İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UZUN DALGA-KISA DALGA ETKİLEŞİM DENKLEMLERİ: YALNIZ DALGA ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE YÖRÜNGESEL KARARLILIK

DOKTORA TEZİ

Handan BORLUK

Anabilim Dalı : **MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ**

Programı : **MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ**

MART 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UZUN DALGA-KISA DALGA ETKİLEŞİM DENKLEMLERİ: YALNIZ DALGA ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE YÖRÜNGESEL KARARLILIK

DOKTORA TEZİ

Handan BORLUK
(509022001)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30 Aralık 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 17 Mart 2009

Tez Danışmanı	:	Prof. Dr. Hüsnü A. ERBAY
Diğer Jüri Üyeleri		Prof. Dr. Faruk GÜNGÖR (İ.T.Ü.)
		Prof. Dr. Varga KALANTAROV (K.Ü.)
		Prof. Dr. Albert ERKİP (S.Ü.)
		Prof. Dr. Can F. DELALE (İ.T.Ü.)

MART 2009

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimime başladığım andan itibaren benden desteklerini esirgemeyen ve beni hep daha iyiye yönlendiren tez danışmanım Prof. Dr. Hüsnü Ata Erbay'a ve Prof. Dr. Saadet Erbay'a sonsuz sabırları ve emekleri için teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca başta annem Nubar Borluk ve yeğenim Hasan Kerim Tükenmez olmak üzere tüm aileme hep yanımda oldukları için teşekkür ederim.

Aralık 2008 Handan BORLUK

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$	:	n boyutlu gerçel Öklit uzayı
$\mathbb{C}$	:	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathrm{Re}(\mathbf{z})$	:	z karmaşık büyüklüğünün gerçel kısmı
$\mathrm{Im}(\mathbf{z})$	:	z karmaşık büyüklüğünün sanal kısmı
$\mathbf{L^p}(\mathbb{R})$	:	$(\int\limits_{\mathbb{R}} \lvert u\rvert^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty$ koşulunu sağlayan $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonların Banach uzayı ($1 \le p < \infty$)
$\lVert\mathbf{u}\rVert_{\mathbf{p}}$	:	$u \in L^p(\mathbb{R})$ için norm ($\lVert u\rVert_p = (\int\limits_{\mathbb{R}} \lvert u\rvert^p dx)^{\frac{1}{p}}$)
$\mathbf{L}^{\infty}(\mathbb{R})$	:	Hemen hemen her yerde $\lVert u\rVert_\infty < \infty$ koşulunu sağlayan u ölçülebilir fonksiyonların uzayı
$\lVert\mathbf{u}\rVert_\infty$	:	$u \in L^\infty(\mathbb{R})$ için norm ($\lVert u\rVert_\infty = \inf\{a \in \mathbb{R},\ a > 0 : \text{hemen hemen her yerde } \lvert u(x)\rvert \le a\}$)
$\mathbf{D}^\alpha$	:	$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ çoklu indisi için türev operatörü ($D^\alpha = \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}},\ \lvert\alpha\rvert = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$)
$\mathbf{H^k}(\mathbb{R})$	:	$\{u : u \in L^2(\mathbb{R}),\ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}),\ \forall\ \lvert\alpha\rvert \le k,\ k \in \mathbb{N}\}$ Sobolev uzayı
$\lVert\mathbf{u}\rVert_{\mathbf{H^k}}$	:	$u \in H^k(\mathbb{R})$ için norm ($\lVert u\rVert_{H^k} = \sum_{\lvert\alpha\rvert \le k} \lVert D^\alpha u\rVert_2$)

UZUN DALGA-KISA DALGA ETKİLEŞİM DENKLEMLERİ: YALNIZ DALGA ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE YÖRÜNGESEL KARARLILIK

ÖZET

Bu tez çalışmasında, doğrusal olmayan dalga yayılımını karakterize eden iki farklı denklem sistemi için yalnız dalga çözümlerinin matematiksel analizi gerçekleştirilmiştir. İlk olarak,

$$\begin{aligned} i\phi_t + \alpha\phi_{xx} &= \beta u\phi, \\ i\psi_t + \alpha\psi_{xx} &= \beta u\psi, \\ u_t &= \beta(|\phi|^2 + |\psi|^2)_x \end{aligned}$$

şeklinde verilen ve üç kuple denklemden oluşan bir boyutlu uzun dalga-kısa dalga (1D-LSI) etkileşim denklemleri ele alınmıştır. Burada $\alpha > 0$ ve β gerçel sabitler olup, x uzay koordinatını, t zamanı, $u(x,t)$ gerçel değerli fonksiyonu uzun dalga modunu, $\phi(x,t)$ ve $\psi(x,t)$ ise kısa dalga modlarının kompleks genliklerini göstermektedir. 1D-LSI sistemi sürekli bir ortamda yayılan iki kısa ve bir uzun dalganın rezonans etkileşimini temsil etmektedir. Kısa dalgaların grup hızları ile uzun dalga faz hızının eşit olması rezonans durumunu oluşturmaktadır. Bu tez çalışmasında 1D-LSI denklem sisteminin yalnız dalga çözümlerinin varlığı ve bu çözümlerin kararlılığı matematiksel analiz teknikleri kullanılarak gösterilmiştir. Çözümlerin varlığı sorusu bir varyasyonel problem yardımıyla incelenmiştir. Yalnız dalgaların kararlılığını araştırmak için, yörüngesel kararlılık kavramı kullanılmış ve Lyapunov yöntemi takip edilmiştir.

İkinci olarak,

$$\begin{aligned} i\phi_t + \phi_{xx} &= \phi u_x, \\ u_{tx} + \gamma u_{yy} &= -(|\phi|^2)_x \end{aligned}$$

şeklinde verilen ve iki kuple denklemden oluşan iki boyutlu uzun dalga-kısa dalga etkileşim (2D-LSI) denklemleri ele alınmıştır. Burada γ gerçel bir sabit olup, x boyuna uzay koordinatını, y enine koordinatı, t zamanı, $u(x,y,t)$ gerçel değerli fonksiyonu uzun dalga modunu, $\phi(x,y,t)$ fonksiyonu ise kısa dalganın kompleks genliğini gösterir. Bu denklemlerde görülen γ sabiti, esas olarak x-ekseni boyunca yayılan uzun ve kısa dalgalar üzerine etkiyen y-ekseni yönündeki zayıf enine etkileri ölçmektedir. Bu tez çalışmasında 2D-LSI denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin var olmaması ve varlığı soruları yine matematiksel analiz teknikleri kullanılarak incelenmiştir. Yalnız dalga çözümlerinin var olmadığı durumla ilgili ispat, Pohozaev tipi özdeşlikler üzerine kurulmuştur. Yalnız dalga çözümlerinin varlığı ile ilgili ispat ise, yine bir varyasyonel problem yardımıyla incelenmiştir.

Tez çalışması altı ana bölümden oluşmaktadır: İlk bölümde doğrusal olmayan dispersif dalga denklemleri için yalnız dalga çözümlerinin varlığı ve yörüngesel

kararlılığı problemlerinin önemi belirtilmiştir. İkinci bölümde 1D-LSI denklemleri ve 2D-LSI denklemleri tanıtılmıştır. Bu denklemlerin, sırasıyla bir boyutlu ve iki boyutlu durumlarda, uzun dalgalar ve kısa dalgalar arasındaki etkileşimleri karakterize eden denklemler olduğu ifade edilmiştir. Ayrıca, bu denklemlerin korunan büyüklükler ve invaryantlık dönüşümleri gibi bazı temel özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde, 1D-LSI denklemleri için yalnız dalga çözümlerinin varlığı ispatlanmıştır. İlk olarak bir kısıtlamasız varyasyonel problem tanımlanmıştır. Daha sonra, yalnız dalgaların varlığı varyasyonel problemin bir minimumunun varlığı gösterilerek ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde, 1D-LSI denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin yörüngesel kararlı olduğu ispat edilmiştir. Bu ispat, esas olarak, Lyapunov fonksiyoneline ait değişimin hem alttan hem de üstten sınırlı olduğunun gösterilmesi üzerine inşa edilmiştir. Beşinci bölümde, 2D-LSI denklemlerinin yalnız dalga çözümleri için iki sonuç verilmiştir. İlk olarak, enine etkileri karakterize eden γ parametresinin negatif değerleri için yalnız dalga çözümlerinin var olmadığı ispatlanmıştır. Daha sonra, γ parametresinin pozitif değerleri için yalnız dalgaların varlığı ispatlanmıştır. Her iki durumda da ispat, Pohozaev tipi özdeşlikler üzerine inşa edilmiştir. Altıncı bölümde, elde edilen sonuçlar kısaca değerlendirilmiş ve bu tez çalışmasının devamı olarak gelecekte çalışılması düşünülen araştırma problemleri ifade edilmiştir.

LONG WAVE-SHORT WAVE INTERACTION EQUATIONS: EXISTENCE OF SOLITARY WAVE SOLUTIONS AND ORBITAL STABILITY

SUMMARY

In this thesis, a mathematical analysis of solitary wave solutions for two different systems of equations, which characterize nonlinear wave propagation is presented. Firstly, one dimensional long wave-short wave interaction (1D-LSI) equations given by the following three-coupled equations

$$
\begin{aligned}
i\phi_t + \alpha\phi_{xx} &= \beta u\phi, \\
i\psi_t + \alpha\psi_{xx} &= \beta u\psi, \\
u_t &= \beta(|\phi|^2 + |\psi|^2)_x
\end{aligned}
$$

are considered. Here $\alpha > 0$ and β are real constants, x is the spatial coordinate, t is the time, $u(x,t)$ is a real-valued function characterizing long wave mode and $\phi(x,t)$ and $\psi(x,t)$ are complex-valued functions denoting amplitudes of short wave modes. The 1D-LSI system describes the resonant interaction of two short waves and one long wave propagating in a continuous media. The resonance case arises when the group velocity of short waves is equal to the phase velocity of long waves. In this thesis the existence and orbital stability of solitary wave solutions for the 1D-LSI system are proved using mathematical analysis techniques. The existence of solutions is studied by the help of a variational problem. The orbital stability of solitary waves is investigated by the Lyapunov method.

In addition, two dimensional long wave-short wave interaction (2D-LSI) equations given by the following two coupled equations

$$
\begin{aligned}
i\phi_t + \phi_{xx} &= \phi u_x, \\
u_{tx} + \gamma u_{yy} &= -(|\phi|^2)_x
\end{aligned}
$$

are considered. Here γ is a real constant, x is the longitudinal coordinate, y is the transverse coordinate, t is the time, $u(x,y,t)$ is a real-valued function characterizing the long wave mode and $\phi(x,y,t)$ is a complex-valued function denoting the complex amplitude of short wave mode. The constant γ appearing in the above equations measures weak transverse effects in the y-axis direction while the waves propagate essentially along the x-axis direction. The conditions for both the non-existence and the existence of solitary wave solutions for the 2D-LSI equations are investigated using Pohozaev-type identities and variational techniques.

The thesis is organized in six chapters: In Chapter 1, the importance of both the existence and the orbital stability of solitary wave solutions for nonlinear dispersive wave equations is emphasized. In Chapter 2, the 1D-LSI equations and

2D-LSI equations are introduced. The 1D-LSI equations and 2D-LSI equations that describe interactions between long waves and short waves in, respectively, one and two dimensions are introduced. In particular, some fundamental properties of these equations such as conserved quantities and invariant transformations are given. In Chapter 3, the existence of solitary wave solutions for the 1D-LSI equations is proved. An unconstrained variational problem is first defined. The existence of solitary waves is then established by showing the existence of the minimum of the unconstrained variational problem. In Chapter 4, the orbital stability of solitary wave solutions for the 1D-LSI equations is proved. The proof is based on showing that the variation of the Lyapunov functional has both lower and upper bounds. In Chapter 5, solitary wave solutions of the 2D-LSI equations are considered. First the non-existence of solitary wave solutions is proved for negative values of the parameter γ describing transverse effects. Next the existence of solitary waves is proved for positive values of γ. In both cases, the proof utilizes the Pohozaev-type identities. In Chapter 6, the results obtained are summarized and suggestions for future work are stated.

1. GİRİŞ

Doğrusal olmayan dispersif dalga denklemleri akışkanlar mekaniği, elastisite teorisi, doğrusal olmayan optik, plazma fiziği gibi fiziğin bir çok alanında dalga yayılımını karakterize eden kısmi türevli diferansiyel denklemler olarak karşımıza çıkarlar [1]. Bu durum sözkonusu denklemlerin analitik çözümlerini elde etme konusunda ve, eğer bu mümkün değil ise, yaklaşık analitik çözümlerinin elde edilmesi konusunda araştırıcıların büyük bir gayret içerisine girmesine neden olmuştur. Doğrusal olmayan dalga denklemleri için çözümlerin varlığı, tekliği ve çözümün başlangıç koşullarına sürekli bağlılığı problemleri, çok sayıda araştırmacının ilgisini çekmiştir. Bunlara ek olarak çözümlerin kararlılığı, çözümlerin zamanda asimptotik davranışı veya çözümlerin sonlu zamanda bir tekillik oluşturup oluşturmadığı incelenmiştir. Bu çalışmada, doğrusal olmayan dispersif dalga denklemleri için yalnız dalga çözümlerinin, varlığı ve kararlılığı tartışılacaktır. Yalnız dalga çözümleri, doğrusal olmama özelliğinin neden olduğu dalga dikleşmesi ile dispersif olma özelliğinin yarattığı dalga dağılmasının dengelenmesi sonucu oluşan ve periyodik dalga çözümlerinden tamamen farklı özel çözümlerdir. Bu dengeleme sonucu lokalize olmuş dalgaların şekillerini koruyarak ortamda yayılmaları mümkün olur ve bu özellikleri nedeniyle yalnız dalga olarak adlandırılırlar. Yalnız dalga çözümlerinin kararlılık problemi bilinen kararlılık problemlerinden farklılık gösterir ve yörüngesel kararlılık kavramına başvurulur.

Dalga boyunun karakteristik bir uzunluğa oranının çok büyük olduğu duruma karşılık gelen uzun dalgaların yayılımını tanımlayan doğrusal olmayan denklemler ile bu oranın çok küçük olduğu duruma karşılık gelen kısa dalgaların yayılımını tanımlayan doğrusal olmayan denklemler iki farklı kanonik formda ortaya çıkarlar ve farklı yapısal özelliklere sahiptirler. Çok farklı özelliklere sahip sürekli ortamlarda yayılan doğrusal olmayan bir boyutlu uzun dalgaları yöneten kısmi türevli diferansiyel denklem olarak daima Kortweg-de Vries (KdV) denklemi veya onun genelleştirilmiş formları karşımıza çıkmaktadır. Benzer şekilde, farklı sürekli ortamlarda yayılan doğrusal olmayan bir boyutlu kısa dalgaların genliklerini yöneten denklem olarak daima doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denklemi veya onun genelleştirilmiş formları elde edilmektedir. Hem KdV denklemi hem de NLS denklemi bir önceki paragrafta ifade edilen özellikler açısından çok sayıda araştırmacı tarafından incelenmiş dispersif dalga denklemleridir. Ancak, bazı durumlarda, sürekli ortamda yayılan dalgalar sadece uzun dalgalar veya sadece kısa dalgalardan oluşmaz ve uzun ile kısa dalgalar sürekli ortamda herhangi bir etkileşime girmeksizin birlikte yayılmayı sürdürür. Bu durumda bazı özel koşullar sağlanırsa, rezonans durumu ortaya çıkar ve sürekli ortamda yayılan uzun ve kısa dalgalar etkileşmeye başlar. Bu özel koşullara örnek olarak kısa dalganın grup hızının uzun dalganın faz hızına eşit olması hali verilebilir. Söz konusu rezonans durumunu tanımlayan doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler literatürde uzun dalga-kısa dalga etkileşim denklemleri (LSI) olarak adlandırılır. Birçok farklı fiziksel problemde ortaya çıkan bu denklemler hem KdV denklemine ait bazı özellikleri hem de NLS denklemine ait bazı özellikleri içeren kuple denklem sistemleridir. Kuple denklem sistemindeki denklem sayısı ortamda yayılan uzun dalgaların sayısı ile kısa dalgaların sayısının toplamı kadardır. Bu tez çalışmasında iki farklı LSI sistemi incelenecektir. Bunlardan birincisi, üç kuple denklemden oluşan ve iki kısa dalga ile bir uzun dalganın etkileşimini karakterize eden bir boyutlu uzun dalga-kısa dalga etkileşim (1D-LSI) sistemidir [2–4]. Diğeri ise, iki kuple denklemden oluşan ve bir kısa dalga ile bir uzun dalganın etkileşimini tanımlayan iki boyutlu uzun dalga-kısa dalga etkileşim (2D-LSI) sistemidir [5–7]. 2D-LSI sisteminde uzun ve kısa dalgaların esas olarak bir doğrultuda yayıldığı ancak zayıf enine etkilere maruz kaldığı varsayılır.

Bu çalışmanın matematiksel analizin ispat tekniklerini kullanarak gerçekleştirmek istediği üç temel amacı vardır. Bunlardan birincisi 1D-LSI sisteminin yalnız dalga çözümlerinin varlığını ispatlamaktır. İkincisi, 1D-LSI sistemi için yalnız dalga çözümlerinin yörüngesel kararlılığını ispatlamaktır. Üçüncüsü ise, 2D-LSI denklemleri için yalnız dalga çözümlerinin varlığını ispatlamaktır.

Tez altı bölümden oluşmaktadır. Bölüm 2, 1D-LSI denklemleri ve 2D-LSI denklemlerinin kısa bir literatür özeti ile korunan büyüklükler gibi bazı temel özelliklerinin verildiği tanıtıcı bir bölümdür.

Bölüm 3, 1D-LSI denklemleri için yalnız dalga çözümlerinin varlığının ispatını içerir. Yalnız dalgaların varlığı, kısıtlamasız bir varyasyonel problemin minimumunun varlığının ispatı yardımıyla gösterilir. İspat esas olarak, kübik NLS denklemi için önerilmiş yaklaşımın 1D-LSI denklemine uyarlanması esasına dayanır..

Bölüm 4, 1D-LSI denklemleri için yalnız dalga çözümlerinin yörüngesel kararlılığının ispatını içerir. İlk olarak, yörüngesel kararlılık kavramı tanıtılmış ve NLS denkleminin yalnız dalga çözümleri için literatürde verilmiş yörüngesel kararlılık ispatları kısaca özetlenmiştir. Daha sonra, Lyapunov fonksiyonelindeki değişimin hem alttan hem de üstten sınırlı olduğunun gösterilmesini esas alan bir yaklaşım ile, 1D-LSI denkleminin yalnız dalga çözümleri için yörüngesel kararlılık ispatı yapılmıştır.

Bölüm 5, 2D-LSI denklemlerinin yalnız dalga çözümleri ile ilgili iki önemli sonuç içerir. İlk olarak, enine etkileri gösteren parametrenin negatif değerleri için 2D-LSI denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin mevcut olmadığı ispatlanır. İkinci olarak, sözkonusu parametrenin pozitif değerleri için 2D-LSI denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin varlığı ispatlanır. Her iki durumda da ispat Pohozaev tipi özdeşlikler üzerine kurulur.

Bölüm 6'da tezde elde edilen temel sonuçlar kısaca özetlenmiş ve gelecekte çalışılması önerilen problemler sunulmuştur. Tez çalışmasında kullanılan temel teorem ve eşitsizlikler Ek A'da listelenmiştir.

2. UZUN DALGA-KISA DALGA ETKİLEŞİM DENKLEMLERİ (LSI DENKLEMLERİ)

2.1 Giriş

Bu bölümde tez çalışmasının konusu olan uzun dalga-kısa dalga etkileşim (LSI) denklemleri kısaca tanıtılacak ve bu denklemlere ait bilinen korunan büyüklükler ifade edilecektir. İlk olarak, Altbölüm 2.2'de, bir boyutlu dalga etkileşimini tanımlayan 1D-LSI denklemlerinin ortaya çıktığı fiziksel problemlerden örnekler verilecek ve Noether teoremi yardımıyla bu denklemlerin çözümlerinin sağladığı korunum yasaları türetilecektir. Benzer şekilde Altbölüm 2.3'de, iki boyutlu dalga etkileşimini tanımlayan 2D-LSI deklemleri için literatürde yapılmış olan çalışmalar özetlenecek ve yine ilgili korunan büyüklükler türetilecektir.

2.2 Bir Boyutlu Etkileşim (1D-LSI) Denklemleri

Bu tez çalışmasının konusu olan bir boyutlu uzun dalga-kısa dalga etkileşim (1D-LSI) denklemleri

$$\left.\begin{aligned} i\phi_t + \alpha\phi_{xx} &= \beta u\phi, \\ i\psi_t + \alpha\psi_{xx} &= \beta u\psi, \\ u_t &= \beta(|\phi|^2 + |\psi|^2)_x \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

şeklinde üç kuple, doğrusal olmayan, kısmi türevli diferansiyel denklemden oluşur. Burada x uzaysal değişkeni, t ise zamanı gösterir. $\phi(x,t)$ ve $\psi(x,t)$ kompleks değerli fonksiyonları kısa dalgaların genliklerini, $u(x,t)$ ise uzun dalga modunu tanımlar, α ve β ise sabitlerdir. (**2.1**) 1D-LSI sistemi $x = \tilde{x}, \quad t = \tilde{t}/\alpha, \quad u = \alpha\tilde{u}, \quad (\phi,\psi) = \sqrt{\alpha}(\tilde{\phi},\tilde{\psi})$, değişken dönüşümü ile, α katsayısının bir olduğu aynı formda bir sisteme dönüştüğünden, çalışmanın bundan sonraki kısmında, genellikten kaybetmeksizin, $\alpha = 1$ alınacaktır.

