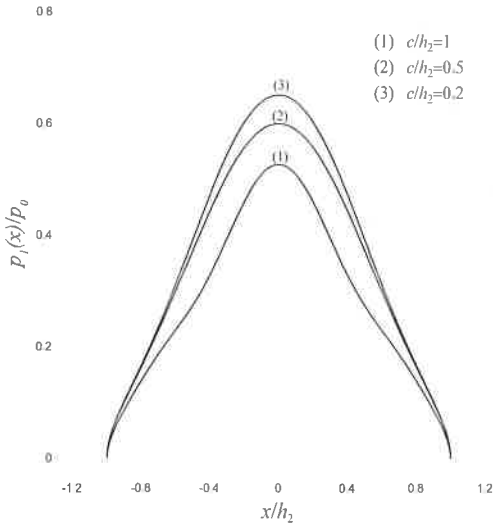
Şekil 3. Malzeme özelliklerine (κ_2, κ_3) bağlı olarak, yük genişliğine (a/h_2) göre 2 nolu tabaka-çeyrek temas mesafesi



($a/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, c/h_2 = 0.5, \mu_2/\mu_1 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$)

Şekil 4. 2 nolu tabaka ve çeyrek düzlem kayma modülleri oranına (μ_3/μ_2) bağlı olarak, tabakalar arası temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı

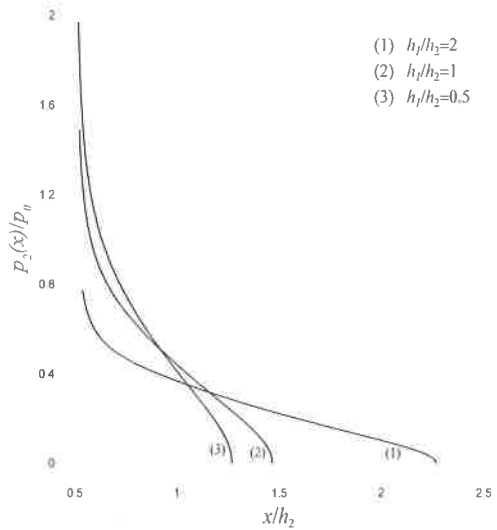
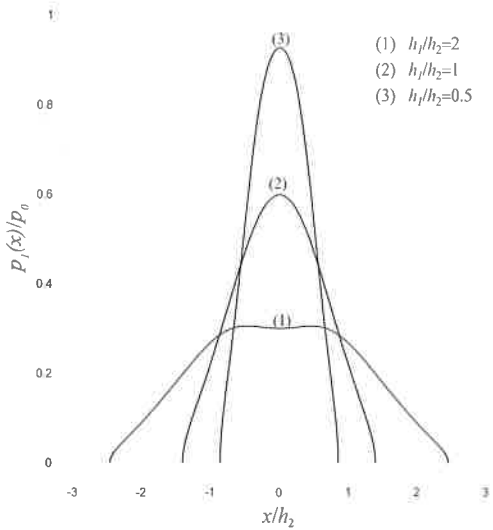
Şekil 5. 2 nolu tabaka ve çeyrek düzlem kayma modülleri oranına (μ_3/μ_2) bağlı olarak, 2 nolu tabaka-çeyrek düzlem arası temas mesafesi



$$(a/h_2 = 0.5, h_1/h_2 = 1, \mu_2/\mu_1 = 2, \mu_3/\mu_2 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2)$$

Şekil 6. Açıklığa (c/h_2) bağlı olarak, tabakalar arası temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı

Şekil 7. Açıklığa (c/h_2) bağlı olarak, 2 nolu tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı



$$a/h_2 = 0.5, c/h_2 = 0.5, \mu_2/\mu_1 = 2, \mu_3/\mu_2 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$$

Şekil 8. Tabakalar yükseklik oranına (h_1/h_2) bağlı olarak, tabakalar arası temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı

Şekil 9. Tabakalar yükseklik oranına (h_1/h_2) bağlı olarak, 2 nolu tabaka-çeyrek düzlem temas mesafesi boyunca gerilme dağılımı

KAYNAKLAR

1. Hertz, H., Gesammelte werke von Heinrich Hertz, Volume 1, Leipzig, 1985.
2. Galin, L. A., Contact Problems in the Theory of Elasticity, North Caroline State Collage Articles on the Application Series, Raleigh, N.C., 1961.
3. Ufliand, I. S., Survey of Articles on the Applications of İntegral Transforms in the Theory of Elasticity, North Caroline State Collage Articles on the Application Series, Raleigh, N.C., 1961.
4. Ratwani, M. ve Erdoğan, F., "On the Plane Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer", International Journal of Solids and Solids and Structures", 9, 921-936, 1973.
5. Civelek, M.B. ve Erdoğan, F., "The Axisymmetrical Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer", International Journal of Solids and Solids and Structures", 10 (6), 639-659, 1974.
6. Kahya, V., Ozşahin, T.S., Birinci, A. ve Erdol, R., "A Receding Contact Problem for an Anisotropic Elastic Medium Consisting of a Layer and a Half Plane", International Journal of Solids and Solids and Structures", 44, 5695-5710, 2007.
7. Keer, L.M., Dundurs, J. ve Tsai, K.C., "Problems Involving a Receding Contact Between a Layer and a Half Space", Journal of Applied Mechanics, 39, 1115-1120, 1972.
8. El- Borgi, S., Abdelmoula, R. ve Keer, L., " A Receding Contact Plane Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate", International Journal of Solids and Solids and Structures", 43, (3-4), 658-674, 2006.
9. Comez, I., Birinci, A. ve Erdol, R., " Double Receding Contact Problem for a Rigid Stamp and two Elastic Layer", European Journal of Mechanics, A/Solids, 23, 301-309, 2004.
10. Gerber, C.E., "Contact Problems fort he Elastic Quarter-Plane and Quarter-Space", Stanford University Engineering Mechanics, Ph. D. Thesis, Michigan, March 1968.
11. Dundurs, J. ve Lee, M.S., "Stres Concentration at a Sharp Edge in Contact Problems", Journal of Elasticity, 2, (1972), 109-112.
12. Bakioğlu, M., "Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz Temas Problemi", Döçentlik Tezi, İstanbul Teknik Üniveritesi, 1976.
13. Aksoğan, O., Akavcı, S. ve Becker, A.A., "A Comparative Study of the Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes", Journal of Faculty of Engineering Architecture, C.U., 11, (1996), 25-31.
14. Aksoğan, O., Akavcı, S. ve Becker, A.A., "The Solution of the Nonsymmetrical Contact Problem of an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes UsingThree Different Methods", Journal of Faculty of Engineering Architecture, C.U., 12, (1997), 1-14.
15. Aksoğan, O., Akavcı, S. ve Becker, A.A., "The Solution of the Nonsymmetrical Contact Problem of an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes", European Conferance on Computational Mechanics, ECCM99, Germany, 1999.
16. Akavcı, S., "İki Elastik Çeyrek Düzleme OturanElastik Bir Tabakanın Sürtinmesiz Temas Problemi", Doktora Tezi, Çukurova Üniveritesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 1999.
17. Aghili, A., "Mixed Boundary Value Problems of the Quarter-Plane", State University of Newyork at Stany Brook Applied Mathematics and Statistics, Ph. D. Thesis, Newyork, August 1999.
18. Krenk, S., On Quadrate Formulas For Singular İntegral-Equations of 1st and 2nd Kind Quarterly of Applied Mathematics, 33, (3), 225-232, 1975.
19. Erdogan, F., Gupta, G.D. ve Cook, T.S., " Numerical Solution of Singular İntegral Equations, in Methods of Analysis and Solution of Crack Problems, Noordhoff, Groningen, 1973.