1D-LSI denklemleri bir sürekli ortamda yayılan iki kısa dalganın ve bir uzun dalganın etkileşimini tanımlayan denklemler olarak çeşitli çalışmalarda türetilmiştir. 1D-LSI denklemleri, iç su dalgalarının yayılımını tanımlayan denklemler olarak Ma [2] tarafından, yüzey su dalgalarının yayılımını tanımlayan denklemler olarak ise Craik [3] tarafından türetilmiştir. Bu denklemlerin bir kısa dalga ve bir uzun dalganın etkileşimini karakterize eden iki bileşenli hali ise ($\psi \equiv 0$), yine yüzey su dalgaları için Djordjevic ve Redekopp [8] tarafından türetilmiştir. 1D-LSI denklemleri genelleştirilmiş elastik bir ortamda yayılan iç elastik dalgaların rezonans etkileşimini tanımlayan denklemler olarak Erbay [4] tarafından türetilmiştir.

Sürekli ortamda yayılan iki kısa ve bir uzun dalga arasında böyle bir rezonans durumunun ortaya çıkması, yani 1D-LSI denklemlerinin geçerli olması, için iki koşulun sağlanması gereklidir. Birincisi, her iki kısa dalga aynı grup hızına sahip olmalıdır. İkincisi ise, kısa dalgaların bu grup hızı uzun dalganın faz hızına eşit olmalıdır. Bilindiği gibi, kübik doğrusal olmayan Schrödinger denklemi bir sürekli ortamda yayılan kısa dalgaların genlik modülasyonunu tanımlayan denklem olarak türetildiğinde, kübik terimin katsayısının paydasında kısa dalgaların grup hızı ile uzun dalganın faz hızının farkı bulunur. Bu nedenle rezonans koşulunun sağlanması halinde kübik doğrusal olmayan Schrödinger denklemi geçerliliğini yitirir ve ilgili tüm büyüklüklerin yeni bir ölçeklemesi sonucu türetilen 1D-LSI denklemlerine ulaşılır. 1D-LSI denklemlerinin ilk iki denklemi, fiziksel olarak, kısa dalga dispersiyonunun uzun ve kısa dalgalar arasındaki doğrusal olmayan etkileşim ile dengelendiğini ifade eder. Son denklem ise, yine fiziksel olarak, uzun dalganın zaman içindeki değişiminin her bir kısa dalganın kendi kendisiyle olan etkileşimlerinin toplam etkisi tarafından belirlendiğini ifade eder.

1D-LSI denklemlerinin $|x| \to \infty$ iken $\phi \to 0$, $\psi \to 0$ ve $u \to 0$ koşulu altında, ters saçılma tekniği ile çözülebileceği Ma [2] tarafından ispatlanmış ve bir-soliton çözümleri verilmiştir. 1D-LSI denklemlerinin başlangıç değer problemininin iyi tanımlı olduğunu ifade eden bir matematiksel ispat henüz literatürde sunulmamıştır. Ancak bir kısa dalga ve bir uzun dalganın etkileşimini tanımlayan iki bileşenli

$$\left.\begin{array}{l} i\phi_t + \phi_{xx} = \beta u\phi, \\ u_t = \nu(|\phi|^2)_x \end{array}\right\} \qquad \textbf{(2.2)}$$

özel hali için başlangıç değer probleminin global iyi tanımlı olduğu, başlangıç datası üzerine farklı koşullar koyarak Tsutsumi ve Hatano [9,10] ve Laurençot [11] tarafından gösterilmiştir.

2.2.1 1D-LSI sisteminin değişmezleri

Bu altbölümde, (**2.1**) sisteminin yalnız dalga çözümlerinin yörüngesel kararlılık ispatında önemli rol oynayan değişmezler Noether teoremi yardımıyla elde edilecektir.

Yalnız dalgaların yörüngesel kararlılığının incelenmesi sırasında, 1D-LSI sisteminin çözümlerinin zamanla değişmez kaldığı dört farklı doğrusal olmayan fonksiyonel kullanılacaktır. Bu değişmezler, 1D-LSI sisteminin yalnız dalga çözümlerinin sayısal bir incelemesinin sunulduğu [12] makalesinde listelenmiştir. Çalışmanın bütünlüğü için 1D-LSI sisteminin değişmezleri, çözüm fonksiyonları ve türevlerinin $|x| \to \infty$ için sıfıra gitmesi varsayımı altında Noether teoremi yardımı ile elde edilecektir. Öte yandan, 1D-LSI sisteminin değişmezlerinin sadece kısmi integrasyon ve cebirsel işlemler kullanılarak da elde edilmesi mümkündür ve böyle bir hesaplamanın ayrıntıları Ek B'de verilmiştir.

(**2.1**) 1D-LSI sisteminin Lagrange yoğunluk fonksiyonu, $\alpha = 1$ ve $u = v_x$ olmak üzere,

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}v_x v_t - \frac{i}{2}(\phi\phi_t^* - \phi^*\phi_t + \psi\psi_t^* - \psi^*\psi_t) - (|\phi_x|^2 + |\psi_x|^2) - \beta(|\phi|^2 + |\psi|^2)v_x, \quad (\mathbf{2.3})$$

ile verilir. $\mathcal{D}$ uzay-zaman integrasyon bölgesi olmak üzere, $S\{u, \phi, \psi\} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{S} dx dt$ fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemleri, (**2.1**) 1D-LSI sistemini verir. Sistemin Lagrange formülasyonu, Noether teoremi yardımı ile korunan büyüklüklerinin bulunmasını sağlar [13]. Buna göre, eğer $S\{u, \phi, \psi\}$ fonksiyoneli, $x_0 = t,\ x_1 = x$ ve $\varphi_0 = u,\ \varphi_1 = \phi,\ \varphi_2 = \phi^*,\ \varphi_3 = \psi,\ \varphi_4 = \psi^*$ olmak üzere,

$$x_j' = x_j + \delta x_j \quad (j = 0, 1), \qquad \varphi_i' = \varphi_i + \delta\varphi_i \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

ile tanımlanan sonsuz küçük dönüşümler altında değişmez ise

$$P_t + Q_x = 0 \quad (\mathbf{2.4})$$

şeklindeki korunum yasası geçerlidir [13]. (**2.4**) korunum denklemine ait korunan büyüklük ise

$$\int_{\mathbb{R}} P dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{4} \sum_{j=0}^{1} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \varphi_{i,x_0}} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \delta x_j - \delta\varphi_i \right) - \mathcal{S}\delta x_0 \right) dx = \text{sabit}$$

ile verilir. Noether teoremi her sonsuz küçük dönüşüme karşılık gelen bir korunum denklemi elde etmemizi sağlar.

1D-LSI sistemi aşağıda verilen sonsuz küçük dönüşümler altında değişmez kalır:

(i) v değişkeninde öteleme: (**2.3**) Lagrange yoğunluk fonksiyonu v bağımlı değişkeninde $v' = v + v_0$ ötelemesi altında değişmezdir. Bu durumda

$$\delta t = \delta x = \delta\psi = \delta\psi^* = \delta\phi = \delta\phi^* = 0$$

olur ve (**2.4**) denklemi, $u = v_x$ değişkeninin sağladığı,

$$u_t = \beta(|\phi|^2 + |\psi|^2)_x$$

denklemine indirgenir. Karşılık gelen korunan büyüklük ise

$$I_0 = \int_{\mathbb{R}} u\ dx$$

ile verilir.

(ii) Faz dönüşümü: (**2.3**) Lagrange yoğunluk fonksiyonu $\phi' = e^{i\epsilon}\phi$ faz dönüşümü altında değişmez kalır. Faz dönüşümüne karşı gelen sonsuz küçük dönüşüm

$$\phi' \simeq \phi + i\epsilon\phi$$

ile verilir. Bu durumda

$$\delta t = \delta x = \delta u = \delta\psi = \delta\psi^* = 0, \quad \delta\phi = i\epsilon\phi$$

olur ve (**2.4**) denklemi ϕ için

$$(|\phi^2|)_t + i(\phi_x^*\phi - \phi_x\phi^*)_x = 0$$

kütle korunumunun yerel denklemini verir. Bu durumda elde edilen korunan büyüklük

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} |\phi|^2\ dx$$

olur ve ilgili korunum denklemi ϕ kısa dalgasına ait kütle korunumu olarak ifade edilir. Benzer şekilde, Lagrange yoğunluk fonksiyonu $\psi' = e^{i\epsilon}\psi$ faz dönüşümü altında değişmez kalır. Faz dönüşümüne karşı gelen sonsuz küçük dönüşüm $\psi' \simeq \psi + i\epsilon\psi$ ile verilir. Bu durumda

$$\delta t = \delta x = \delta u = \delta\phi = \delta\phi^* = 0, \quad \delta\psi = i\epsilon\psi$$

olur ve (**2.4**) denklemi ψ için

$$(|\psi^2|)_t + i(\psi_x^*\psi - \psi_x\psi^*)_x = 0$$

kütle korunumunun yerel denklemine indirgenir. Karşılık gelen korunan büyüklük, yani ψ kısa dalgasına ait toplam kütle

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 \; dx$$

ile verilir.

(iii) Uzay koordinatında öteleme: (**2.3**) Lagrange yoğunluk fonksiyonu uzay koordinatındaki $x' = x + \delta x$ ötelemesi altında değişmezdir. Bu durumda

$$\delta t = \delta u = \delta\psi = \delta\psi^* = \delta\phi = \delta\phi^* = 0$$

olur ve (**2.4**) denklemi yerel olarak momentumun korunumunu ifade eden

$$\begin{aligned}&\big(u^2 + i(\phi_x^*\phi - \phi_x\phi^*) + i(\psi_x^*\psi - \psi_x\psi^*)\big)_t \\ &\quad + \left(-2(\phi_x\phi_x^* - \psi_x\psi_x^* + i(\phi\phi_t^* - \phi^*\phi_t + \psi\psi_t^* - \psi^*\psi_t)\right)_x = 0.\end{aligned}$$

denklemine indirgenir. Karşılık gelen korunan büyüklük, yani toplam momentum,

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}} \big(u^2 + i(\phi^*\phi_x - \phi\phi_x^* + \psi^*\psi_x - \psi\psi_x^*)\big) \; dx$$

ile verilir.

(iv) Zamanda öteleme: (**2.3**) Lagrange yoğunluk fonksiyonu zaman koordinatındaki $t' = t + \delta t$ ötelemesi altında değişmezdir. Bu durumda

$$\delta x = \delta u = \delta\phi = \delta\phi^* = \delta\psi = \delta\psi^* = 0$$

olur ve (**2.4**) denklemi yerel olarak enerji korunumunu ifade eden

$$\begin{aligned}&\big((|\phi_x|^2 + |\psi_x|^2) + \beta(|\phi|^2 + |\psi|^2)u\big)_t \\ &\quad + \left(\frac{v_t^2}{2} - \beta(|\phi|^2 + |\psi|^2)v_t - (\phi_x^*\phi_t + \phi_x\phi_t^* + \psi_x^*\psi_t + \psi_x\psi_t^*)\right)_x = 0\end{aligned}$$

denklemine indirgenir. Bu durumda

$$I_4 = \int_{\mathbb{R}} \big(|\phi_x|^2 + |\psi_x|^2 + \beta(|\phi|^2 + |\psi|^2)u\big) \; dx$$

ile verilen korunan büyüklük sistemin toplam enerjisi veya Hamiltonyenidir. Bu sonuçlar aşağıdaki lemma ile ifade edilebilir:

Lemma 2.1. (**2.1**) 1D-LSI sisteminin

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int\limits_{\mathbb{R}} u dx, \quad I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} |\phi|^2 dx, \quad I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx, \\
I_3 &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left[u^2 + i(\phi^* \phi_x - \phi \phi_x^* + \psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*)\right] dx, \\
I_4 &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left[|\phi_x|^2 + |\psi_x|^2 + \beta(|\phi|^2 + |\psi|^2) u\right] dx
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

şeklinde korunan büyüklükleri vardır.

2.3 İki Boyutlu Etkileşim (2D-LSI) Denklemleri

Bu çalışmada ele alınan iki boyutlu uzun dalga-kısa dalga etkileşim (2D-LSI) denklemleri

$$
\left.
\begin{array}{l}
i\phi_t + \phi_{xx} = \phi u_x, \\
u_{tx} + \gamma u_{yy} = -(|\phi|^2)_x
\end{array}
\right\}
\tag{2.6}
$$

şeklinde iki kuple, doğrusal olmayan, kısmi türevli diferansiyel denklemden oluşur. Burada x, y uzaysal değişkenleri, t ise zamanı gösterir, $\phi(x,t)$ kompleks değerli fonksiyonu kısa dalganın genliğini, $u(x,t)$ ise uzun dalga modunu tanımlar, γ ise bir sabittir. Bu denklemler bir sürekli ortamda yayılan bir kısa dalganın ve bir uzun dalganın rezonans etkileşimini tanımlayan denklemler olarak türetilmiştir. Su dalgaları [5], geometrik optik [6] ve elastik dalgalar [7] konuları bu denklemlerin ortaya çıktığı durumlara örnek olarak verilebilir.

Bu denklemlerin dalga yayılımını karakterize eden denklemler olarak ortaya çıkması, için bir boyutlu halde olduğu gibi, rezonans koşulu sağlanmalı; yani kısa dalganın grup hızı uzun dalganın faz hızına eşit olmalıdır. Bir boyutlu halden farklı olarak, burada hem kısa hem de uzun dalganın esas olarak x ekseni yönünde yayıldığı ve zayıf enine etkilere maruz kaldığı varsayılır. γ parametresi enine etkileri gösteren parametre olup, bu parametrenin sıfır değerini alması halinde yukarıdaki denklemler iki bileşenli bir boyutlu etkileşim denklemlerine indirgenir. γ parametresinin pozitif veya negatif değerler almasına bağlı olarak çözümlerin yapısının değiştiği (yalnız dalga çözümlerinin varlığı anlamında), sonraki bölümlerde gösterilecektir.

Başlangıç verileri üzerine uygun koşullar koyulması kaydıyla, 2D-LSI denklemleri için tanımlanan başlangıç değer probleminin global iyi tanımlı olduğu Colin ve Lannes [6] tarafından gösterilmiştir.

2.3.1 2D-LSI sisteminin değişmezleri

Bu altbölümde, 2D-LSI denklemlerine ait korunan büyüklükler ve simetriler ifade edilecektir. Cebirsel işlemler yardımıyla 2D-LSI denklemlerinin aşağıdaki simetrilere ve karşılık gelen korunan büyüklüklere sahip olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

(i) u değişkeninde öteleme: Eğer $(\phi(x,y,t), u(x,y,t))$ çifti 2D-LSI denklemlerinin bir çözümü ise, her $u_0 \in \mathbb{R}$ için $(\phi(x,y,t), u(x,y,t) + u_0)$ çifti de 2D-LSI denklemlerinin bir çözümüdür. Karşılık gelen korunan büyüklük ise

$$I_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \phi_x dxdy$$

ile ifade edilir.

(ii) Faz dönüşümü: Eğer $(\phi(x,y,t), u(x,y,t))$ çifti 2D-LSI denklemlerinin bir çözümü ise, her $\theta_0 \in \mathbb{R}$ için $(e^{i\theta_0}\phi(x,y,t), u(x,y,t))$ çifti de 2D-LSI denklemlerinin bir çözümüdür. Karşılık gelen korunan büyüklük toplam kütle olarak adlandırılır ve

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\phi|^2 dxdy$$

ile verilir.

(iii) Uzay koordinatlarında öteleme: Eğer $(\phi(x,y,t), u(x,y,t))$ çifti 2D-LSI denklemlerinin bir çözümü ise, her $x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$ için $(\phi(x+x_0, y+y_0, t), u(x+x_0, y+y_0, t))$ çifti de 2D-LSI denklemlerinin bir çözümüdür. Karşılık gelen korunan büyüklükler x ve y yönlerindeki toplam momentumları gösterir ve, sırasıyla,

$$I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} [(u_x)^2 + i(\phi\phi_x^* - \phi^*\phi_x)]dxdy,$$

ve

$$I_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} [u_x u_y - i(\phi\phi_y^* - \phi^*\phi_y)]dxdy$$

ile ifade edilir.

iv) Zamanda öteleme: Eğer $(\phi(x,y,t),u(x,y,t))$ çifti 2D-LSI denklemlerinin bir çözümü ise, her $t_0 \in \mathbb{R}$ için $(\phi(x,y,t+t_0),u(x,y,t+t_0))$ çifti de 2D-LSI denklemlerinin bir çözümüdür. Bu değişmezlik özelliğine karşılık gelen korunan büyüklük toplam enerji olarak adlandırılır ve

$$I_4 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} [|\phi_x|^2 + u_x|\phi|^2 + \frac{\gamma}{2}(u_y)^2]dxdy$$

ile ifade edilir [6]. Yukarıdakilere ek olarak 2D-LSI denklemlerinin ölçek değişmezliği olarak adlandırabileceğimiz bir ilave değişmezliği daha vardır. Bu değişmezlik özelliği şu şekilde ifade edilebilir: Eğer $(\phi(x,y,t),u(x,y,t))$ çifti 2D-LSI denklemlerinin bir çözümü ise, her $\lambda > 0$ için $(\lambda^{3/2}\phi(\lambda x,\lambda^{3/2}y,\lambda^2 t),\lambda u(\lambda x,\lambda^{3/2}y,\lambda^2 t))$ çifti de 2D-LSI denklemlerinin bir çözümüdür.

3. BİR BOYUTLU LSI DENKLEMLERİ İÇİN YALNIZ DALGA ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

3.1 Giriş

Doğrusal olmayan dispersif dalga denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin açık formlarını hesaplamak, bir boyutlu durumlarda genellikle mümkün iken, yüksek boyutlu durumlarda mümkün olmamaktadır. Bu nedenle, özellikle yüksek boyutlu durumlarda, doğrusal olmayan dispersif dalga denklemleri için yalnız dalga çözümlerinin varlığı probleminin matematiksel olarak incelenmesi çok sayıda araştırmacının ilgilendiği bir alan olmuştur. Şimdiki bölümde (**2.1**) 1D-LSI denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin varlığı ispat edilecektir. Altbölüm 3.2'de 1D-LSI denklemleri ile yakından ilgili olan NLS denklemi için yalnız dalga çözümlerinin varlığı problemi hakkındaki gelişmeler kısaca özetlenecektir. Daha sonra, Altbölüm 3.3'de 1D-LSI denklemleri için yalnız dalga çözümlerinin varlık ispatı verilecektir.

3.2 NLS Denklemi İçin Yalnız Dalgaların Varlığı

Dalga yayılımının sözkonusu olduğu sürekli ortamda eğer sadece bir kısa dalga modu varsa, dalga hareketi tek bileşenli

$$i\phi_t + \Delta\phi + |\phi|^{2\sigma}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

NLS denklemi ile modellenir. Bu denklemde t zamanı, x uzay koordinatını, Δ notasyonu $\mathbb{R}^n$ Öklit uzayında Laplace operatörünü, ve ϕ ise kısa dalganın kompleks genliğini göstermektedir.

NLS denklemi

$$\phi(x,t) \longmapsto e^{i(\frac{c}{2}X + \frac{c^2}{4}T)}\Phi(X,T), \quad X = x - ct, \quad T = t$$

ile tanımlanan Galile dönüşümü altında, bir faz farkıyla, değişmezdir. Diğer bir deyişle, $\phi(x,t)$ fonksiyonu NLS denkleminin bir çözümü ise $\Phi(X,T)$

fonksiyonu da bir faz farkıyla çözümdür. Eğer NLS denkleminin $\Phi(X,T) = u_s(X)e^{i\Omega T}$ şeklindeki duran dalga (standing waves) çözümlerinin varlığı ispatlanırsa, Galile dönüşümü nedeniyle, bunun aynı zamanda NLS denkleminin $\phi(x,t) = e^{i[\frac{c}{2}(x-ct)+\frac{c^2}{4}t]}u_s(x-ct)e^{i\Omega t}$ şeklindeki yalnız dalga çözümlerinin varlığını ispatlamaya denk olduğu açıktır. Bu nedenle literatürde, NLS denklemi için yalnız dalga çözümlerinin varlığı problemi yerine duran dalgaların varlığı problemi incelenir.

$u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ gerçel değerli fonksiyonlar olmak üzere, eliptik NLS denkleminin $\phi(x,t) = e^{i\omega t}u(x)$ formundaki duran dalga çözümleri

$$\Delta u - \omega u + u^{2\sigma+1} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \qquad (\mathbf{3.1})$$

yarı-lineer eliptik denklemini sağlar. Bir boyutlu durumda, (**3.1**) denkleminin sonsuzda sıfır sınır koşullarını sağlayan ve

$$u(x) = [(\sigma+1)\omega]^{\frac{1}{2\sigma}} \left[\operatorname{sech}(\sigma\sqrt{\omega}x)\right]^{\frac{1}{\sigma}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ile verilen tek çözümü kolaylıkla hesaplanır. Ancak yüksek boyutlu durumda, lokalize olmuş, diğer bir deyişle sonsuzda sıfır sınır koşullarını sağlayan, çözümlerin açık formunu bulmak mümkün değildir. Bu nedenle, yüksek boyutlarda (**3.1**) denklemi ve onun genel bir formu olan $-\Delta u + f(u) = 0$ yarı-doğrusal eliptik denklemin aşikar olmayan $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ çözümlerinin varlığı problemi literatürde ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir. Bu incelemelerde problem kısıtlı veya kısıtsız varyasyonel problemlerin çözümlerinin varlığı problemine indirgenmiştir.

Kritik noktaları (**3.1**) denkleminin aşikar olmayan çözümleri olan kısıtlı varyasyonel problem,

$$H(u) = \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 - \frac{1}{\sigma+1}|u|^{2\sigma+2})dx, \quad N(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx$$

büyüklükleri sırasıyla denklemin korunan enerji ve korunan kütlesini göstermek üzere,

$$\text{minimum} \left\{ S(u) = \int_{\mathbb{R}^n} [H(u) + \omega N(u)]\, dx \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $S(u)$ fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemi (**3.1**) denklemi olup, bu varyasyonel problem, ω bir Lagrange çarpanı olmak üzere ve korunan kütlenin sabit olması durumunda, enerjinin minimizasyonuna karşılık gelir. Bu nedenle, $S(u)$ fonksiyonelini minimize eden çözümler taban durum (ground state) olarak adlandırılır. (**3.1**) denklemi ve onun genelleştirilmiş halinin, sonsuzda üstel olarak sıfıra giden $u(r) > 0$, $r = |x|$, çözümlerinin varlığı $n \geq 3$ için [14–16]'da ve $n = 2$ için [17, 18]'de ispat edilmiştir.

NLS denkleminin duran dalga çözümlerinin varlığı problemi, $n \geq 2$ için kısıtsız bir varyasyonel problem olarak [19]'da ele alınmıştır. Bu çalışmada $\theta = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$ olmak üzere, $\|u\|_p \leq C\ \|\nabla u\|_2^{\theta}\ \|u\|_2^{1-\theta}$, $0 < \theta \leq 1$, ile verilen Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğinden hareket edilerek

$$J(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^{\sigma n} \|u\|_2^{2+\sigma(2-n)}}{\|u\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}}, \quad 0 < \sigma < \frac{2}{n-2}, \quad n \geq 2 \tag{3.2}$$

fonksiyoneli tanımlanmıştır. $J(u)$ fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemi (**3.1**) denklemi olduğundan, (**3.1**) denkleminin çözümlerinin varlığı, $J(u)$ fonksiyonelinin bir minimumunun var olduğu ispat edilerek gösterilmiştir. Ayrıca, NLS denkleminin duran dalga çözümlerinin yörüngesel kararlılığı incelenirken de $J(u)$ fonksiyonelinin özellikleri kullanılmıştır [20].

Dalga yayılımının sözkonusu olduğu sürekli ortamda birden fazla serbest kısa dalga modu varsa, dalga yayılımı çok bileşenli kuple NLS denklem sistemi ile modellenir. İki serbest dalga modu olması durumunda bu denklemler

$$\begin{aligned} &i\phi_t + \Delta\phi + (|\phi|^2 + |\psi|^2)\phi = 0 \\ &i\psi_t + \Delta\psi + (|\phi|^2 + |\psi|^2)\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

şeklindedir. $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ gerçel değerli fonksiyonlar olmak üzere, iki bileşenli NLS denkleminin $(\phi(x,t), \psi(x,t)) = e^{i\omega t}(u(x), v(x))$ formundaki duran dalga çözümleri

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u - \omega u + (u^2 + v^2)u = 0 \\ \Delta v - \omega v + (u^2 + v^2)v = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

kuple iki denklemden oluşan eliptik denklem sistemini sağlar. Bu çalışmanın üçüncü ve dördüncü bölümlerinde ele alınan üç bileşenli 1D-LSI sisteminin yalnız dalga çözümlerinin de (**3.3**) denklem sistemini sağladığı ileride gösterilecektir. Tek bileşenli (**3.1**) denkleminin çözümlerinin varlığı problemi yaygın olarak incelenmesine rağmen, (**3.3**) sisteminin çözümlerinin varlığı ile ilgili matematiksel sonuçlar oldukça azdır. Son yıllarda, (**3.3**) kuple sistemi ve onun genelleştirilmiş bazı halleri için çözümlerin varlığı problemi, herhangi bir uzay boyutunda, kısıtlı bir varyasyonel problemin çözümünün varlığı problemi olarak ele alınmıştır [21–25]. Bu çalışmalarda, kütlenin korunumu kısıtı altında, sistemin enerji fonksiyonelinin minimumunun varlığı Konsantrasyon-Kompaktlık (Concentration-Compactness) ve Mountain-Pass yöntemleri kullanılarak gösterilmiştir. (**3.3**) kuple sisteminin çözümlerinin varlığını kısıtsız varyasyonel problem olarak incelemek için, [26]'da, Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğinden yararlanılarak, $n \geq 2$ için bir J fonksiyoneli tanımlanmıştır. Bu çalışmada, bir ölçek dönüşümü yardımıyla, H enerji fonksiyonelini minimize etmenin J fonksiyonelini minimize etmeye eşdeğer olduğu gösterilmiştir.

3.3 1D-LSI Denklemleri İçin Yalnız Dalga Çözümlerinin Varlığı

Bu bölümde, NLS denklemi ile ilgili yukarıda belirtilen gelişmeler ışığında, (**2.1**) 1D-LSI denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin varlığı kısıtsız bir varyasyonel problem tanımlanarak ve Weinstein'ın yaklaşımı kullanılarak ispatlanmıştır. Bu yaklaşım, yörüngesel kararlılık probleminin incelelenmesine uygunluğu nedeni ile tercih edilmiştir. Altbölüm 3.3.1'de ilk olarak, (**2.1**) sisteminin yalnız dalga çözümlerinin sağladığı (**3.3**) formundaki sistem elde edilmiştir. Simetrik olarak kuple olan bu ikili sistemin çözümlerinin varlığını ispatlamak için, Altbölüm 3.3.2'de (**3.2**) fonksiyonelinin iki bağımlı değişken için genelleştirilmiş hali olan $J(u, v)$ fonksiyoneli tanımlanmış ve yalnız dalgaların varlık problemi kısıtsız bir varyasyonel problem olarak ifade edilmiştir. NLS [19], Davey-Stewartson [27] ve genelleştirilmiş Davey-Stewartson [28] denklemlerinin duran dalga çözümlerinin varlığı problemlerininin incelenmesinde kullanılmış olan yaklaşım, Altbölüm 3.3.3'te takip edilmiş ve, Lieb'in Kompaktlık Lemması [29] kullanılarak, (**3.3**) formundaki denklemleri sağlayan çözümlerin varlığı bir kısıtsız varyasyonel problemin minimumunun var olduğu gösterilerek ispat edilmiştir.

Uyarı 1. Eğer, özel bir hal olarak, bir kısa dalganın bir uzun dalga ile etkileşimi sözkonusu ise, dalga hareketi

$$
\begin{aligned}
& i\phi_t + \phi_{xx} = \beta v \phi, \\
& v_t = \beta(|\phi|^2)_x, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

ile verilen iki bileşenli 1D-LSI sistemi ile tanımlanır. İki bileşenli 1D-LSI sistemi Galile dönüşümü altında invaryant olmadığından duran dalga çözümlerini kabul etmez ve sistemin yalnız dalga çözümlerinin varlığı incelenmelidir. $u \in H^1(\mathbb{R})$ ve $v_x \in L^2(\mathbb{R})$ gerçel değerli fonksiyonlar olsun. Bu durumda iki bileşenli 1D-LSI sisteminin $\phi(x,t) = e^{i\omega t} u(x-ct) e^{\frac{ic}{2}(x-ct)}$ ve $v(x,t) = w(x-ct)$ formundaki gezen dalga çözümleri, $'$ işareti ile $\xi = x - ct$ değişkenine göre türev gösterilmek üzere,

$$
\begin{aligned}
& u'' - \Omega u - \beta w u = 0, \\
& w' = -\frac{\beta}{c}(|u|^2)' \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

denklemlerini veya

$$
u'' - \Omega u + \gamma u^3 = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.4}
$$

denklemini sağlar. (**3.4**) denklemlerindeki katsayılar $\Omega = \omega - \dfrac{c^2}{4}$ ve $\gamma = \dfrac{\beta^2}{c}$ olarak tanımlanır. Aşağıda benzer bir yaklaşım 1D-LSI sistemi için uygulanacak ve 1D-LSI denklemlerinin gezen dalga çözümleri için (**3.4**) tek denklemi yerine iki kuple denklemden oluşan bir sistem elde edilecektir.

3.3.1 1D-LSI denklemleri için yalnız dalga çözümleri

Bu altbölümde, (**2.1**) sisteminin yalnız dalga çözümleri ve bu çözümlerin hangi koşullarda var olduğu problemi araştırılacaktır.

c pozitif bir sabit, ω gerçel bir sabit olmak üzere, (**2.1**) denklem sisteminin en genel formdaki yalnız dalga çözümleri

$$
\phi_s(x,t) = \Phi(x-ct)e^{i\omega t}, \quad \psi_s(x,t) = \Psi(x-ct)e^{i\omega t}, \quad u_s(x,t) = U(x-ct) \tag{3.5}
$$

şeklinde önerilebilir. (**3.5**) çözümleri (**2.1**) sisteminde yerine yazıldığında, $'$ işareti $\xi = x - ct$ değişkenine göre türevi göstermek üzere,

$$
\left.
\begin{aligned}
& -\Phi'' + ic\Phi' + \omega\Phi + \beta U \Phi = 0, \\
& -\Psi'' + ic\Psi' + \omega\Psi + \beta U \Psi = 0, \\
& U' = -\frac{\beta}{c}(|\Phi|^2 + |\Psi|^2)',
\end{aligned}
\right\} \tag{3.6}
$$

sistemi elde edilir. Son denklemden U fonksiyonu $U = -\dfrac{\beta}{c}(|\Phi|^2 + |\Psi|^2)$ olarak çözülebileceğinden, (**3.6**) sistemi

$$-\Phi'' + ic\Phi' + \omega\Phi - \frac{\beta^2}{c}(|\Phi|^2 + |\Psi|^2)\Phi = 0,$$
$$-\Psi'' + ic\Psi' + \omega\Psi - \frac{\beta^2}{c}(|\Phi|^2 + |\Psi|^2)\Psi = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada $(R_1, R_2) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ (ve dolayısıyla $U \in L^2(\mathbb{R})$) olmak üzere, $\Phi(\xi) = R_1(\xi)\ \exp(\dfrac{ic\xi}{2})$ ve $\Psi(\xi) = R_2(\xi)\ \exp(\dfrac{ic\xi}{2})$ tanımları yapılırsa;

$$\left.\begin{array}{l} R_1'' - \Omega R_1 + \gamma(|R_1|^2 + |R_2|^2)R_1 = 0, \\ R_2'' - \Omega R_2 + \gamma(|R_1|^2 + |R_2|^2)R_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (\mathbf{3.7})$$

sistemi elde edilir. (**3.7**) sistemindeki katsayılar

$$\Omega = \omega - \frac{c^2}{4}, \qquad \gamma = \frac{\beta^2}{c} > 0$$

olarak tanımlanmıştır. Bu bölümün geri kalanında gösterilim kolaylığı için ξ değişkeni yerine x değişkeni kullanılacaktır.

Aşağıdaki lemmada, (**3.7**) sisteminin kendileri ve birinci mertebe türevleri $|x| \to \infty$ için sıfır olan çözümlerinin sağladığı Pohozaev tipi özdeşlikler verilmektedir. Bu özdeşlikler (**3.7**) sisteminin $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ uzayına ait pozitif düzgün çözümlerinin varlığını göstermek için ileride kullanılacak gerek koşulları vermektedir.

Lemma 3.1. (**3.7**) sistemini sağlayan $(R_1,\ R_2) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ reel değerli fonksiyonları;

$$\int_{\mathbb{R}} \left(R_{1,x}^2 + R_{2,x}^2 - \frac{\gamma}{4}(R_1^2 + R_2^2)^2 \right) dx = 0, \qquad (\mathbf{3.8})$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\Omega(R_1^2 + R_2^2) - \frac{3\gamma}{4}(R_1^2 + R_2^2)^2 \right) dx = 0 \qquad (\mathbf{3.9})$$

özdeşliklerini sağlarlar.

İspat. (**3.7**) sisteminin birinci ve ikinci denklemleri, sırasıyla, $xR_{1,x}$ ve $xR_{2,x}$ ile çarpılır ve elde edilen

$$\frac{1}{2}xd(R_{1,x}^2) - \frac{\Omega}{2}xd(R_1^2) + \frac{\gamma}{4}xd(R_1^4) + \frac{\gamma}{2}xR_2^2 d(R_1^2) = 0,$$
$$\frac{1}{2}xd(R_{2,x}^2) - \frac{\Omega}{2}xd(R_2^2) + \frac{\gamma}{4}xd(R_2^4) + \frac{\gamma}{2}xR_1^2 d(R_2^2) = 0$$

denklemleri $\mathbb{R}$ üzerinde integre edilir ve sonuç denklemler toplanırsa, kısmi integrasyondan sonra,

$$\int_{\mathbb{R}} \Big((R_{1,x})^2 + (R_{2,x})^2 - \Omega(R_1^2 + R_2^2) + \frac{\gamma}{2}(R_1^2 + R_2^2)^2 \Big)\, dx = 0 \qquad (\mathbf{3.10})$$

bulunur. Diğer yandan, (**3.7**) sisteminin birinci ve ikinci denklemleri, sırasıyla, R_1 ve R_2 ile çarpılır ve sonuç denklemlerin toplamı $\mathbb{R}$ üzerinde integre edilirse,

$$\int_{\mathbb{R}} \big((R_{1,x})^2 + (R_{2,x})^2 + \Omega(R_1^2 + R_2^2) - \gamma(R_1^2 + R_2^2)^2 \big)\, dx = 0 \qquad (\mathbf{3.11})$$

elde edilir. (**3.10**) ve (**3.11**) denklemlerinin taraf tarafa toplanmasından ve çıkarılmasından Pohozaev tipindeki (**3.8**)-(**3.9**) özdeşlikleri elde edilir. $\gamma > 0$ olduğundan bu özdeşliklerin bir sonucu olarak $\Omega > 0$ bulunur. □

3.3.2 Varyasyonel problem

Yukarıda belirtildiği gibi, tek kübik NLS denkleminin duran dalga çözümlerinin veya iki bileşenli 1D-LSI etkileşim denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin sağladığı $\Delta u - \Omega u + \gamma |u|^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$ eliptik denklemin çözümlerinin varlığı, herhangi bir n için, bir kısıtlı varyasyonel problemin çözümlerinin varlığı olarak incelenmiştir [14–18]. Ayrıca, Weinstein [19], Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğinden hareket ederek, (**3.2**) ile verilen $J(u)$ fonksiyonelini tanımlamış ve tek NLS denkleminin duran dalga çözümlerinin varlığı problemini kısıtsız bir varyasyonel problem olarak ifade etmiştir. (**3.2**) fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemi (**3.1**) denklemi olduğundan, (**3.1**) denkleminin çözümlerinin varlığı $J(u)$ fonksiyonelinin bir minimumunun var olduğu ispat edilerek gösterilmiştir. Ancak, [19] çalışmasındaki $J(u)$ fonksiyoneli uzay boyutunun $n \geq 2$ olması durumunda tanımlanmıştır. Şimdi $n = 1$ haline karşılık gelen J fonksiyoneli, önce tek bağımlı değişken hali için ve sonra iki bağımlı değişken hali için Gagliardo-Nirenberg eşitsizliği yardımıyla türetilecektir. $n = 1$ uzay boyutu için Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğinin genel bir hali Nagy [30] tarafından ispat edilmiştir:

$$\left(\frac{s}{2} H\Big(\frac{s}{\beta}, \frac{p-1}{p}\Big) \right)^{-\frac{\beta}{s}} \leq \frac{\|u_x\|_p^{\frac{\beta}{s}} \, \|u\|_q^{q+\beta\frac{q(p-1)}{ps}}}{\|u\|_{q+\beta}^{q+\beta}}. \qquad (\mathbf{3.12})$$

(**3.12**) eşitsizliği her $u \in H^1(\mathbb{R})$ için tanımlıdır ve $q, \beta > 0,\ p \geq 1,\ s = 1 + q\dfrac{p-1}{p}$ olup, H fonksiyonu

$$H(a,b) = \frac{(a+b)^{-(a+b)}\Gamma(1+a+b)}{a^{-a}b^{-b}\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}$$

şeklinde tanımlanır. H fonksiyonunun tanımındaki Γ işareti, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ olarak tanımlanan ve $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ özelliklerini sağlayan Gamma fonksiyonunu gösterir. Özel olarak $p = q = s = \beta = 2$ için, (**3.12**) eşitsizliği, $H(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{H(1,\frac{1}{2})} \leq \frac{\|u_x\|_2\ \|u\|_2^3}{\|u\|_4^4} \tag{3.13}$$

şeklini alır. Sonuç olarak $n = 1$ durumunda, (**3.13**) Nagy eşitsizliği ve Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğinden esinlenerek tanımlanmış $J(u)$ fonksiyoneli aşağıda verilmiştir:

$$J(u) = \frac{(\|u_x\|_2)^{\frac{1}{4}}\ (\|u\|_2)^{\frac{3}{4}}}{\|u\|_4}. \tag{3.14}$$

$H^1(\mathbb{R})$ uzayının $L^4(\mathbb{R})$ uzayına gömülmesinden dolayı, her $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ için $J(u)$ fonksiyoneli iyi tanımlıdır. Ayrıca, q ve s pozitif sayılar olmak üzere, $H^1(\mathbb{R})$ uzayında tanımlanmış $u_{q,s}(x) = qu(sx)$ fonksiyonu için

$$\|u_{q,s}\|_2^2 = q^2s^{-1}\|u\|_2^2, \quad \|\nabla u_{q,s}\|_2^2 = q^2s\|\nabla u\|_2^2, \quad \|u_{q,s}\|_4^4 = q^4s^{-1}\|u\|_4^4$$

bağıntıları geçerlidir. Bu bağıntılar (**3.14**) fonksiyonelinde yazılırsa $J(u_{q,s}) = J(u)$ olduğu görülür. Bu sonuç $J(u)$ fonksiyonelinin x ve u değişkenlerinin ölçek dönüşümleri altında invaryant kaldığını gösterir. $J(u)$ fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemi fonksiyonelin birinci varyasyonu hesap edilerek bulunur:

$$\begin{aligned}
\delta J &= \frac{d}{d\epsilon}J(u+\epsilon\eta)|_{\epsilon=0} = 0 \quad \text{her} \ \ \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\\
\delta J &= \left(-\frac{1}{4}(\|u\|_2^2)^{\frac{3}{8}}\ (\|u\|_4^{-1})\ (\|u_x\|_2^2)^{-\frac{7}{8}}\right)\int_{\mathbb{R}} u_{xx}\eta dx\\
&\quad + \left(\frac{3}{4}(\|u\|_2^2)^{-\frac{5}{8}}\ (\|u\|_4^{-1})\ (\|u_x\|_2^2)^{\frac{1}{8}}\right)\int_{\mathbb{R}} u\eta dx\\
&\quad - \left(\frac{(\|u\|_2^2)^{\frac{3}{8}}\ (\|u_x\|_2^2)^{\frac{1}{8}}}{(\|u\|_4^5)}\right)\int_{\mathbb{R}} u^3\eta dx = 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Böylece (**3.8**)-(**3.9**) Pohozaev özdeşliklerinden $R_1 = u, \quad R_2 = 0$ yerleştirmesi ile bulunan

$$3\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx = \Omega \int_{\mathbb{R}} u^2 dx, \quad 4\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx = \gamma \int_{\mathbb{R}} u^4 dx$$

kısıtları (**3.15**) denkleminde kullanılırsa, kısmi integrasyondan sonra,

$$\delta J = A \int_{\mathbb{R}} (-u_{xx} + \Omega u - \gamma u^3)\eta dx = 0$$

elde edilir. Burada A katsayısı

$$A = \frac{(\|u\|_2^2)^{\frac{3}{8}}}{4\|u\|_4(\|u_x\|_2^2)^{\frac{7}{8}}}$$

olarak tanımlanmıştır. δJ varyasyonunun keyfi η fonksiyonu için sıfır olması ancak ve ancak u fonksiyonunun $u_{xx} - \Omega u + \gamma u^3 = 0$ denklemini sağlaması ile mümkündür. Diğer bir deyişle, $J(u)$ fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemleri (**3.1**) denklemidir. Gerçekten de, $u_{xx} - \Omega u + \gamma u^3 = 0$ denkleminin çözümü olan $u_{min} = (\frac{2\Omega}{\gamma})^{\frac{1}{2}}\text{sech}(\sqrt{\Omega}x)$ fonksiyonu, $J(u)$ fonksiyonelinin de minimumudur ve $J(u_{min}) = 3^{\frac{1}{8}}$ olur. Bu noktada $u = u_{min}$ için (**3.13**) eşitsizliğinin

$$J(u_{min}) = \frac{1}{(H(1, \frac{1}{2}))^{1/4}}$$

şeklinde bir eşitliğe dönüştüğüne dikkat edilmelidir.

$H^1(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı u değişkeninin sağladığı (**3.14**) $J(u)$ fonksiyonelinden hareket ederek, $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı (u, v) fonksiyonları için $J(u, v)$ fonksiyoneli

$$J(u, v) = \frac{(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2)^{\frac{3}{8}}(\|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2)^{\frac{1}{8}}}{\|u^2 + v^2\|_2^{\frac{1}{2}}} \qquad (\mathbf{3.16})$$

olarak tanımlanır. $H^1(\mathbb{R})$ uzayı $L^4(\mathbb{R})$ uzayına gömüldüğünden, $J(u, v)$ fonksiyoneli $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ fonksiyonları için iyi tanımlıdır. Altbölüm 3.3.3'te, (**3.7**) sisteminin (R_1, R_2) çözümlerinin varlığı, Euler-Lagrange denklemleri (**3.7**) kuple sistemi olan (**3.16**) fonksiyonelinin infimumunun varlığı gösterilerek ispat edilecektir.

Uyarı 2. q ve s pozitif sayılar olmak üzere, $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ uzayında tanımlanmış $(u_{q,s}(x), v_{q,s}(x)) = (qu(sx), qv(sx))$ fonksiyonları için

$$\|u_{q,s}\|_2^2 = q^2 s^{-1}\|u\|_2^2, \quad \|\nabla u_{q,s}\|_2^2 = q^2 s\|\nabla u\|_2^2,$$

$$\|v_{q,s}\|_2^2 = q^2 s^{-1}\|v\|_2^2, \quad \|\nabla v_{q,s}\|_2^2 = q^2 s\|\nabla v\|_2^2,$$

$$\|u_{q,s}^2 + v_{q,s}^2\|_2^2 = q^4 s^{-1}\|u^2 + v^2\|_2^2$$

bağıntıları geçerlidir. Bu bağıntılar

$$J(u,v)=\frac{(\|u\|_2^2+\|v\|_2^2)^{\frac{3}{8}}(\|u_x\|_2^2+\|v_x\|_2^2)^{\frac{1}{8}}}{\|u^2+v^2\|_2^{\frac{1}{2}}}$$

(**3.16**) fonksiyonelinde kullanılırsa, $J(u_{q,s},v_{q,s}) = J(u,v)$ olduğu görülür. Bu sonuç $J(u,v)$ fonksiyonelinin ölçek dönüşümleri altında invaryant olduğunu gösterir.

Uyarı 3. (**3.5**) yalnız dalga çözümleri için sistemin enerji fonksiyoneli olan I_4 korunan büyüklüğü

$$I_4(R_1,R_2)=\int\limits_{\mathbb{R}}\left(R_{1,x}^2+R_{2,x}^2+\frac{c^2}{4}(R_1^2+R_2^2)-\gamma(R_1^2+R_2^2)^2\right)dx$$

şeklini alır (burada ξ değişkeni gösterilim kolaylığı için x ile değiştirilmiştir). $q>0$ için $(R_{1q}(x),R_{2q}(x))=\sqrt{q}(R_1(qx),R_2(qx))$ dönüşümü altında L_2 normları değişmez kalır [26]: $\|R_{1q}\|_2=\|R_1\|_2$ ve $\|R_{2q}\|_2=\|R_2\|_2$. Buradan

$$\begin{aligned}
I_4(R_1,R_2) \quad &\geq \inf_{q>0} I_4(R_{1q},R_{2q})\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}}\left(q^2(R_{1,x}^2+R_{2,x}^2)+\frac{c^2}{4}(R_1^2+R_2^2)-\gamma q(R_1^2+R_2^2)^2\right)dx\\
&\geq \int\limits_{\mathbb{R}}\left(q^2(R_{1,x}^2+R_{2,x}^2)-\gamma q(R_1^2+R_2^2)^2\right)dx
\end{aligned}$$

yazılır (uygunluk için $X=qx$ değişkeni yerine x kullanılmıştır). (**3.8**)-(**3.9**) Pohozaev özdeşliklerinin ölçeklenmiş hali kullanılarak

$$I_4(R_1,R_2)\geq\inf_{\eta>0}I_4(R_{1q},R_{2q})\geq-\frac{3\gamma q}{4}\int\limits_{\mathbb{R}}(R_1^2+R_2^2)^2dx \qquad (\mathbf{3.17})$$

elde edilir. (**3.17**) eşitsizliğinin sağ tarafı yeniden düzenlenerek ve $J(R_{1q},R_{2q}) = J(R_1,R_2)$ invaryantlık özelliği kullanılarak, $\lambda=I_1+I_2$ olmak üzere,

$$I_4(R_1,R_2)\geq\inf_{q>0}I_4(R_{1q},R_{2q})\geq-\left(\frac{3\gamma^2\Omega^7}{16}\right)^{\frac{1}{8}}\lambda^{\frac{5}{4}}\frac{1}{\inf J(R_1,R_2)} \qquad (\mathbf{3.18})$$

bulunur. (**3.18**) eşitsizliği, I_4 enerji fonksiyonelini minimize eden temel durum çözümlerinin aynı zamanda J fonksiyonelini de minimize ettiğini gösterir.

3.3.3 Yalnız dalga çözümlerinin varlığı

Bu altbölümde, 1D-LSI sisteminin (**3.7**) kuple diferansiyel denklem sistemini sağlayan yalnız dalga çözümlerinin $J(u,v)$ fonksiyonelini minimize eden fonksiyonlar olduğunu belirten teorem verilecek ve ispat edilecektir.

Teorem 3.2. $\Omega > 0$ ve $\gamma > 0$ olmak üzere, (**3.16**) ile verilen $J(u,v)$ doğrusal olmayan fonksiyonelini minimum yapan $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ pozitif fonksiyonları vardır. Ayrıca, $\|\tilde{R}_1\|_2^2 + \|\tilde{R}_2\|_2^2 = 2$ ve $\|\tilde{R}_{1,x}\|_2^2 + \|\tilde{R}_{2,x}\|_2^2 = 2\Omega/3$ kısıtları altında $J(u,v)$ fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemleri;

$$\left.\begin{aligned} \tilde{R}_{1,xx} - \Omega\tilde{R}_1 + \gamma e^2[(\tilde{R}_1)^2 + (\tilde{R}_2)^2]\tilde{R}_1 = 0, \\ \tilde{R}_{2,xx} - \Omega\tilde{R}_2 + \gamma e^2[(\tilde{R}_1)^2 + (\tilde{R}_2)^2]\tilde{R}_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

şeklindedir. Burada $e^2 = 8\Omega/3a^4\gamma$ ve $a^4 = \int\limits_{\mathbb{R}}[(\tilde{R}_1)^2 + (\tilde{R}_2)^2]^2 dx$ olup, $R_i = e\tilde{R}_i$ $(i = 1, 2)$ fonksiyonları (**3.7**) sistemini sağlar.

İspat. $J(u,v)$ fonksiyoneli negatif olmayan bir fonksiyonel olduğundan, bu fonksiyoneli minimize eden bir $(u_n, v_n) \in (H^1(\mathbb{R}) \bigcap L^4(\mathbb{R})) \times (H^1(\mathbb{R}) \bigcap L^4(\mathbb{R}))$ fonksiyon dizisi vardır; yani

$$j = \inf_{(u,v)\in H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})} J(u,v) = \lim_{n\to\infty} J(u_n, v_n) < \infty \tag{3.20}$$

olur [13]. Şimdi

$$\|\tilde{R}_{1n}\|_2^2 + \|\tilde{R}_{2n}\|_2^2 = 2 \tag{3.21}$$

olmak üzere, $(\tilde{R}_{1n}(x), \tilde{R}_{2n}(x)) = (q_n u_n(s_n x), q_n v_n(s_n x))$ şeklindeki normalize edilmiş dizileri tanımlayabiliriz. Öte yandan $\int\limits_{\mathbb{R}}(\tilde{R}_{1,x}^2 + \tilde{R}_{2,x}^2)dx = \frac{\Omega}{3}\int\limits_{\mathbb{R}}(\tilde{R}_1^2 + \tilde{R}_2^2)dx$ ile verilen Pohozaev özdeşliği kullanılırsa,

$$\|\tilde{R}_{1n,x}\|_2^2 + \|\tilde{R}_{2n,x}\|_2^2 = \frac{2\Omega}{3} \tag{3.22}$$

bulunur. (**3.21**) ve (**3.22**) kısıtlamaları, s_n ve q_n büyüklüklerinin

$$s_n^2 = \frac{\Omega(\|u_n\|_2^2 + \|v_n\|_2^2\|)}{3(\|u_{nx}\|_2^2 + \|v_{nx}\|_2^2)}, \quad q_n^2 = \frac{2\sqrt{\Omega}}{[3(\|u_n\|_2^2 + \|v_n\|_2^2)(\|u_{nx}\|_2^2 + \|v_{nx}\|_2^2)]^{\frac{1}{2}}},$$

olarak seçilmesi gerektiği sonucunu verir.

$(\tilde{R}_{1n}, \tilde{R}_{2n})$ normalize dizileri için $J(u,v)$ fonksiyoneli

$$J(\tilde{R}_{1n}, \tilde{R}_{2n}) = \frac{\sqrt{2}(\frac{\Omega}{3})^{\frac{1}{8}}}{\left(\|\tilde{R}_{1n}\|_4^4 + \|\tilde{R}_{2n}\|_4^4 + 2\langle\tilde{R}_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}^2\rangle\right)^{\frac{1}{4}}}$$

değerini alır ve $\lim_{n\to\infty} J(\tilde{R}_{1n}, \tilde{R}_{2n}) = j$ olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\|\tilde{R}_{1n}\|_4^4 + \|\tilde{R}_{2n}\|_4^4 + 2\langle \tilde{R}_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}^2\rangle\Big) = \frac{4}{j^4}(\frac{\Omega}{3})^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(3.23)}$$

sonucu elde edilir.

$H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı $(\tilde{R}_{1n}, \tilde{R}_{2n})$ dizileri sınırlıdır. Bu nedenle, $(\tilde{R}_{1n}, \tilde{R}_{2n})$ dizilerinin $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı bir $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ fonksiyon çiftine zayıf yakınsayan $(\tilde{R}_{1n_k}, \tilde{R}_{2n_k})$ alt dizileri vardır. Yani, yeniden numaralanmış alt diziler için, $\langle \tilde{R}_{1n}, \tilde{R}_1\rangle \to \langle \tilde{R}_1, \tilde{R}_1\rangle$ ve $\langle \tilde{R}_{2n}, \tilde{R}_2\rangle \to \langle \tilde{R}_2, \tilde{R}_2\rangle$ olur. $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ uzayındaki bu zayıf yakınsamanın aynı zamanda kuvvetli olduğunu göstermek için,

$$b_1 \equiv \|\tilde{R}_1\|_2^2 + \|\tilde{R}_2\|_2^2, \qquad b_2 \equiv \|\tilde{R}_{1,x}\|_2^2 + \|\tilde{R}_{2,x}\|_2^2$$

olmak üzere, $b_1 = 2$ ve $b_2 = \dfrac{2\Omega}{3}$ olduğunu kanıtlamak gerekmektedir. Fatou Lemması (Ek 1) b_1 ve b_2 sayıları için $0 \le b_1 \le 2$ ve $0 \le b_2 \le \dfrac{2\Omega}{3}$ eşitsizliklerinin geçerli olduğunu belirtir. Ayrıca, Lieb'in Kompaktlık Lemması [29] nedeniyle $b_1 \neq 0$ ve $b_2 \neq 0$ olur.

$j = \inf J$ olduğundan, $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ fonksiyonları için

$$j \le J(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) = \frac{(b_1)^{\frac{3}{8}}\ (b_2)^{\frac{1}{8}}}{\Big(\|\tilde{R}_1\|_4^4 + \|\tilde{R}_2\|_4^4 + 2\langle \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_2^2\rangle\Big)^{\frac{1}{4}}}$$

veya

$$(\|\tilde{R}_1^2 + \tilde{R}_2^2\|_2^2)^{\frac{1}{4}} \le \frac{(b_1)^{\frac{3}{8}}\ (b_2)^{\frac{1}{8}}}{j} \qquad \textbf{(3.24)}$$

yazılabilir. Eğer $(r_{1n}, r_{2n}) = (\tilde{R}_{1n}, \tilde{R}_{2n}) - (\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ tanımı yapılırsa,

$$\|r_{1n}\|_2^2 = \|\tilde{R}_{1n}\|_2^2 - 2\langle \tilde{R}_{1n}, \tilde{R}_1\rangle + \|\tilde{R}_1\|_2^2,$$
$$\|r_{2n}\|_2^2 = \|\tilde{R}_{2n}\|_2^2 - 2\langle \tilde{R}_{2n}, \tilde{R}_2\rangle + \|\tilde{R}_2\|_2^2$$

olur. Ayrıca $(\tilde{R}_{1n}, \tilde{R}_{2n})$ fonksiyon dizisinin $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ uzayında $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ fonksiyonlarına zayıf yakınsaması kullanılırsa,

$$\lim_{n\to\infty}(\|r_{1n}\|_2^2 + \|r_{2n}\|_2^2) = 2 - b_1$$

elde edilir. Benzer şekilde, $r_{1n,x}$ ve $r_{2n,x}$ fonksiyon dizilerinin L^2 normları hesaplanırsa

$$\|r_{1n,x}\|_2^2 = \|\tilde{R}_{1n,x}\|_2^2 - 2\langle \tilde{R}_{1n,x}, \tilde{R}_{1,x}\rangle + \|\tilde{R}_{1,x}\|_2^2$$
$$\|r_{2n,x}\|_2^2 = \|\tilde{R}_{2n,x}\|_2^2 - 2\langle \tilde{R}_{2n,x}, \tilde{R}_{2,x}\rangle + \|\tilde{R}_{2,x}\|_2^2$$

bulunur. Buradan da,

$$\lim_{n\to\infty}(\|r_{1n,x}\|_2^2+\|r_{2n,x}\|_2^2)=\frac{2\Omega}{3}-b_2$$

elde edilir. $j=\inf J$ olduğundan, (r_{1n},r_{2n}) için

$$j\leq J(r_{1n},r_{2n})=\frac{(\|r_{1n}\|_2^2+\|r_{2n}\|_2^2)^{\frac{3}{8}}(\|r_{1n,x}\|_2^2+\|r_{2n,x}\|_2^2)^{\frac{1}{8}}}{(\|r_{1n}^2+r_{2n}^2\|_2^2)^{\frac{1}{4}}} \qquad (\mathbf{3.25})$$

bağıntısı geçerlidir. $J(r_{1n},r_{2n})$ ifadesinin $n\to\infty$ için limiti hesaplanırsa,

$$\lim_{n\to\infty}J(r_{1n},\,r_{2n})=\frac{(2-b_1)^{\frac{3}{8}}(\frac{2\Omega}{3}-b_2)^{\frac{1}{8}}}{\left(\lim\limits_{n\to\infty}(\|r_{1n}^2+r_{2n}^2\|_2^2)\right)^{\frac{1}{4}}} \qquad (\mathbf{3.26})$$

elde edilir.

Paydadaki limiti hesaplamak için,

$$\begin{aligned}\|r_{1n}^2+r_{2n}^2\|_2^2 &= \|r_{1n}\|_4^4+\|r_{2n}\|_4^4+2\langle r_{1n}^2,\,r_{2n}^2\rangle\\ &= \left(\langle r_{1n}^2,\,r_{1n}^2\rangle-\langle\tilde{R}_{1n}^2,\,\tilde{R}_{1n}^2\rangle\right)+\left(\langle r_{2n}^2,\,r_{2n}^2\rangle-\langle\tilde{R}_{2n}^2,\,\tilde{R}_{2n}^2\rangle\right)\\ &\quad +2\langle r_{1n}^2,r_{2n}^2\rangle+\|\tilde{R}_{1n}\|_4^4+\|\tilde{R}_{2n}\|_4^4 \qquad (\mathbf{3.27})\end{aligned}$$

özdeşliği kullanılır. İlk iki terimin limiti

$$\lim_{n\to\infty}\left(\langle r_{in}^2,\,r_{in}^2\rangle-\langle\tilde{R}_{in}^2,\,\tilde{R}_{in}^2\rangle\right)=-\|\tilde{R}_i\|_4^4,\quad (i=1,2)$$

olarak hesaplanır [31]. Bu durumda, (**3.23**) denkleminde verilen sonucun kullanılması ile,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\|r_{1n}+r_{2n}\|_2^2) &= -\|\tilde{R}_1\|_4^4-\|\tilde{R}_2\|_4^4\\ &\quad+\lim_{n\to\infty}\left\{\|\tilde{R}_{1n}\|_4^4+\|\tilde{R}_{2n}\|_4^4+2\langle r_{1n}^2,r_{2n}^2\rangle\right\}\\ &= -\|\tilde{R}_1\|_4^4-\|\tilde{R}_2\|_4^4\\ &\quad+\lim_{n\to\infty}\left\{\|\tilde{R}_{1n}\|_4^4+\|\tilde{R}_{2n}\|_4^4+2\langle R_{1n}^2,R_{2n}^2\rangle\right\}\\ &\quad+2\lim_{n\to\infty}\left\{\langle r_{1n}^2,r_{2n}^2\rangle-\langle R_{1n}^2,R_{2n}^2\rangle\right\}\\ &= -\|\tilde{R}_1\|_4^4-\|\tilde{R}_2\|_4^4+\frac{4(\frac{\Omega}{3})^{\frac{1}{2}}}{j^4}\\ &\quad+2\lim_{n\to\infty}\left\{\langle r_{1n}^2,r_{2n}^2\rangle-\langle\tilde{R}_{1n}^2,\tilde{R}_{2n}^2\rangle\right\} \qquad (\mathbf{3.28})\end{aligned}$$

elde edilir ve (**3.26**) ifadesindeki limit hesabı (**3.28**) denkleminin sağ tarafındaki limitin hesabına indirgenir. Diğer yandan,

$$\langle r_{1n}^2,\,r_{2n}^2\rangle=\langle r_{1n}^2,\tilde{R}_{2n}^2\rangle+\langle r_{1n}^2,\tilde{R}_2^2\rangle-2\langle r_{1n}^2,\tilde{R}_{2n}\tilde{R}_2\rangle$$

yazılabildiğinden ve $\{r_{1n}^2\}$ dizisi sıfıra zayıf yakınsadığından, $\lim_{n\to\infty}\langle r_{1n}^2, \tilde{R}_2^2\rangle = 0$ olur. Böylece (**3.28**) ifadesindeki limit için,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\langle r_{1n}^2,\, r_{2n}^2\rangle - \langle \tilde{R}_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}^2\rangle\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big\{-2\langle \tilde{R}_{1n}\tilde{R}_1, \tilde{R}_{2n}^2\rangle + \langle \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_{2n}^2\rangle$$
$$-2\langle r_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}\tilde{R}_2\rangle\Big\}$$

yazılabilir. $\{\tilde{R}_{2n}^2\}$ dizisi $\tilde{R}_2^2$ fonksiyonuna zayıf yakınsadığından, $\lim_{n\to\infty}\langle \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_{2n}^2\rangle = \langle \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_2^2\rangle$ olur. Şimdi

$$\lim_{n\to\infty}\langle \tilde{R}_{1n}\tilde{R}_1, \tilde{R}_{2n}^2\rangle = \langle \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_2^2\rangle,$$
$$\lim_{n\to\infty}\langle r_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}\tilde{R}_2\rangle = 0$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için üçgen eşitsizliği ve Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\Big|\langle \tilde{R}_{1n}\tilde{R}_1, \tilde{R}_{2n}^2\rangle - \langle \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_2^2\rangle\Big| &= \Big|\langle \tilde{R}_{1n}\tilde{R}_1, \tilde{R}_{2n}^2\rangle - \langle \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_2^2\rangle + \langle \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_{2n}^2\rangle - \langle \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_{2n}^2\rangle\Big| \\
&= \Big|\langle \tilde{R}_1^2, r_{2n}(\tilde{R}_{2n} + \tilde{R}_2)\rangle + \langle \tilde{R}_1 r_{1n}, \tilde{R}_{2n}^2\rangle\Big| \\
&\le \Big|\langle \tilde{R}_1 r_{2n}, \tilde{R}_1(\tilde{R}_{2n} + \tilde{R}_2)\rangle\Big| + \Big||\langle \tilde{R}_1 r_{1n}, \tilde{R}_{2n}^2\rangle\Big| \\
&\le \langle r_{2n}^2, \tilde{R}_1^2\rangle^{\frac{1}{2}}\ \langle (\tilde{R}_{2n} + \tilde{R}_2)^2, \tilde{R}_1^2\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \langle r_{1n}^2, \tilde{R}_1^2\rangle^{\frac{1}{2}}\ \langle \tilde{R}_{2n}^2, \tilde{R}_{2n}^2\rangle^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\{r_{1n}\}$ ve $\{r_{2n}\}$ dizileri sıfıra zayıf yakınsadığından eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra gider. Bu ise gösterilmek istenen sonuçtur. Benzer şekilde, $\Big|\langle r_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}\tilde{R}_2\rangle\Big|$ terimine Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanarak elde edilen

$$\Big|\langle r_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}\tilde{R}_2\rangle\Big| \le \langle r_{1n}^2, \tilde{R}_2^2\rangle^{\frac{1}{2}}\ \langle r_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}^2\rangle^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifadelerin limiti yine sıfır olur. Bu sonuçlar ile

$$\lim_{n\to\infty}\Big\{\langle r_{1n}^2,\, r_{2n}^2\rangle - \langle \tilde{R}_{1n}^2,\, \tilde{R}_{2n}^2\rangle\Big\} = -\langle \tilde{R}_1^2,\, \tilde{R}_2^2\rangle$$

elde edilir. Böylece (**3.28**) ifadesinin limiti

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|r_{1n}^2 + r_{2n}^2\|_2^2\right)^{\frac{1}{4}} = \left(-\|\tilde{R}_1^2 + \tilde{R}_2^2\|_2^2 + \frac{4(\frac{\Omega}{3})^{\frac{1}{2}}}{j^4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

olarak bulunur. Bunun sonucunda, (**3.26**) limiti

$$\lim_{n\to\infty} J(r_{1n},\, r_{2n}) = \frac{(2-b_1)^{\frac{3}{8}}(\frac{2\Omega}{3} - b_2)^{\frac{1}{8}}}{\left(-\|\tilde{R}_1^2 + \tilde{R}_2^2\|_2^2 + \frac{4(\frac{\Omega}{3})^{\frac{1}{2}}}{j^4}\right)^{\frac{1}{4}}} \tag{3.29}$$

olarak elde edilir.

Böylece $j \leq J(r_{1n}, r_{2n})$ eşitsizliği ile (**3.25**) ve (**3.29**) denklemleri kullanılarak

$$4(\frac{\Omega}{3})^{\frac{1}{2}} \leq (2-b_1)^{\frac{3}{2}}(\frac{2\Omega}{3} - b_2)^{\frac{1}{2}} + b_1^{\frac{3}{2}} b_2^{\frac{1}{2}} \tag{3.30}$$

bulunur. (**3.30**) ifadesinin üst sınırı, $f(b_1, b_2) = (2-b_1)^{\frac{3}{2}}(\frac{2\Omega}{3} - b_2)^{\frac{1}{2}} + b_1^{\frac{3}{2}} b_2^{\frac{1}{2}}$ sürekli fonksiyonunun $D = \left\{(b_1, b_2) |\ 0 \leq b_1 \leq 2, \ \ 0 \leq b_2 \leq \frac{2\Omega}{3}\right\}$ kapalı bölgesindeki mutlak maksimumu hesaplanarak elde edilir: $\max_D f(b_1, b_2) = 4(\frac{\Omega}{3})^{\frac{1}{2}}$. Bu sonuç ile (**3.30**) eşitsizliği

$$(2-b_1)^{\frac{3}{2}}(\frac{2\Omega}{3} - b_2)^{\frac{1}{2}} + b_1^{\frac{3}{2}} b_2^{\frac{1}{2}} = 4(\frac{\Omega}{3})^{\frac{1}{2}} \tag{3.31}$$

denklemine indirgenir. Sonuç olarak, $f(b_1, b_2)$ sürekli fonksiyonu $4(\frac{\Omega}{3})^{\frac{1}{2}}$ mutlak maksimum değerini $(b_1, b_2) = (0, 0)$ ve $(b_1, b_2) = (2, \frac{2\Omega}{3})$ noktalarında aldığından ve ayrıca Lieb'in Kompaktlık Lemması nedeniyle $b_1 \neq 0$ ve $b_2 \neq 0$ olduğundan; (**3.31**) denkleminin tek çözümü, f fonksiyonunun mutlak maksimum değerini aldığı $(b_1, b_2) = (2, \frac{2\Omega}{3})$ noktasıdır:

$$b_1 \equiv \|\tilde{R}_1\|_2^2 + \|\tilde{R}_2\|_2^2 = 2, \qquad b_2 \equiv \|\tilde{R}_{1,x}\|_2^2 + \|\tilde{R}_{2,x}\|_2^2 = \frac{2\Omega}{3}. \tag{3.32}$$

Bu sonuç ile $(\tilde{R}_{1n}, \tilde{R}_{2n})$ dizilerinin $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ uzayındaki $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) \neq (0, 0)$ fonksiyonlarına kuvvetli yakınsadığı, diğer bir deyişle, $J(u, v)$ fonksiyonelini minimize eden bir fonksiyon çiftinin varlığı gösterilmiş olur. Ayrıca $J(-\tilde{R}_1, -\tilde{R}_2) = J(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ ve $\delta J(-\tilde{R}_1, -\tilde{R}_2) = \delta J(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ olduğundan bileşenleri negatif olmayan $(|\tilde{R}_1|, |\tilde{R}_2|)$ fonksiyon çifti de $J(u, v)$ fonksiyonelini minimize eder.

Bundan sonra $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ fonksiyon çiftinin pozitifliğini göstermek için $\tilde{R}_1 \neq 0$ ve $\tilde{R}_2 \neq 0$ olduğu gösterilmelidir. $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ fonksiyonları J fonksiyonelini minimize ettiğinden her $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ için

$$J(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) \leq J(u, v)$$

yazılabilir. (**3.7**) denkleminin çözümü olan herhangi $(\overline{R}_1, 0)$ ve $(0, \overline{R}_2)$ fonksiyon çiftlerinin J fonksiyonelini minimize etmediğini göstermek için

$$J(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq \inf\{J(\overline{R}_1, 0), J(0, \overline{R}_2)\} \tag{3.33}$$

koşulunu sağlayan ve (**3.7**) denklem sisteminin çözümü olan en az bir $(\tilde{u}, \tilde{v})$ çiftinin $\tilde{u} \neq 0$ ve $\tilde{v} \neq 0$ olacak şekilde var olduğunu göstermek gerekir. Bu durumda, $a > 0$, $b > 0$ ve $a^2 + b^2 = 1$ olmak üzere, $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (a\overline{R}_1, b\overline{R}_1)$ veya $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (a\overline{R}_2, b\overline{R}_2)$ seçilirse, her iki durumda da (**3.7**) sisteminin sağlandığı görülür. Ayrıca

$$J(a\overline{R}_1, b\overline{R}_1) = J(\overline{R}_1, 0)$$

ve

$$J(a\overline{R}_2, b\overline{R}_2) = J(0, \overline{R}_2)$$

olduğundan, (**3.33**) koşulu sağlanmış ve J fonksiyonelini minimize eden $(\tilde{R}_1,\ \tilde{R}_2)$ fonksiyon çiftinin pozitifliği gösterilmiş olur.

Son olarak, $(\tilde{R}_1,\ \tilde{R}_2)$ fonksiyonlarının $J(u, v)$ doğrusal olmayan fonksiyonelinin (**3.19**) ile verilen Euler-Lagrange denklemlerini sağladığı gösterilmelidir. Bunun için $J(u, v)$ fonsiyonelinin

$$\delta J = \frac{d}{d\varepsilon} J(\tilde{R}_1 + \epsilon\eta_1, \tilde{R}_2 + \epsilon\eta_2)\,|_{\varepsilon=0}\ , \quad \text{her} \quad \eta_1,\ \eta_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan birinci varyasyonu hesaplanacaktır. Bu hesaplama

$$\begin{aligned}
\delta J \;=\; & \left(\frac{1}{4}(\|\tilde{R}_1\|_2^2 + \|\tilde{R}_2\|_2^2)^{\frac{3}{8}}\ (\|\tilde{R}_{1,x}\|_2^2 + \|\tilde{R}_{2,x}\|_2^2)^{-\frac{7}{8}}\ \|R_1^2 + R_2^2\|_2^{1/2}\right) \\
& \int_{\mathbb{R}} (\tilde{R}_{1,x}\eta_{1x} + \tilde{R}_{2,x}\eta_{2x})dx \\
& + \left(\frac{3}{4}(\|\tilde{R}_1\|_2^2 + \|\tilde{R}_2\|_2^2)^{-\frac{5}{8}}\ (\|\tilde{R}_{1,x}\|_2^2 + \|\tilde{R}_{2,x}\|_2^2)^{\frac{1}{8}}\ \|R_1^2 + R_2^2\|_2^{1/2}\right) \\
& \int_{\mathbb{R}} (\tilde{R}_1\eta_1 + \tilde{R}_2\eta_2)dx \\
& - \left(\frac{(\|\tilde{R}_1\|_2^2 + \|\tilde{R}_2\|_2^2)^{\frac{3}{8}}\ (\|\tilde{R}_{1,x}\|_2^2 + \|\tilde{R}_{2,x}\|_2^2)^{\frac{1}{8}}}{\|R_1^2 + R_2^2\|_2^{5/2}}\right) \\
& \int_{\mathbb{R}} (\tilde{R}_1^2 + \tilde{R}_2^2)(\tilde{R}_1\eta_1 + \tilde{R}_2\eta_2)dx
\end{aligned} \qquad (\mathbf{3.34})$$

sonucunu verir. Bu aşamada, Pohozaev özdeşliklerini sağlayan (**3.32**) kısıtları ve

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\Omega(\tilde{R}_1^2 - \tilde{R}_2^2) - \frac{3e^2\gamma}{4}(\tilde{R}_1^2 - \tilde{R}_2^2)^2\right) dx = 0$$

şeklini alan (**3.9**) Pohozaev özdeşliği (**3.34**) denkleminde kullanılırsa, kısmi integrasyondan sonra, $J(u,v)$ fonksiyonelinin varyasyonu

$$\begin{aligned}\delta J \quad &= A\int\limits_{\mathbb{R}}\Big\{[-\tilde{R}_{1,xx}+\Omega\tilde{R}_1-\gamma e^2(\tilde{R}_1^2+\tilde{R}_2^2)\tilde{R}_1]\eta_1\\ &\quad+[-\tilde{R}_{2,xx}+\Omega\tilde{R}_2-\gamma e^2(\tilde{R}_1^2+\tilde{R}_2^2)\tilde{R}_2]\eta_2\Big\}\,dx=0,\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada A katsayısı

$$A=\frac{(\|\tilde{R}_1\|_2^2+\|\tilde{R}_2\|_2^2)^{\frac{3}{8}}}{4(\|\tilde{R}_{1,x}\|_2^2+\|\tilde{R}_{2,x}\|_2^2)^{\frac{7}{8}}\ \|R_1^2+R_2^2\|_2^{1/2}}$$

olarak tanımlanmıştır. $J(u,v)$ fonksiyonelinin varyasyonunun keyfi η_1 ve η_2 fonksiyonları için sıfır olması, ancak ve ancak $(\tilde{R}_1,\tilde{R}_2)$ fonksiyonlarının (**3.19**) sistemini sağlaması ile mümkündür. Diğer bir deyişle, $J(u,v)$ fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemleri (**3.19**) denklem sistemidir ve $R_i=e\tilde{R}_i$ $(i=1,2)$ fonksiyonları (**3.7**) sistemini sağlar. Böylece Teorem 3.2'nin ispatı tamamlanmış olur. $\square$

Şimdi varlığı Teorem 3.2'de ispatlanmış olan yalnız dalga çözümlerinin (**2.1**) sistemi için açık formu ifade edilecektir. $(\Phi(x),\Psi(x))$ ve $(R_1(x),R_2(x))$ fonksiyonları arasındaki $\Phi(x)=R_1(x)e^{i\frac{c}{2}x}$, $\Psi(x)=R_2(x)e^{i\frac{c}{2}x}$ ve $U(x)=-\dfrac{\beta}{c}[R_1^2(x)+R_2^2(x)]$ ilişkileri ve (**3.5**) denkleminin kullanılmasıyla, (**2.1**) sistemi için yalnız dalga çözümlerinin açık formu

$$\left.\begin{array}{l}\phi(x,t)=R_1(x-ct)e^{i\left(\omega t+\frac{c}{2}(x-ct)\right)},\\ \psi(x,t)=R_2(x-ct)e^{i\left(\omega t+\frac{c}{2}(x-ct)\right)},\\ u(x,t)=-\frac{\beta}{c}\left[R_1^2(x-ct)+R_2^2(x-ct)\right]\end{array}\right\}\qquad(\mathbf{3.35})$$

şeklinde ifade edilir.

Özel olarak θ_0 bir sabit olmak üzere $R_2=R_1\tan\theta_0$ durumunda, (**3.7**) kuple sisteminin yalnız dalga çözümleri,

$$\begin{aligned}R_1(x)&=(\frac{2\Omega}{\gamma})^{\frac{1}{2}}\operatorname{sech}(\sqrt{\Omega}x)\cos\theta_0,\\ R_2(x)&=(\frac{2\Omega}{\gamma})^{\frac{1}{2}}\operatorname{sech}(\sqrt{\Omega}x)\sin\theta_0,\end{aligned}$$

ile verilir [12]. Burada θ_0 sabit polarizasyon açısıdır.

4. BİR BOYUTLU LSI DENKLEMLERİNİN YALNIZ DALGA ÇÖZÜMLERİNİN YÖRÜNGESEL KARARLILIĞI

4.1 Giriş

Doğrusal olmayan dispersif dalga denklemlerinin lokalize olmuş yalnız dalga çözümlerinin kararlılığı problemi, ilgi çeken bir araştırma konusudur. Bir dalga sisteminin yalnız dalgalarının kararlığını göstermek için, başlangıç anında yalnız dalgaya yakın olan çözümlerin artan zamanla nasıl davrandıklarını bilmek gerekir. Yalnız dalgaların doğrusal kararlılık teorisi, çözümler civarında doğrusal olmayan denklemlerin doğrusallaştırılması ve sonuç denklemlerin küçük pertürbasyonlara göre davranışının incelenmesine dayanır. Pertürbasyonların zaman içinde küçük kalması veya sıfıra gitmesi sistemin doğrusal anlamda kararlı olduğunu gösterir. Yukarıda belirtilen doğrusal kararlılık analizinden farklı olarak, doğrusal olmayan dispersif dalga denklemlerinin yalnız dalga çözümleri için herhangi bir doğrusallaştırma içermeyen ve yörüngesel kararlılık analizi olarak adlandırılan bir yaklaşım literatürde önerilmiştir. Doğrusal olmayan dalga denklemleri için, başlangıçta birbirine yakın olan lokalize olmuş dalgalar formlarını aynen korumakla birlikte zaman içinde birbirlerinden uzaklaşacaklardır. Bu durum, lokalize olmuş yalnız dalgaların kararlılığı kavramını tanımlamak için yörüngesel kararlılık adı verilen yeni bir kararlılık tanımına gerek olduğunu göstermiştir. Bu kavram özünde, yalnız dalgaların mutlak kararlılığı yerine dalga formuna göre kararlılığı içerir ve doğrusallaştırma içermemesi nedeniyle doğrusal kararlılık teorisinin kapsamı dışındadır.

Bu bölümde, (**2.1**) uzun dalga-kısa dalga etkileşim denklemlerinin (**3.35**) yalnız dalga çözümleri için yörüngesel kararlılık incelemesi gerçekleştirilmiştir. Altbölüm 4.2'de, yalnız dalga çözümlerinin yörüngesel kararlılık kavramı verilmiş ve yörüngesel kararlılığın genel ilkeleri tartışılmıştır. Altbölüm 4.3'de, (**2.1**)

1D-LSI sisteminin (**3.35**) yalnız dalga çözümlerinin yörüngesel kararlılığı Lyapunov yöntemi kullanılarak ispat edilmiştir.

4.2 Yörüngesel Kararlılık Kavramı

Yalnız dalgaların kararlılık incelenmesinde en uygun kavram yörüngesel kararlılıktır. Bir yalnız dalganın genliğinde küçük bir değişiklik yapıldığında, yeni yalnız dalga başka bir hızla hareket edecek ve formu korunduğu halde orijinal dalgaya olan uzaklığı zamanla artacaktır. Bu durumda aradaki uzaklık kararsızlığı göstermez. Bu sebeple aynı formda fakat uzay ve zaman ötelemelerinden dolayı farklı konumlarda olan yalnız dalgaların aynı küme içinde yeraldığı kabul edilir. Bu kümeye dalganın yörüngesi adı verilir. Kararlılık incelemesinde sözkonusu dalgaya olan uzaklık değil yörüngeye olan uzaklık dikkate alınır.

Bu altbölümde, ilk olarak KdV denkleminin ve daha sonra NLS denkleminin yalnız dalga çözümleri için yörüngesel kararlılık kavramı tartışılacak ve bir literatür özeti verilecektir. Yalnız dalgaların en önemli yapısal özelliklerinden biri, ilk olarak su dalgaları için deneysel olarak gözlemlenmiş olan kararlılıktır. Yalnız dalgaların kararlılığı ile sistemin korunan büyüklüklerini ilişkilendiren ilk matematiksel teoriyi sunan Boussinesq [32] olmuştur. Daha sonra Lax [33], $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ KdV denkleminin iki farklı korunan büyüklüğü I_m ve I_n olmak üzere,

$$\delta I_m = 0, \qquad I_n = \text{sabit}$$

şeklindeki kısıtlı varyasyonel problemin çözümünün KdV denkleminin yalnız dalga çözümü olduğunu bulmuş ve bu extremum özelliğinin kararlılık ile ilgili olduğunu fark etmiştir. Böylece ϕ sistemin yalnız dalga çözümü ve başlangıçta ϕ'ye yakın bir u için $I_n(u) = I_n(\phi)$ olmak üzere I_m fonksiyonelinin minimum değerini ϕ için aldığı, yani

$$\Delta I_m = I_m(u) - I_m(\phi) \geq 0$$

olduğu, gözlenmiştir. Buradan çıkan sonuç, ΔI_m zamandan bağımsız olduğu için, u çözümü başlagıçta ϕ'ye yakın ise ΔI_m'in başlangıçtaki küçük değerini zaman içinde koruduğu olmuştur. Bu ise çözümlerin de zaman içinde birbirlerine yakın kaldığı sonucunu verir. Ancak, ΔI_m büyüklüğünün fonksiyonlar arasındaki uzaklığı ölçmek için kullanılması doğru değildir. Çünkü ΔI_m değeri küçük olmasına rağmen, u ve ϕ fonksiyonları arasındaki uzaklık büyük olabilir [34]. Benjamin [34] KdV denkleminin yalnız dalgaları için önce kararlılık tanımını ve daha sonra ispatını vermiştir. KdV denkleminin c hızıyla ilerleyen $\phi(x-ct)$ çözümü başlangıç anında herhangi bir $u(x,0)$ fonksiyonuna yakınken ilerleyen zamanlarda da karşılık gelen $u(x,t)$ çözümüne yakın kalıyorsa, bu durumda $\phi(x,t)$ çözümü kararlıdır denir. Başlangıç anındaki ve sonraki zamanlardaki uzaklıkları ölçmek için, sırasıyla, d_I ve d_{II} metrikleri kullanılmıştır. Bu durumda Lyapunov kararlılığı için tanım şu şekilde verilmiştir [34]: Verilen her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı,

$$d_I(u,\phi)|_{t=0} \leq \delta$$

iken

$$d_{II}(u,\phi) \leq \epsilon \tag{4.1}$$

olacak şekilde bulunabilirse çözüm kararlıdır. İspat için KdV denkleminin invaryantları yardımıyla tanımlanmış bir $I(u,\phi)$ fonksiyoneli kullanılmıştır. Böylece, $d_I(u,\phi)|_{t=0} < \delta$ iken

$$t = 0 \ \text{ için } \ \alpha[d_I(u,\phi)]^2 \geq I(u,\phi),$$

ve

$$\text{her } \ t \geq 0 \ \text{ için } \ \beta[d_{II}(u,\phi)]^2 \leq I(u,\phi),$$

olacak şekilde α, $\beta > 0$ sabitleri bulunabilirse kararlılık gösterilmiş olur. Tanımın bu şekilde verilmesinin nedeni hem bu eşitsizlikler ve hem de $I(u,\phi)$ fonksiyonelinin zamandan bağımsız olduğunun kullanılmasıyla, $\delta = (\beta/\alpha)^{1/2}\epsilon$ için (**4.1**) eşitsizliğinin sağlandığının gösterilebilmesidir. $I(u,\phi)$ fonksiyonelini sınırlayabilmek için integraller üzerinde çeşitli kestirimler, fonksiyonel analiz ve spektral teori kullanılmıştır [34]. Bu çalışmada yapılmış olan bazı hatalar daha sonra Bona tarafından düzeltilmiştir [35].

Weinstein, yine Lyapunov yöntemini kullanarak,

$$i\phi_t + \Delta\phi + f(|\phi|^2)\phi = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \tag{4.2}$$

şeklinde genel bir NLS denklemi için yörüngesel kararlılığı ispatlamıştır [20]. Weinstein NLS denkleminin yörüngesel kararlılık ispatı için, ilk olarak, korunan büyüklükler yardımıyla $L(\phi)$ şeklinde bir Lyapunov fonksiyonelini, fonksiyonelin Euler-Lagrange denkleminin çözümü (**4.2**) denkleminin yalnız dalga çözümü olacak şekilde, belirlemiştir. Weinstein ayrıca, NLS denkleminin faz ve uzay simetrilerine sahip olduğunu gözönüne alarak, bir $\psi(x,t)$ fonksiyonu için yörünge tanımını

$$\mathcal{O}_\psi \equiv \{e^{i\gamma}\psi(\cdot + x_0) | (x_0, \gamma) \in \mathbb{R}^n \times [0, 2\pi)\}$$

şeklinde vermiştir. Sahip olduğu simetriler nedeniyle, NLS denkleminin bir $\phi(x,t)$ çözümü varsa $e^{i\gamma}\phi(x + x_0, t)$ de çözümdür. Böylece yörünge kavramı, tüm ötelenmiş ve döndürülmüş çözümleri aynı küme içine almakta ve bu çözümler arasındaki uzaklığın kararsızlık olarak algılanmasını önlemiş olmaktadır. Yörüngesel kararlılık için kullanılan uzaklık kavramı da bu yörüngeye uzaklık olarak tanımlanmaktadır. NLS denkleminin bir ϕ_0 başlangıç koşuluna karşılık gelen $\phi(x,t)$ çözümünün $\mathcal{O}_\psi$ yörüngesine uzaklığı

$$\rho^2(\phi, \mathcal{O}_\psi) \equiv \inf\{\|\nabla e^{i\gamma}\phi(\cdot + x_0) - \nabla\psi\|_2^2 + \omega\|e^{i\gamma}\phi(\cdot + x_0) - \psi\|_2^2\}$$

metriği ile ölçülür. Esas olarak yapılan, $\psi(x,t) = e^{i\omega t}R(x)$ formundaki bir yalnız dalga çözümü için, $g(t) = ct^2(1 - at^\theta - bt^4), \quad a, b, c, \theta > 0$ ve L Lyapunov fonksiyoneli olmak üzere,

$$\Delta L = L(\phi) - L(R) \geq g(\rho(\phi, \mathcal{O}_\psi)) \qquad \textbf{(4.3)}$$

olduğunu göstermektir. Burada $g(t)$ fonksiyonu, $t < 1$ için artan bir fonksiyondur. Dolayısıyla keyfi bir $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\rho(\phi, \mathcal{O}_\psi)) \leq \delta(\epsilon) \qquad \textbf{(4.4)}$$

olacak şekilde bir $\delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa,

$$\Delta L(0) \leq g(\epsilon)$$

yazılabilir. Son eşitsizlik ve (**4.3**)'den

$$\rho(\phi, \mathcal{O}_\psi)) \leq \epsilon \qquad \textbf{(4.5)}$$

eşitsizliği bulunmuş olur. Yani, (**4.4**) eşitsizliği ile başlangıçta yörüngeye yakın bir çözümün seçildiği ve (**4.5**) eşitsizliği ile bu çözümün daha sonra da yörüngeye yakın kaldığı, bir diğer deyişle yalnız dalganın yörüngesel kararlı olduğu, gösterilmiş olur.

Weinstein [20] bir genelleştirilmiş KdV denklemi için yörüngesel kararlılık ispatını da aynı yöntemle vermiştir. Weinstein'ın Benjamin'in çalışmasından farklılaştığı temel nokta, ΔL fonksiyonelinin üst sınır hesabıdır. Bu hesaplamalarda operatörlerin genel spektral teorisi kullanılmış ve $n \geq 2$ için sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra aynı yaklaşım iki bileşenli 1D-LSI denklemlerinin [11] ve Zakharov-Rubenchik denklemlerinin [36] yalnız dalga çözümlerinin kararlılığının incelenmesinde kullanılmıştır.

4.3 1D-LSI Denklemlerinin Yalnız Dalga Çözümlerinin Yörüngesel Kararlılığı

4.3.1 Global varlık

1D-LSI sisteminin yalnız dalga çözümlerinin kararlılık teorisinin yapılabilmesi için, bu sistemin başlangıç değer probleminin global iyi tanımlı olduğunu gösteren sonuca gerek vardır. Ancak, bu aşamada üç bileşenli 1D-LSI sisteminin Cauchy probleminin tüm zamanda iyi tanımlı olduğuna dair matematiksel bir sonuç yoktur. Bununla birlikte, üç bileşenli 1D-LSI sisteminin iki bileşenli özel bir hali olan (**2.2**) sisteminin başlangıç değer probleminin, $(\phi_0, u_0) \in H^{1/2}(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$ başlangıç datası için global iyi tanımlı olduğu Tsutsumi ve Hatano [9, 10] tarafından aşağıdaki teorem ile ispatlanmıştır:

Teorem ([9, 10]): Her $\phi_0 \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ ve $u_0 \in L^2(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$ fonksiyonları için,

$$i\phi_t + \phi_{xx} = \beta \left[\nu \int_0^t (|\phi(x,s)|^2)_x ds \right] \phi + \beta u_0 \phi$$
$$\phi(0,x) = \phi_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

sistemini distribüsyonel anlamda sağlayan ve her $T > 0$ için

$$\phi \in X_1^T = \{ f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \in C([0,T]; H^{1/2}(\mathbb{R})),\ f_x \in L^\infty(\mathbb{R}; L^2[0,T]) \}$$

olacak şekilde tek bir $\phi : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu vardır. Ayrıca, her $T > 0$ değeri için (ϕ_0, u_0) fonksiyonlarının $H^{1/2}(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$ uzayında bir

$U_{(\phi_0,u_0)}$ komşuluğu mevcuttur öyleki, $U_{(\phi_0,u_0)}$ komşuluğundaki $(\tilde{\phi}_0, \tilde{u}_0)$ başlangıç değer fonksiyonunu X_1^T Banach uzayındaki $\tilde{\phi}$ çözümüne götüren dönüşüm Lipschitz süreklidir.

Tsutsumi ve Hatano'nun iki bileşenli 1D-LSI sisteminin başlangıç değer problemi için elde ettikleri global iyi tanımlılık sonucunun, benzer bir biçimde üç bileşenli 1D-LSI sistemine genişletilebileceği ifade edilebilir. 1D-LSI sisteminin başlangıç değer probleminin global iyi tanımlı olduğu varsayımı altında, sistemin doğal enerji uzayı $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ olduğu için, bu çalışmanın devamında Cauchy probleminin çözümü olan $(\phi(x,t), \psi(x,t), u(x,t))$ için başlangıç datasının $(\phi_0, \psi_0, u_0) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ şeklinde olduğu varsayılacaktır.

4.3.2 Lyapunov fonksiyoneli

1D-LSI sisteminin yalnız dalga çözümlerinin kararlılığı, sistemin invaryantları kullanılarak tanımlanan Lyapunov fonksiyonelinin özelliklerine bağlı olacaktır. Korunan büyüklükler yardımıyla ve k_1, k_2, k_3 ve k_4 uygun seçilecek sabitler olmak üzere, 1D-LSI sisteminin $(R_1,\ R_2)$ yalnız dalga çözümlerinin sağladığı (**3.7**) sistemi için Lyapunov fonksiyoneli, I_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ (**2.5**) ile verilen korunan büyüklükler olmak üzere,

$$\begin{aligned} L(\Phi, \Psi, U) &= k_1 I_1 + k_2 I_2 + k_3 I_3 + k_4 I_4 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L} dx \\ &= k_1 \int_{\mathbb{R}} |\Phi|^2 dx + k_2 \int_{\mathbb{R}} |\Psi|^2 dx \\ &\quad + k_3 \int_{\mathbb{R}} \left(U^2 + i(\Phi^* \Phi_x - \Phi \Phi_x^* + \Psi^* \Psi_x - \Psi \Psi_x^*)\right) dx \\ &\quad + k_4 \int_{\mathbb{R}} \left(|\Phi_x|^2 + |\Psi_x|^2 + \beta(|\Phi|^2 + |\Psi|^2) U\right) dx \qquad (\mathbf{4.6}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanabilir. $(\Phi(x), \Psi(x)) = (R_1(x), R_2(x)) e^{\frac{icx}{2}}$ tanımı kullanılarak (**4.6**) ifadesi

$$\begin{aligned} L(R_1, R_2, U) &= k_1 \int_{\mathbb{R}} R_1^2 dx + k_2 \int_{\mathbb{R}} R_2^2 dx + k_3 \int_{\mathbb{R}} \left(U^2 - cR_1^2 - cR_2^2\right) dx \\ &+ k_4 \int_{\mathbb{R}} \left(R_{1,x}^2 + R_{2,x}^2 + \frac{c^2}{4} R_1^2 + \frac{c^2}{4} R_2^2 + \beta(R_1^2 + R_2^2) U\right) dx \quad (\mathbf{4.7}) \end{aligned}$$

formunda da yazılabilir. Öte yandan, (R_1, R_2) yalnız dalga çözümleri (**4.7**) Lyapunov fonksiyonelinin kritik noktaları olduğundan,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{1,x}}\right) = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{2,x}}\right) = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} = 0$$

ile verilen Euler-Lagrange denklemleri, yani

$$\begin{aligned}
&-k_4 R_{1,xx} + (k_1 - ck_3 + k_4\frac{c^2}{4})R_1 + k_4\beta R_1 U = 0, \\
&-k_4 R_{2,xx} + (k_2 - ck_3 + k_4\frac{c^2}{4})R_2 + k_4\beta R_2 U = 0, \\
&U = -\frac{\beta}{2k_3}(R_1^2 + R_2^2)
\end{aligned}$$

eşitlikleri, sağlanmalıdır. Buradan da $k_1 = k_2 = \omega$, $k_3 = c/2$ ve $k_4 = 1$ bulunur. Bu durumda, $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlı Lyapunov fonksiyoneli

$$L = \omega(I_1 + I_2) + \frac{c}{2}I_3 + I_4 \tag{4.8}$$

şeklini alır. Bu sonuç, c ve ω uygun seçilen Lagrange çarpanları olmak üzere,

$$\delta I_4 = 0, \quad I_1 + I_2 = \text{ sabit} \quad \text{ve} \quad I_3 = \text{ sabit} \tag{4.9}$$

kısıtlı varyasyonel problemi olarak ifade edilebilir. Diğer bir deyişle, (**2.1**) sisteminin (R_1, R_2) yalnız dalgaları kısıtlı varyasyonel problemin çözümü olacaktır. 1D-LSI denkleminin bu ekstremum özelliği, yalnız dalgaların kararlılığının ispatında kullanılacaktır.

4.3.3 Metrik fonksiyonu ve infimumu

Daha önce belirtildiği gibi, 1D-LSI etkileşim sistemi uzay ve faz simetrilerine sahiptir; yani $(\phi(x,t), \psi(x,t), u(x,t))$ fonksiyonları bu sistemin çözümü ise $\left(e^{i\theta_1}\phi(x+x_0,t), e^{i\theta_2}\psi(x+x_0,t), u(x+x_0,t)\right)$ fonksiyonları da herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}$ ve $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$ için çözümdür. Buna uygun olarak, bir (f, g, h) fonksiyon üçlüsü için $\mathcal{O}(f, g, h)$ yörüngesi

$$\mathcal{O}(f,g,h) = \{e^{i\theta_1}f(\cdot + x_0), e^{i\theta_2}g(\cdot + x_0), h(\cdot + x_0);\ \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi),\ x_0 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanabilir. Dolayısıyla başlangıçta bu yörüngeye yakın olan bir çözüm sonraki zamanlarda da yörüngenin yakınında ise, 1D-LSI sisteminin çözümü *yörüngesel kararlıdır* denir.

(**2.1**) denklem sisteminin

$$\begin{aligned}
\phi_s(x,t) &= e^{i\omega t}\Phi(x-ct) = e^{i\omega t}R_1(x-ct)e^{i\frac{c(x-ct)}{2}},\\
\psi_s(x,t) &= e^{i\omega t}\Psi(x-ct) = e^{i\omega t}R_2(x-ct)e^{i\frac{c(x-ct)}{2}},\\
u_s(x,t) &= U(x-ct) = -\frac{\beta}{c}(R_1^2(x-ct)+R_2^2(x-ct)),
\end{aligned}$$

ile verilen (ϕ_s, ψ_s, u_s) yalnız dalga çözümlerinin yörüngesel kararlılığını incelemek için, bu yalnız dalgaların $\mathcal{O}(R_1, R_2)$ yörüngesi ile (**2.1**) sisteminin $(\phi(x,t), \psi(x,t), u(x,t))$ çözümü arasındaki uzaklığı ölçmek gereklidir. Bu uzaklığı ölçmek için,

$$\rho_\Omega^2[(\phi,\psi), \mathcal{O}(R_1,R_2)] = \inf_{\substack{x_0\in\mathbb{R}\\ \theta_1,\theta_2\in[0,2\pi)}} \{I_\Omega\} \tag{4.10}$$

metriği tanımlanmaktadır. Burada

$$\begin{aligned}
I_\Omega(x_0,\theta_1,\theta_2) \quad = \quad & N_\Omega(e^{i\theta_1}e^{-i\frac{c}{2}(\cdot+x_0-ct)}\phi(\cdot+x_0,t)-R_1)\\
& +N_\Omega(e^{i\theta_2}e^{-i\frac{c}{2}(\cdot+x_0-ct)}\psi(\cdot+x_0,t)-R_2)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

gösterilimi kullanılmış ve norm fonksiyonu olan N_Ω da

$$N_\Omega(f) = \Omega\|f\|_2^2 + \|\nabla f\|_2^2$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca,

$$\inf(1,\Omega)\ \|f\|_{H^1}^2 \le N_\Omega(f) \le \sup(1,\Omega)\ \|f\|_{H^1}^2$$

özelliğini sağlayan $N_\Omega(f)$ normunun f fonksiyonunun H^1 normuna eşdeğer olduğu açıktır. (**4.10**) ile tanımlanan metrik, bu tanımın doğal bir sonucu olarak, çözüm fonksiyonunda uzaysal ötelemeden ve rotasyondan gelen etkileri göz önüne almaz.

(**2.1**) 1D-LSI denklem sisteminin herhangi (ϕ, ψ, u) çözümleri için $w_1(x,t)$, $w_2(x,t)$ ve $\eta(x,t)$ artım fonksiyonları

$$\left.\begin{array}{l}
w_1(x,t) = e^{i\theta_1}e^{-i\frac{c}{2}(x+x_0-ct)}\phi(x+x_0,t)-R_1(x),\\
w_2(x,t) = e^{i\theta_2}e^{-i\frac{c}{2}(x+x_0-ct)}\psi(x+x_0,t)-R_2(x),\\
\eta(x,t) = u(x+x_0,t)+\frac{\beta}{c}\left(R_1^2(x)+R_2^2(x)\right),
\end{array}\right\} \tag{4.12}$$

olarak tanımlanabilir. Burada $w_k(x,t)$ $(k=1,2)$ kompleks değerli ve $\eta(x,t)$ gerçel değerli fonksiyonlar olup, x_0, θ_1, θ_2 büyüklükleri de I_Ω metrik fonksiyonunu infimum yapan değerlerdir.

Aşağıdaki lemma bu metrik fonksiyonunun bir infimum değerini en az bir $t \in [0,T]$ için aldığını göstermektedir. Benzer lemma daha önce KdV denklemi [35] ve iki kuple integral terimli uzun dalga-kısa dalga denklem sistemi [37] için ispat edilmiştir.

Lemma 4.1. (ϕ, ψ, u) fonksiyonları (**2.1**) sisteminin $(\phi_0, \psi_0, u_0) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ başlangıç değerine karşılık gelen ve $\|\phi_0\|_2 = \|R_1\|_2$ ve $\|\psi_0\|_2 = \|R_2\|_2$ koşullarını sağlayan çözümü olsun. Bir $t_0 \in [0,\infty)$ ve $(x_0, \theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ için

$$I_\Omega(x_0, \theta_1, \theta_2) < \Omega(\|R_1\|_2^2 + \|R_2\|_2^2) \qquad \mathbf{(4.13)}$$

koşulu sağlanıyorsa, $\inf\{I_\Omega | x_0 \in \mathbb{R}, \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)\}$ değeri en az bir kez alınır.

İspat. I_Ω fonksiyonu, $\mathbb{R} \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ bölgesinde $(x_0, \theta_1, \theta_2)$ değişkenlerinin sürekli fonksiyonudur. Diğer yandan, herhangi $(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ için, $'$ işareti türevi göstermek üzere,

$$\begin{aligned}\lim_{x_0 \to \mp\infty} I_\Omega(x_0, \theta_1, \theta_2) &= \|[e^{-i\frac{c}{2}(\cdot - ct)}\phi(\cdot, t)]'\|_2^2 + \|[e^{-i\frac{c}{2}(\cdot - ct)}\psi(\cdot, t)]'\|_2^2 \\ &+ \|R_1'(\cdot)\|_2^2 + \|R_2'(\cdot)\|_2^2 + 2\Omega\|R_1(\cdot)\|_2^2 + 2\Omega\|R_2(\cdot)\|_2^2 \qquad \mathbf{(4.14)}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece; $I_\Omega(x_0, \theta_1, \theta_2) < \Omega(\|R_1\|_2^2 + \|R_2\|_2^2)$ hipotezi, I_Ω fonksiyonunun sürekliliği ve $|x_0| \to \infty$ için bu fonksiyonun sonlu olduğunu gösteren (**4.14**) sonucu, I_Ω fonksiyonunun en az bir kez infimum değerini aldığını gösterir. $\square$

Şimdi Lemma 4.1'de verilen (**4.13**) hipotezinin en az bir $(x_0, \theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ noktasında alındığını göstermemiz gerekir. Bunun için bir aralıkta $I_\Omega(x_0, \theta_1, \theta_2) < \Omega(\|R_1\|_2^2 + \|R_2\|_2^2)$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. $I_\Omega(x_0, \theta_1, \theta_2)$ fonksiyonunun $(ct, -\omega t, -\omega t)$ noktasındaki değeri

$$\begin{aligned}I_\Omega(ct, -\omega t, -\omega t) \; = \; & \|e^{-i\omega t} e^{-i\frac{c\cdot}{2}}\{[\phi'(\cdot + ct, t) - \phi_s'(\cdot + ct, t)] \\ & -i\frac{c}{2}[\phi(\cdot + ct, t) - \phi_s(\cdot + ct, t)]\}\|_2^2 \\ & +\Omega\|e^{-i\omega t} e^{-i\frac{c\cdot}{2}}[\phi(\cdot + ct, t) - \phi_s(\cdot + ct, t)]\|_2^2 \\ & +\|e^{-i\omega t} e^{-i\frac{c\cdot}{2}}\{[\psi'(\cdot + ct, t) - \psi_s'(\cdot + ct, t)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-i\frac{c}{2}[\psi(\cdot+ct,t)-\psi_s(\cdot+ct,t)]\}\|_2^2\\
&+\Omega\|e^{-i\omega t}e^{-i\frac{c\cdot}{2}}[\psi(\cdot+ct,t)-\psi_s(\cdot+ct,t)]\|_2^2\\
&=\|[\phi'(\cdot,t)-\phi_s'(\cdot,t)]-i\frac{c}{2}[\phi(\cdot,t)-\phi_s(\cdot,t)]\|_2^2\\
&+\Omega\|[\phi(\cdot,t)-\phi_s(\cdot,t)]\|_2^2+\Omega\|[\psi(\cdot,t)-\psi_s(\cdot,t)]\|_2^2\\
&+\|[\psi'(\cdot,t)-\psi_s'(\cdot,t)]-i\frac{c}{2}[\psi(\cdot,t)-\psi_s(\cdot,t)]\|_2^2
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Minkowski eşitsizliği ve Cauchy eşitsizliği (Ek A) kullanılarak $\|a+b\|_2^2 \leq 2\|a\|_2^2 + 2\|b\|_2^2$ yazılabilir. Bu eşitsizlik $I_\Omega(ct,-\omega t,-\omega t)$ ifadesinde kullanılırsa;

$$
\begin{aligned}
I_\Omega(ct,-\omega t,-\omega t) \leq 2\|\phi'(\cdot)-\phi_s'(\cdot)\|_2^2+(\frac{c^2}{2}+\Omega)\|\phi(\cdot)-\phi_s(\cdot)\|_2^2\\
+2\|\psi'(\cdot)-\psi_s'(\cdot)\|_2^2+(\frac{c^2}{2}+\Omega)\|\psi(\cdot)-\psi_s(\cdot)\|_2^2
\end{aligned}
$$

elde edilir. (**2.1**) 1D-LSI sisteminin yalnız dalga çözümleri $(\phi_s(x,t),\psi_s(x,t)) = (e^{i\omega t}e^{i\frac{c}{2}(x-ct)}R_1(x-ct), e^{i\omega t}e^{i\frac{c}{2}(x-ct)}R_2(x-ct))$ global olarak tanımlıdır. Dolayısıyla, başlangıç datasına sürekli bağlılıktan $T>0$ için bir $\delta>0$ sayısı bulunabilir öyle ki; eğer

$$\|(\phi_0,\psi_0)-(e^{i\frac{c}{2}\cdot}R_1, e^{i\frac{c}{2}\cdot}R_2)\|_{H^1}<\delta$$

ise, (ϕ_0,ψ_0) başlangıç datasına karşılık gelen (ϕ,ψ) çözümü en azından $0\leq t\leq T$ aralığında mevcuttur. Ayrıca bu çözüm

$$\|(\phi(\cdot,t),\psi(\cdot,t))-(\phi_s(\cdot,t),\psi_s(\cdot,t))\|_{H^1}<\epsilon$$

koşulunu sağlar. Bu koşul kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
I_\Omega(ct,-\omega t,-\omega t) &\leq 2\epsilon^2+(\frac{c^2}{2}+\Omega)\epsilon^2+2\epsilon^2+(\frac{c^2}{2}+\Omega)\epsilon^2\\
&\leq 4\epsilon^2(1+\frac{c^2}{4}+\Omega)=4\epsilon^2(1+\omega) \qquad (\mathbf{4.15})
\end{aligned}
$$

yazılabilir. (**4.15**) eşitsizliğinde

$$4\epsilon^2(1+\omega)<\Omega(\|R_1\|_2^2+\|R_2\|_2^2),$$

yani

$$\epsilon^2<\frac{\Omega(\|R_1\|_2^2+\|R_2\|_2^2)}{4(1+\omega)}$$

seçilirse, (**4.13**) koşulunun en azından $(\tilde{x}_0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = (ct, -\omega t, -\omega t)$ değerleri için sağlandığı, yani I_Ω için bir üst sınır bulunabileceği, gösterilmiş olur.

Lemma 4.1'de I_Ω fonksiyonunun $0 \leq t \leq T$ için bir infimum değerini aldığı ispatlanmış oldu. $I_\Omega(x_0, \theta_1, \theta_2)$ sürekli fonksiyonunun infimum değerini aldığı noktalar $\rho_\Omega^2 = \inf\limits_{\substack{x_0 \in \mathbb{R} \\ \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)}} \{I_\Omega\}$ metrik fonksiyonunun kritik noktalarıdır:

$$\frac{\partial I_\Omega}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial I_\Omega}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial I_\Omega}{\partial \theta_2} = 0.$$

$I_\Omega(x_0, \theta_1, \theta_2)$ fonksiyonunun açık hali

$$\begin{aligned} I_\Omega(x_0, \theta_1, \theta_2) &= \Omega \int\limits_{\mathbb{R}} |e^{i\theta_1} e^{-i\frac{c}{2}(x+x_0-ct)} \phi(x+x_0, t) - R_1(x)|^2 dx \\ &+ \Omega \int\limits_{\mathbb{R}} |e^{i\theta_2} e^{-i\frac{c}{2}(x+x_0-ct)} \psi(x+x_0, t) - R_2(x)|^2 dx \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}} |e^{i\theta_1} e^{-i\frac{c}{2}(x+x_0-ct)} \left(-\frac{ic}{2}\phi(x+x_0, t) + \phi_x(x+x_0, t)\right) - R_{1,x}(x)|^2 dx \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}} |e^{i\theta_2} e^{-i\frac{c}{2}(x+x_0-ct)} \left(-\frac{ic}{2}\psi(x+x_0, t) + \psi_x(x+x_0, t)\right) - R_{2,x}(x)|^2 dx \end{aligned}$$

ile verilir. $I_\Omega(x_0, \theta_1, \theta_2)$ fonksiyonunun x_0, θ_1 ve θ_2 değişkenlerine göre kısmi türevleri hesaplanır, $w_1(x,t)$ ve $w_2(x,t)$ artım fonksiyonları için (**4.12**) ile verilen tanımlar kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_\Omega}{\partial x_0} &= \int\limits_{\mathbb{R}} [R_{1,xx}\mathrm{Re}(w_{1,x}) + \Omega R_{1,x}\mathrm{Re}(w_1) \\ &\qquad + R_{2,xx}\mathrm{Re}(w_{2,x}) + \Omega R_{2,x}\mathrm{Re}(w_2)]\, dx = 0, \qquad (\mathbf{4.16}) \\ \frac{\partial I_\Omega}{\partial \theta_1} &= \int\limits_{\mathbb{R}} [R_{1,x}\mathrm{Im}(w_{1,x}) + \Omega R_1 \mathrm{Im}(w_1)]\, dx = 0, \qquad (\mathbf{4.17}) \\ \frac{\partial I_\Omega}{\partial \theta_2} &= \int\limits_{\mathbb{R}} [R_{2,x}\mathrm{Im}(w_{2,x}) + \Omega R_2 \mathrm{Im}(w_2)]\, dx = 0 \qquad (\mathbf{4.18}) \end{aligned}$$

elde edilir. (**4.16**)-(**4.18**) denklemlerinde Re(.) ve Im(.) işaretleri ilgili büyüklüğün, sırasıyla, reel ve sanal kısmını göstermektedir. $p_k(x,t)$ ve $q_k(x,t)$ $(k = 1, 2)$ gerçel değerli fonksiyonlar olmak üzere, kompleks değerli w_k artım fonksiyonlarının $w_k(x,t) = p_k(x,t) + iq_k(x,t)$ $(k = 1, 2)$ gösterilimleri

(**4.16**)-(**4.18**) denklemlerinde kullanılırsa,

$$\int_{\mathbb{R}} \{p_{1,x}[\Omega R_1 - \gamma(R_1^2 + R_2^2)R_1] + \Omega R_{1,x}p_1$$
$$+p_{2,x}[\Omega R_2 - \gamma(R_1^2 + R_2^2)R_2] + \Omega R_{2,x}p_2\}\, dx = 0, \qquad (\mathbf{4.19})$$

$$\int_{\mathbb{R}} (-R_{1,xx} + \Omega R_1)q_1 dx = 0, \qquad (\mathbf{4.20})$$

$$\int_{\mathbb{R}} (-R_{2,xx} + \Omega R_2)q_2 dx = 0 \qquad (\mathbf{4.21})$$

bulunur. (R_1, R_2) fonksiyonlarının (**3.7**) sisteminin çözümü olduğu (**4.19**)-(**4.21**) denklemlerinde kullanılırsa, kısmi integrasyonlardan sonra, $p_i(x,t)$ ve $q_i(x,t)$ $(i = 1, 2)$ için

$$\int_{\mathbb{R}} R_1 \left(R_1^2 + R_2^2\right) q_1 dx = 0, \qquad (\mathbf{4.22})$$

$$\int_{\mathbb{R}} R_2 \left(R_1^2 + R_2^2\right) q_2 dx = 0, \qquad (\mathbf{4.23})$$

$$\int_{\mathbb{R}} (R_1^2 + R_2^2) \left(R_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + R_2 \frac{\partial p_2}{\partial x}\right) dx = 0 \qquad (\mathbf{4.24})$$

uygunluk koşulları elde edilir. Bu koşullar I_Ω fonksiyonunun infimum değerini aldığı $(x_0, \theta_1, \theta_2)$ noktalarında geçerlidir.

4.3.4 Yörüngesel kararlılık ispatı

1D-LSI sisteminin $(R_1(x), R_2(x))$ yalnız dalgalarının kararlılığını incelemek için, bu çözümler ile sistemin herhangi $(\phi(x,t), \psi(x,t))$ çözümleri arasındaki uzaklığın zaman içinde nasıl değiştiği belirlenmelidir. Diğer bir deyişle, $(R_1(x), R_2(x))$ yalnız dalgasına $t = 0$ anında yakın olan $(\phi_0(x), \psi_0(x))$ başlangıç datasına karşılık gelen $(\phi(x,t), \psi(x,t))$ çözümlerinin sonraki zamanlarda da yalnız dalganın yörüngesine yakın olup olmadığını belirlemek gerekir. Bu altbölümde 1D-LSI sisteminin yalnız dalga çözümlerinin yörüngesel kararlı olduğu ispat edilecektir. Aşağıda ispatı verilecek olan kararlılık teoremi ifade edilmiştir.

4.3.4.1 Yörüngesel kararlılık teoremi

Teorem 4.2. $\Omega = \omega - \dfrac{c^2}{4} > 0$ olmak üzere (**2.1**) denklem sisteminin

$$\left.\begin{array}{l} \phi_s(x,t) = e^{i\omega t}\Phi(x-ct) = e^{i\omega t}R_1(x-ct)e^{i\frac{c(x-ct)}{2}}, \\ \psi_s(x,t) = e^{i\omega t}\Psi(x-ct) = e^{i\omega t}R_2(x-ct)e^{i\frac{c(x-ct)}{2}}, \\ u_s(x,t) = U(x-ct) = -\frac{\beta}{c}(R_1^2(x-ct)+R_2^2(x-ct)) \end{array}\right\} \qquad (\mathbf{4.25})$$

şeklinde verilen yalnız dalga çözümü yörüngesel kararlıdır. Bir diğer ifadeyle, $(\phi_0, \psi_0, u_0) \in H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R})$ başlangıç datasına karşılık gelen çözüm $(\phi(x,t), \psi(x,t), u(x,t))$ olmak üzere, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|\phi_0(\cdot) - \Phi(\cdot)\|_{H^1} \leq \delta, \quad \|\psi_0(\cdot) - \Psi(\cdot)\|_{H^1} \leq \delta, \quad \|u_0(\cdot) - U(\cdot)\|_2 \leq \delta$$

iken

$$\begin{aligned} &\inf_{\substack{x_0\in\mathbb{R} \\ \theta_1\in[0,2\pi)}} \|e^{i\theta_1}\phi(\cdot + x_0, t) - \Phi(\cdot)\|_{H^1} \leq \epsilon, \\ &\inf_{\substack{x_0\in\mathbb{R} \\ \theta_2\in[0,2\pi)}} \|e^{i\theta_2}\psi(\cdot + x_0, t) - \Psi(\cdot)\|_{H^1} \leq \epsilon, \\ &\inf_{x_0\in\mathbb{R}} \|u(\cdot + x_0, t) - U(\cdot)\|_2 \leq \epsilon \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir.

4.3.4.2 Lyapunov fonksiyonelinin değişimi

1D-LSI sisteminin yalnız dalga çözümlerinin yörüngesel kararlılık ispatında kullanılacak Lyapunov yöntemi, $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlanan (**4.8**) $L(t)$ fonksiyonelinin zamandan bağımsız olması esasına dayanır. Lyapunov fonksiyoneli 1D-LSI sisteminin invaryantları ile tanımlandığından $L(0) = L(t)$ eşitliği geçerlidir. Yalnız dalgaların yörüngesel kararlılığı, L fonksiyonelinin $\Delta L(t) = L(\phi(t), \psi(t), u(t)) - L(\Phi(x), \Psi(x), U(x))$ ile tanımlanan değişiminin sağladığı

$$\begin{aligned} &\Delta L(0) \leq 2g(\varepsilon) \\ &\Delta L(t) \geq g(\|w_1\|_{H^1}) + g(\|w_2\|_{H^1}) \end{aligned} \qquad (\mathbf{4.26})$$

eşitsizlikleri kullanılarak gösterilecektir. (**4.26**) eşitsizliğindeki g fonksiyonu, a_i $(i = 1,2,3)$ pozitif sabitler olmak üzere, $g(x) = a_1x^2 - a_2x^3 - a_3x^4$ ile tanımlanan bir fonksiyondur. $\Delta L(t)$ değişiminin alt ve üst sınırını bulmak için, $u(x,t)$ reel değerli fonksiyonunun artım fonksiyonu $\eta(x,t) = u(x+x_0,t) + \dfrac{\beta}{c}\left(R_1^2(x)+R_2^2(x)\right)$ olmak üzere, L Lyapunov fonksiyonelindeki değişim yani $\Delta L(t)$ hesaplanacaktır:

$$\begin{aligned}
\Delta L(t) &= L(\phi(t),\psi(t),u(t)) - L(\Phi(x),\Psi(x),U(x)), \\
&= L\left(\Phi(x)+e^{i\frac{cx}{2}}w_1(x,t), \Psi(x)+e^{i\frac{cx}{2}}w_2(x,t), U(x)+\eta(x,t)\right) \\
&\qquad -L(\Phi(x),\Psi(x),U(x)), \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \left\{(\beta U+\omega)(|w_1|^2+|w_2|^2)+|w_{1,x}|^2+|w_{2,x}|^2+ic\mathrm{Im}(w_1^* w_{1,x}+w_2^* w_{2,x})\right. \\
&\quad \left. +2\beta\mathrm{Re}(\Phi w_1^*+\Psi w_2^*)\eta+\frac{c}{2}\eta^2\right\}dx+\int\limits_{\mathbb{R}}\beta(|w_1|^2+|w_2|^2)\eta dx. \qquad (\mathbf{4.27})
\end{aligned}$$

$(\mathbf{4.27})$ ifadesinde $(\Phi(x),\Psi(x)) = (R_1(x),R_2(x))e^{\frac{icx}{2}}$ ve $w_k(x,t) = p_k(x,t)+iq_k(x,t)$ $(k=1,2)$ tanımları kullanılırsa $\Delta L(t)$ değişimi, bazı hesaplamalardan sonra,

$$\Delta L(t) = \delta L+\delta^2 L+\delta^3 L \qquad (\mathbf{4.28})$$

olarak bulunur. Burada δL, $\delta^2 L$ ve $\delta^3 L$, sırasıyla, birinci, ikinci ve üçüncü varyasyonlar olup

$$\begin{aligned}
\delta L &= \int\limits_{\mathbb{R}} \{2\left[R_{1,xx}-\Omega R_1-\beta U R_1\right]p_1+2\left[R_{2,xx}-\Omega R_2-\beta U R_2\right]p_2 \\
&\quad +\left[cU+\beta(R_1^2+R_2^2)\right]\eta\}\,dx, \qquad (\mathbf{4.29}) \\
\delta^2 L &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\frac{c}{2}\eta^2+p_{1,x}^2+q_{1,x}^2+p_{2,x}^2+q_{2,x}^2+\Omega(p_1^2+q_1^2+p_2^2+q_2^2)\right. \\
&\quad \left.+2\beta(R_1p_1+R_2p_2)\eta-\gamma(R_1^2+R_2^2)(p_1^2+q_1^2+p_2^2+q_2^2)\right]dx, \qquad (\mathbf{4.30}) \\
\delta^3 L &= \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(p_1^2+q_1^2+p_2^2+q_2^2)\eta\; dx \qquad (\mathbf{4.31})
\end{aligned}$$

şeklindedir. Daha yüksek mertebeli tüm varyasyonlar özdeş olarak sıfırdır. Ayrıca, yalnız dalga çözümleri Lyapunov fonksiyonelinin kritik noktası olduğundan ilk varyasyonun da sıfır olduğu görülebilir. L_i^+, $(i=1,2,3)$ ve L^-

operatörleri

$$L_1^+ = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Omega - \gamma(3R_1^2 + R_2^2), \tag{4.32}$$

$$L_2^+ = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Omega - \gamma(R_1^2 + 3R_2^2), \tag{4.33}$$

$$L_3^+ = -2\gamma R_1 R_2, \tag{4.34}$$

$$L^- = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Omega - \gamma(R_1^2 + R_2^2) \tag{4.35}$$

şeklinde tanımlanmak üzere, (**4.28**) ve (**4.29**)-(**4.31**) yardımıyla $\Delta L(t)$ değişimi

$$\begin{aligned} \Delta L(t) \;=\;& \langle L^- q_1, q_1\rangle + \langle L^- q_2, q_2\rangle + \langle L_1^+ p_1, p_1\rangle + \langle L_2^+ p_2, p_2\rangle + 2\langle L_3^+ p_1, p_2\rangle \\ & -\gamma \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)^2 + 2(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)(p_1 R_1 + p_2 R_2)\right] dx \\ & + \frac{c}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\eta + \frac{2\beta}{c}(p_1 R_1 + p_2 R_2) + \frac{\beta}{c}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)\right]^2 dx \end{aligned} \tag{4.36}$$

olarak ifade edilebilir.

4.3.4.3 Lyapunov fonksiyonelinin değişimi için alt sınır

Lyapunov fonksiyonelinin değişimini gösteren $\Delta L(t)$ ifadesinin bir alt sınırını hesaplamak için $\Delta L(t)$ ifadesindeki terimler teker teker ele alınacaktır. Bu alt sınır hesaplamaları için aşağıdaki lemmalar verilmiştir.

Lemma 4.3. C_i $(i = 1, 2)$ pozitif sabitler olmak üzere, L^- operatörü için

$$\langle L^- q_i, q_i\rangle \;\geq C_i \|q_i\|_{H^1}^2 \quad (i = 1, 2) \tag{4.37}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Pozitif $R_i(x)$ $(i = 1, 2)$ fonksiyonları için $L^- R_i = 0$ olduğundan, Sturm-Liouville teoremi yardımıyla, L^- operatörünün negatif özdeğeri olmadığı ve dolayısıyla L^- operatörünün negatif olmayan bir operator olduğu bulunur. Diğer bir deyişle, $\mu_i = \inf \dfrac{\langle L^- q_i, q_i\rangle}{\langle q_i, q_i\rangle} \geq 0$ $(i = 1, 2)$ eşitsizliği geçerlidir. Eğer bu infimum değerin, (**4.22**) ve (**4.23**) ile verilen

$$\int\limits_{\mathbb{R}} R_i(R_1^2 + R_2^2)\; q_i \; dx = 0 \quad (i = 1, 2)$$

kısıtları altında alındığı varsayılırsa, bu değerin $q_i(x) = R_i(x)$ fonksiyonu için alınacağı açıktır. Bu ise $\int\limits_{\mathbb{R}} R_i^2(R_1^2 + R_2^2)\; dx = 0$ olmasından dolayı $R_i(x) = 0$

sonucuna yol açar ve $R_i(x) > 0$ ile çelişir. Dolayısıyla, $\mu_i > 0$ $(i = 1,2)$ olmalıdır. Diğer bir deyişle, D_i'ler pozitif sabitler olmak üzere,

$$\langle L^- q_i, q_i\rangle \ \geq D_i \|q_i\|_2^2 \quad (i = 1,2)$$

yazılabilir. L^- operatörünün (**4.35**) ile verilen tanımı kullanılırsa, bu eşitsizlik

$$\langle L^- q_i, q_i\rangle = \|q_{i,x}\|_2^2 + \Omega\|q_i\|_2^2 - \gamma \int\limits_{\mathbb{R}} (R_1^2 + R_2^2) q_i^2 dx \geq D_i \|q_i\|_2^2$$

şeklinde veya $\|q_i\| = \|q_{i,x}\|_2^2 + \Omega\|q_i\|_2^2$ gösterimi kullanılarak

$$\|q_i\| - \gamma \int\limits_{\mathbb{R}} (R_1^2 + R_2^2) q_i^2 dx \geq D_i \|q_i\|_2^2 \tag{4.38}$$

şeklinde ifade edilebilir. k_i $(i = 1,2)$ pozitif gerçel sayılar olmak üzere (**4.38**) eşitsizliği

$$\langle L^- q_i, q_i\rangle \ = \ \frac{1}{k_i+1}\|q_i\| - \gamma \int\limits_{\mathbb{R}} (R_1^2 + R_2^2) q_i^2 dx + \frac{k_i}{k_i+1}\|q_i\| \geq D_i \|q_i\|_2^2 \tag{4.39}$$

olarak yazılabilir. Ayrıca (**4.38**) eşitsizliğinin her iki tarafı $(k_i + 1)$ sayısına bölünerek,

$$\frac{1}{k_i+1}\|q_i\| - \frac{\gamma}{k_i+1} \int\limits_{\mathbb{R}} (R_1^2 + R_2^2) q_i^2 dx \geq \frac{D_i}{k_i+1}\|q_i\|_2^2$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_i+1}\|q_i\| - \frac{\gamma}{k_i+1} \int\limits_{\mathbb{R}} (R_1^2 + R_2^2) q_i^2 dx - \frac{\gamma k_i}{k_i+1} \int\limits_{\mathbb{R}} (R_1^2 + R_2^2) q_i^2 dx \\ + \frac{\gamma k_i}{k_i+1} \int\limits_{\mathbb{R}} (R_1^2 + R_2^2) q_i^2 dx \geq \frac{D_i}{k_i+1}\|q_i\|_2^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte ilk iki integral terim biraraya getirilir ve son integral terim eşitsizliğin diğer tarafına geçirilirse, $E = \max(\|R_1\|_\infty, \|R_2\|_\infty)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_i+1}\|q_i\| - \gamma \int\limits_{\mathbb{R}} (R_1^2 + R_2^2) q_i^2 dx \ &\geq \ \frac{D_i}{k_i+1}\|q_i\|_2^2 - \frac{\gamma k_i}{k_i+1} \int\limits_{\mathbb{R}} (R_1^2 + R_2^2) q_i^2 dx \\ &\geq \ \left(\frac{D_i}{k_i+1}\|q_i\|_2^2 - 2\frac{\gamma k_i}{k_i+1} E^2 \|q_1\|_2^2 \right) \\ &= \ \frac{1}{k_i+1}(D_i - 2\gamma k_i E^2)\|q_i\|_2^2 \end{aligned} \tag{4.40}$$

bulunur. (**4.40**) eşitsizliğinde $D_i - 2\gamma k_i E^2 > 0$ olacak şekilde k_i yeterince küçük seçilirse

$$\left(\frac{1}{k_i+1}\|q_i\| - \gamma \int\limits_{\mathbb{R}} (R_1^2 + R_2^2) q_i^2 dx \right) > 0$$

elde edilir. Bu durumda (**4.39**) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \langle L^- q_i, q_i \rangle &= \left(\frac{1}{k_i+1}\|q_i\| - \gamma \int\limits_{\mathbb{R}} (R_1^2 + R_2^2) q_i^2 dx \right) + \frac{k_i}{k_i+1}\|q_i\| \\ &\geq \frac{k_i}{k_i+1}\|q_i\| = \frac{k_i}{k_i+1}(\|q_{i,x}\|_2^2 + \Omega\|q_i\|_2^2) \\ &\geq \frac{k_i}{k_i+1}\inf(1,\, \Omega)\|q_i\|_{H_1}^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $C_i = \dfrac{k_i}{k_i+1}\inf(1,\Omega)$ olmak üzere

$$\langle L^- q_i, q_i \rangle \ \geq C_i \|q_i\|_{H^1}^2, \quad (i = 1, 2)$$

sonucu elde edilir. □

L_i^+ $(i = 1,2,3)$ operatörlerinin pozitifliği gösterilemeyeceğinden (**4.36**) eşitsizliğindeki $\langle L_1^+ p_1, p_1 \rangle + \langle L_2^+ p_2, p_2 \rangle + 2\langle L_3^+ p_1, p_2 \rangle$ ifadesi için bir alt sınır bulmak, $\langle L^- q_i, q_i \rangle$ için yapılan teknik hesaplamalardan çok daha fazla teknik hesaplama gerektirmektedir. Bunun için öncelikle [38]'de verilen lemmanın bir genelleştirilmesi sunulacaktır.

Lemma 4.4. $\displaystyle\inf_{\substack{\langle f, R_1 \rangle = 0 \\ \langle g, R_2 \rangle = 0}} \left\{ \langle L_1^+ f, f \rangle + \langle L_2^+ g, g \rangle + 2\langle L_3^+ f, g \rangle \right\} = 0.$

İspat. Bölüm 3'te ispat edildiği gibi $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ fonksiyon çifti $J(u,v)$ fonksiyonelini minimize ettiğinden, $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ civarında $J(u,v)$ fonksiyonelinin ikinci varyasyonu negatif olmamalıdır: $\delta^2 J \geq 0$. $J(u,v)$ fonksiyonelinin ikinci varyasyonunu hesaplamak için ilk olarak $\dfrac{d}{d\epsilon}J(\tilde{R}_1 + \epsilon\eta_1, \tilde{R}_2 + \epsilon\eta_2)$ ifadesi ve daha sonra $\dfrac{d^2 J}{d\epsilon^2}|_{\epsilon=0}$ büyüklüğü hesaplanmalıdır:

$$\frac{d}{d\epsilon}J(\tilde{R}_1 + \epsilon\eta_1, \tilde{R}_2 + \epsilon\eta_2) \;=\; \frac{b_1^{\frac{3}{8}} b_2^{\frac{1}{8}} b_3^{-\frac{1}{4}}}{4} \left(3b_1^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} [(\tilde{R}_1 + \epsilon\eta_1)\eta_1 + (\tilde{R}_2 + \epsilon\eta_2)\eta_2] dx \right.$$

$$
\begin{aligned}
&+b_2^{-1}\int_{\mathbb{R}}[(\tilde{R}_{1,x}+\epsilon\eta_{1,x})\eta_{1,x}+(\tilde{R}_{2,x}+\epsilon\eta_{2,x})\eta_{2,x}]dx\\
&-4b_3^{-1}\int_{\mathbb{R}}[(\tilde{R}_1+\epsilon\eta_1)^3\eta_1+(\tilde{R}_1+\epsilon\eta_1)(\tilde{R}_2+\epsilon\eta_2)^2\eta_1\\
&+(\tilde{R}_1+\epsilon\eta_1)^2(\tilde{R}_2+\epsilon\eta_2)\eta_2+(\tilde{R}_2+\epsilon\eta_2)^3\eta_2]dx\Big). \qquad (\mathbf{4.41})
\end{aligned}
$$

Burada b_1, b_2 ve b_3 büyüklükleri

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \int_{\mathbb{R}}[(\tilde{R}_1+\epsilon\eta_1)^2+(\tilde{R}_2+\epsilon\eta_2)^2]dx,\\
b_2 &= \int_{\mathbb{R}}[(\tilde{R}_{1,x}+\epsilon\eta_{1,x})^2+(\tilde{R}_{2,x}+\epsilon\eta_{2,x})^2]dx,\\
b_3 &= \int_{\mathbb{R}}[(\tilde{R}_1+\epsilon\eta_1)^2+(\tilde{R}_2+\epsilon\eta_2)^2]^2dx
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanmıştır. (**4.41**) ifadesi ϵ parametresine göre türetilir ve elde edilen ifade $\epsilon = 0$ için hesaplanırsa, $J(u,v)$ fonksiyonelinin ikinci varyasyonu

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\epsilon^2}J|_{\epsilon=0} \;=\; b^2 \Bigg\{ &\int_{\mathbb{R}}[-\eta_{1,xx}+\Omega\eta_1-\gamma e^2(3\tilde{R}_1^2+\tilde{R}_2^2)\eta_1]\eta_1 dx\\
&+\int_{\mathbb{R}}[-\eta_{2,xx}+\Omega\eta_2-\gamma e^2(3\tilde{R}_2^2+\tilde{R}_1^2)\eta_2]\eta_2 dx\\
&-4\gamma e^2\int_{\mathbb{R}}\tilde{R}_1\tilde{R}_2\eta_1\eta_2 dx-\frac{\Omega}{2}[\int_{\mathbb{R}}(\tilde{R}_1\eta_1+\tilde{R}_2\eta_2)dx]^2\\
&-3[\int_{\mathbb{R}}(\tilde{R}_1\eta_1+\tilde{R}_2\eta_2)dx][\int_{\mathbb{R}}(\tilde{R}_{1,x}\eta_{1,x}+\tilde{R}_{2,x}\eta_{2,x})dx]\\
&-\frac{3}{2\Omega}[\int_{\mathbb{R}}(\tilde{R}_{1,x}\eta_{1,x}+\tilde{R}_{2,x}\eta_{2,x})dx]^2\Bigg\} \qquad (\mathbf{4.42})
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. (**4.42**) eşitliğinde $R_i = e\tilde{R}_i$ ve

$$
b^2 = \frac{1}{4\sqrt{2}a}(\frac{3}{\Omega})^{\frac{7}{8}}
$$

tanımları kullanılmıştır. (**4.32**)-(**4.34**) ile verilen L_i^+ $(i = 1,2,3)$ tanımları kullanılırsa, $J(u,v)$ fonksiyonelinin ikinci varyasyonu,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\epsilon^2} J(\tilde{R}_1+\epsilon\eta_1,\ \tilde{R}_2+\epsilon\eta_2)\ |_{\epsilon=0} \\
&\qquad = b^2\left(\langle L_1^+\eta_1,\eta_1\rangle + \langle L_2^+\eta_2,\eta_2\rangle + 2\langle L_3^+\eta_1,\eta_2\rangle\right) \\
&\qquad +b^2\left(\frac{\Omega}{\sqrt{2}e^2}(\langle R_1,\ \eta_1\rangle + \langle R_2,\ \eta_2\rangle)^2\right. \\
&\qquad \left.+\frac{3\sqrt{2}}{e^2}(\langle R_1,\ \eta_1\rangle + \langle R_2,\ \eta_2\rangle)(\langle R_{1,x},\ \eta_{1,x}\rangle + \langle R_{2,x},\ \eta_{2,x}\rangle)\right) \\
&\qquad -\frac{3b^2}{\sqrt{2}\Omega e^2}\left(\langle R_{1,x},\ \eta_{1,x}\rangle + \langle R_{2,x},\ \eta_{2,x}\rangle\right)^2 \geq 0
\end{aligned}
\qquad (\mathbf{4.43})
$$

olarak yazılır. Diğer yandan, $\langle f, R_1\rangle = 0$ ve $\langle g, R_2\rangle = 0$ koşulunu sağlayan $\eta_1 = f$ ve $\eta_2 = g$ fonksiyonları için (**4.43**) eşitsizliğinden

$$\langle L_1^+ f, f\rangle + \langle L_2^+ g, g\rangle + 2\langle L_3^+ f, g\rangle\ \geq 0 \qquad (\mathbf{4.44})$$

elde edilir. Ayrıca $R_{1,x}$ ve $R_{2,x}$ fonksiyonları

$$L_1^+ R_{1,x} + L_3^+ R_{2,x} = \left(-R_{1,xx} + \Omega R_1 - \gamma(R_1^2+R_2^2)R_1\right)_x = 0, \qquad (\mathbf{4.45})$$

$$L_2^+ R_{2,x} + L_3^+ R_{1,x} = \left(-R_{2,xx} + \Omega R_2 - \gamma(R_1^2+R_2^2)R_2\right)_x = 0 \qquad (\mathbf{4.46})$$

eşitliklerini sağlamaktadır. (**4.45**) denklemi $R_{1,x}$ ve (**4.46**) denklemi $R_{2,x}$ ile çarpılıp $\mathbb{R}$ üzerinde integre edilir ve sonuç ifadeler taraf tarafa toplanırsa,

$$
\begin{aligned}
&\langle L_1^+ R_{1,x}, R_{1,x}\rangle + \langle L_2^+ R_{2,x}, R_{2,x}\rangle + \langle L_3^+ R_{1,x}, R_{2,x}\rangle + \langle L_3^+ R_{2,x}, R_{1,x}\rangle \\
&\qquad = \langle L_1^+ R_{1,x} + L_3^+ R_{2,x}, R_{1,x}\rangle + \langle L_2^+ R_{2,x} + L_3^+ R_{1,x}, R_{2,x}\rangle = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\langle f, R_1\rangle = \langle R_{1,x}, R_1\rangle = 0$ ve $\langle g, R_2\rangle = \langle R_{2,x}, R_2\rangle = 0$ olduğundan $f = R_{1,x}$ ve $g = R_{2,x}$ fonksiyonları Lemma 4.4'ün hipotezlerini sağlar. Bu sonuç, (**4.44**) ifadesinin sıfır olduğunu gösterir ve böylece Lemma 4.4'ün ispatı tamamlanmış olur. □

$\langle L_1^+ p_1, p_1\rangle + \langle L_2^+ p_2, p_2\rangle + 2\langle L_3^+ p_1, p_2\rangle$ ifadesine bir alt sınır bulmak için, daha önce Lemma 4.1'de hipotez olarak verilmiş olan

$$\|\phi_0\|_2 = \|R_1\|_2, \quad \|\psi_0\|_2 = \|R_2\|_2 \qquad (\mathbf{4.47})$$

koşulları kullanılacaktır. (**2.5**) ifadesinde verildiği gibi ϕ ve ψ fonksiyonlarının L^2 normları korunan büyüklerdir: $\|\phi_0(.)\|_2^2 = \|\phi(.,t)\|_2^2$, $\|\psi_0(.)\|_2^2 = \|\psi(.,t)\|_2^2$. Bu özellik ve (ϕ,ψ) fonksiyonları için (**4.12**) ile verilen

$$e^{i\theta_1}e^{-i\frac{c}{2}(x+x_0-ct)}\phi(x+x_0,t)=R_1(x)+w_1(x,t),$$
$$e^{i\theta_2}e^{-i\frac{c}{2}(x+x_0-ct)}\psi(x+x_0,t)=R_2(x)+w_2(x,t)$$

tanımları (**4.47**) kısıtlamalarında kullanılırsa,

$$\langle R_i,p_i\rangle=-\frac{1}{2}[\langle p_i,p_i\rangle+\langle q_i,q_i\rangle]=-\frac{1}{2}\|w_i\|_2^2\ <0\quad (i=1,2) \qquad \textbf{(4.48)}$$

elde edilir. (**4.36**) ifadesine uygun bir alt sınır bulmak için ayrıca $\|R_1\|_2=\|R_2\|_2$ ve $\|w_1\|_2=\|w_2\|_2$ olduğu varsayılacaktır. R_i fonksiyonlarının L^2 normlarının eşit olması, esas olarak, (**3.7**) sisteminin simetrik olarak kuple olmasından kaynaklanmaktadır. w_i artım fonksiyonlarının L^2 normlarının eşit olması kısıtı ise, aşağıdaki Lemma 4.5'de $\langle L_1^+p_1,p_1\rangle+\langle L_2^+p_2,p_2\rangle+2\langle L_3^+p_1,p_2\rangle$ ifadesinin bazı terimlerinin pozitifliğini göstermek için gereklidir. Ayrıca bu kısıt, (**4.48**) denkleminden görüleceği gibi, $\langle p_1,R_1\rangle=\langle p_2,R_2\rangle$ eşitliğini verir.

Lemma 4.5. (**4.32**)-(**4.34**) ile tanımlanan L_i^+ $(i=1,2,3)$ operatörleri ve $p_i(x)$ $(i=1,2)$ artım fonksiyonları, A_i $(i=1,2,3)$ sayıları pozitif sabitler olmak üzere,

$$\langle L_1^+p_1,p_1\rangle+\langle L_2^+p_2,p_2\rangle+2\langle L_3^+p_1,p_2\rangle\geq A_1\left(\|p_1\|_{H^1}^2+\|p_2\|_{H^1}^2\right)$$
$$-A_2\left(\|w_1\|_{H^1}^3+\|w_2\|_{H^1}^3\right)-A_3\left(\|w_1\|_{H^1}^4+\|w_2\|_{H^1}^4\right) \qquad \textbf{(4.49)}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. $w_i(x,t)$ artım fonksiyonunun gerçel kısımları olan $p_i(x,t)$ $(i=1,2)$ fonksiyonları,

$$p_{i\|}=\langle p_i,\,R_i\rangle\frac{R_i}{\|R_i\|_2^2},\quad p_{i\perp}=p_i-\langle p_i,\,R_i\rangle\frac{R_i}{\|R_i\|_2^2} \qquad \textbf{(4.50)}$$

olmak üzere, $p_i=p_{i\|}+p_{i\perp}$ şeklinde yazılabilir. Burada $p_{i\|}$ fonksiyonları R_i fonksiyonlarına paralel olan izdüşümü, $p_{i\perp}$ ise R_i fonksiyonlarına ortogonal olan izdüşümü gösterir: $\langle p_{i\perp},R_i\rangle=0$. Ayrıca, $\|R_1\|_2=\|R_2\|_2$ kabul edildiğinden, hesaplarda kolaylık sağlaması için genellikten kaybetmeden $\|R_1\|_2=\|R_2\|_2=1$ alınacaktır. $p_i(x,t)$ fonksiyonlarının (**4.50**) ayrıştırması (**4.49**) ifadesinde kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\langle L_1^+ p_1, p_1\rangle + \langle L_2^+ p_2, p_2\rangle + 2\langle L_3^+ p_1, p_2\rangle \\
&\qquad = \langle L_1^+ p_{1\perp}, p_{1\perp}\rangle + \langle L_2^+ p_{2\perp}, p_{2\perp}\rangle \\
&\qquad\quad + 2\langle L_3^+ p_{1\perp}, p_{2\perp}\rangle + \langle L_1^+ p_{1\|}, p_{1\|}\rangle + \langle L_2^+ p_{2\|}, p_{2\|}\rangle + 2\langle L_3^+ p_{1\|}, p_{2\|}\rangle \\
&\qquad\quad + 2\langle L_1^+ p_{1\perp}, p_{1\|}\rangle + 2\langle L_2^+ p_{2\perp}, p_{2\|}\rangle \\
&\qquad\quad + 2\langle L_3^+ p_{2\|}, p_{1\perp}\rangle + 2\langle L_3^+ p_{1\|}, p_{2\perp}\rangle
\end{aligned}
\tag{\textbf{4.51}}
$$

elde edilir. İspatın bundan sonraki kısmında (**4.51**) eşitliğinin sağındaki terimler için alt sınır hesaplaması ayrı ayrı verilecektir.

i) $\langle L_1^+ p_{1\perp}, p_{1\perp}\rangle + \langle L_2^+ p_{2\perp}, p_{2\perp}\rangle + 2\langle L_3^+ p_{1\perp}, p_{2\perp}\rangle$ için alt sınır hesabı: $f = p_{1\perp}$ ve $g = p_{2\perp}$ fonksiyonları için Lemma 4.4'ün hipotezleri sağlanır: $\langle p_{1\perp}, R_1\rangle = \langle p_{2\perp}, R_2\rangle = 0$. Dolayısıyla

$$\langle L_1^+ p_{1\perp}, p_{1\perp}\rangle + \langle L_2^+ p_{2\perp}, p_{2\perp}\rangle + 2\langle L_3^+ p_{1\perp}, p_{2\perp}\rangle \geq 0 \tag{\textbf{4.52}}$$

eşitsizliği yazılabilir. (**4.52**) ifadesinin infimum değeri olan sıfır değeri $(p_{1\perp}, p_{2\perp}) = (R_{1,x}, R_{2,x})$ fonksiyon çiftinde alınır. Bu durumda Lemma 4.1'de elde edilen (**4.24**) koşulu, $\alpha = \langle p_i,\ R_i\rangle$ $(i = 1, 2)$ olmak üzere, $p_i = \alpha R_i + R_{i,x}$ $(i = 1, 2)$ artım fonksiyonları için

$$\frac{\alpha}{4}\int_{\mathbb{R}} [(R_1^2 + R_2^2)^2]_x dx + \int_{\mathbb{R}} (R_1^2 + R_2^2)(R_1 R_{1xx} + R_2 R_{2xx}) dx = 0$$

şeklinde veya

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ [(R_1^2 + R_2^2)_x]^2 + 2(R_1^2 + R_2^2)[(R_{1,x})^2 + (R_{2,x})^2] \right\} dx = 0 \tag{\textbf{4.53}}$$

şeklinde yazılabilir. (**4.53**) denklemi ise $R_i = 0$ $(i = 1, 2)$ sonucuna yol açar. Bu sonuç R_i fonksiyonlarının pozitif olmasıyla çelişir. Böylece

$$\langle L_1^+ p_{1\perp}, p_{1\perp}\rangle + \langle L_2^+ p_{2\perp}, p_{2\perp}\rangle + 2\langle L_3^+ p_{1\perp}, p_{2\perp}\rangle \geq D_3 \tag{\textbf{4.54}}$$

olacak şekilde bir D_3 sayısı bulunabilir. Ayrıca, $\langle p_{i\perp}, p_{i\perp}\rangle = \|p_i\|_2^2 - \dfrac{1}{4}\|w_i\|_2^4$ eşitliği de kullanılarak, (**4.54**) eşitsizliği $\bar{C}_3$ ve C_3 pozitif sabitler olmak üzere

$$\langle L_1^+ p_{1\perp}, p_{1\perp}\rangle + \langle L_2^+ p_{2\perp}, p_{2\perp}\rangle + 2\langle L_3^+ p_{1\perp}, p_{2\perp}\rangle \tag{\textbf{4.55}}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \bar{C}_3(\langle p_{1\perp}, p_{1\perp}\rangle + \langle p_{2\perp}, p_{2\perp}\rangle) \\
&\geq C_3\left(\|p_1\|_2^2 + \|p_2\|_2^2 - \frac{1}{4}(\|w_1\|_{H^1}^4 + \|w_2\|_{H^1}^4)\right)
\end{aligned}
\tag{\textbf{4.56}}
$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $H^1(\mathbb{R})$ uzayının $L^2(\mathbb{R})$ uzayına sürekli olarak gömülmesi kullanılmıştır.

ii) $\langle L_1^+ p_{1\|}, p_{1\|}\rangle + \langle L_2^+ p_{2\|}, p_{2\|}\rangle$ için alt sınır hesabı: L_i^+ operatörlerinin ve $p_{i\|}$ fonksiyonlarının tanımları kullanılırsa, $\langle L_i^+ R_i, R_i\rangle = -2\gamma\langle R_i^2, R_i^2\rangle$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\langle L_i^+ p_{i\|}, p_{i\|}\rangle &= \langle p_i, R_i\rangle^2 \langle L_i^+ R_i, R_i\rangle \\
&= -2\gamma \langle p_i, R_i\rangle^2 \int_{\mathbb{R}} R_i^4 \\
&= -\frac{\gamma}{2} E^2 \|w_i\|_2^4 \int_{\mathbb{R}} R_i^2 \\
&\geq -\frac{\gamma}{2} E^2 \|w_i\|_{H^1}^4 \quad (i = 1, 2)
\end{aligned} \qquad (\mathbf{4.57})$$

elde edilir. $(\mathbf{4.57})$ eşitsizliğinin elde edilmesinde; $E = \max(\|R_1\|_\infty, \|R_2\|_\infty)$ gösterilimi, Cauchy eşitsizliği ve $H^1(\mathbb{R})$ uzayının $L^2(\mathbb{R})$ uzayına sürekli gömülmesi kullanılmıştır.

iii) $\langle L_3^+ p_{1\|}, p_{2\|}\rangle$ için alt sınır hesabı: $p_{i\|} = \langle p_i, R_i\rangle R_i = \alpha R_i$ $(i = 1, 2)$ tanımları ile

$$\begin{aligned}
\langle L_3^+ p_{1\|}, p_{2\|}\rangle &= \langle L_3^+ \alpha R_1, \alpha R_2\rangle \\
&= \langle p_1, R_1\rangle\ \langle p_2, R_2\rangle\ \langle L_3^+ R_1, R_2\rangle \\
&= \frac{1}{4} \|w_1\|_2^2\ \|w_2\|_2^2\ \langle -2\gamma R_1^2 R_2, R_2\rangle \\
&\geq -\frac{\gamma}{2} \|w_1\|_{H^1}^2\ \|w_2\|_{H^1}^2 \int_{\mathbb{R}} R_1^2 R_2^2 dx \\
&\geq -\frac{\gamma}{4} \left[\|w_1\|_{H^1}^4 + \|w_2\|_{H^1}^4\right] \int_{\mathbb{R}} R_1^2 dx \\
&\geq -\frac{\gamma}{4} E^2 \left[\|w_1\|_{H^1}^4 + \|w_2\|_{H^1}^4\right]
\end{aligned} \qquad (\mathbf{4.58})$$

elde edilir. $(\mathbf{4.58})$ eşitsizliğinin elde edilmesinde; yine $E = \max(\|R_1\|_\infty, \|R_2\|_\infty)$ olması, Cauchy eşitsizliği ve $H^1(\mathbb{R})$ uzayının $L^2(\mathbb{R})$ uzayına sürekli gömülmesi kullanılmıştır.

iv) $\langle L_1^+ p_{1\perp}, p_{1\|}\rangle + \langle L_2^+ p_{2\perp}, p_{2\|}\rangle$ için alt sınır hesabı: $\alpha = -\frac{1}{2}\|w_i\|_2^2$ olmak üzere $p_{i\|} = \alpha R_i$ ve $\langle R_i, p_{i\perp}\rangle = 0$ olması kullanılırsa,

$$\langle L_i^+ p_{i\perp}, p_{i\|}\rangle = \alpha \left(\langle R_{i,x}, p_{i\perp,x}\rangle - 3\gamma\langle R_i^3, p_{i\perp}\rangle - \gamma\langle R_j^2 R_i, p_{i\perp}\rangle\right), \quad (i, j = 1, 2 \ \ i \neq j) \qquad (\mathbf{4.59})$$

elde edilir. $E = \max(\|R_1\|_\infty, \|R_2\|_\infty)$ olmak üzere, $|\langle R_i^3, p_{i\perp}\rangle| \leq E^2 |\langle R_i, p_{i\perp}\rangle| = 0$ ve $|\langle R_j^2 R_i, p_{i\perp}\rangle| \leq E^2 |\langle R_i, p_{i\perp}\rangle| = 0$ sonuçları ile (**4.59**) eşitsizliği

$$\langle L_i^+ p_{i\perp}, p_{i\|}\rangle \geq -\frac{1}{2}\|w_i\|_2^2 \langle R_{i,x}, p_{i\perp,x}\rangle \quad (i = 1, 2)$$

formuna indirgenir. $p_{i\perp} = p_i - \alpha R_i$ tanımı ve Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılarak

$$\langle L_i^+ p_{i\perp}, p_{i\|}\rangle \geq -\frac{1}{2}\|R_{i,x}\|_2 \; \|w_i\|_2^2 \; \|w_{i,x}\|_2 - \frac{1}{4}\|R_{i,x}\|_2^2 \; \|w_i\|_2^4 \quad (i = 1, 2) \quad (\mathbf{4.60})$$

elde edilir. $H^1(\mathbb{R})$ uzayının $L^2(\mathbb{R})$ uzayına sürekli gömülmesinden dolayı, E_i ve F_i pozitif sabitler olmak üzere, (**4.60**) eşitsizliği

$$\langle L_i^+ p_{i\perp}, p_{i\|}\rangle \geq -\frac{E_i}{2}\|w_i\|_{H^1}^3 - \frac{F_i}{2}\|w_i\|_{H^1}^4 \quad (i = 1, 2) \quad (\mathbf{4.61})$$

olarak ifade edilir.

v) $\langle L_3^+ p_{2\|}, p_{1\perp}\rangle$ ve $\langle L_3^+ p_{1\|}, p_{2\perp}\rangle$ için alt sınır hesabı: $p_{i\|} = \langle p_i, R_i\rangle R_i$ tanımları kullanılırsa,

$$\langle L_3^+ p_{1\|}, p_{2\perp}\rangle = -2\gamma \langle p_2, R_2\rangle \langle R_1 R_2 p_{1\perp}, R_2\rangle$$

bulunur. Bu ifadenin mutlak değeri

$$|\langle L_3^+ p_{1\|}, p_{2\perp}\rangle| = |-2\gamma \langle p_2, R_2\rangle \langle R_1 R_2 p_{1\perp}, R_2\rangle| \leq 2\gamma E^2 \|w_2\|_2^2 \; |\langle p_{1\perp}, R_1\rangle| = 0 \quad (\mathbf{4.62})$$

olarak bulunur ve benzer şekilde

$$|\langle L_3^+ p_{2\|}, p_{1\perp}\rangle| = 0 \quad (\mathbf{4.63})$$

elde edilir.

Yukarıda L_i^+ operatörleri ve p_i artım fonksiyonlarını içeren terimler için yapılan hesaplar biraraya toplandığında,

$$\begin{aligned} \langle L_1^+ p_1, p_1\rangle + \langle L_2^+ p_2, p_2\rangle + 2\langle L_3^+ p_1, p_2\rangle &\geq C_3(\|p_1\|_2^2 + \|p_2\|_2^2) \\ &- \max(E_1, E_2)(\|w_1\|_{H^1}^3 + \|w_2\|_{H^1}^3) \\ &- \left(\frac{C_3}{4} + \gamma E^2 + \max(F_1,\ F_2)\right)(\|w_1\|_{H^1}^4 + \|w_2\|_{H^1}^4) \equiv \mathcal{A} \quad (\mathbf{4.64}) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca L_1^+, L_2^+ ve L_3^+ operatörlerinin (**4.32**)-(**4.34**) ile verilen tanımları ve $\|p_{i,x}\|_2^2 + \Omega\|p_i\|_2^2 = \|p_i\|$ gösterimi kullanılarak;

$$I = \left\{ \int_{\mathbb{R}} (3R_1^2 + R_2^2) p_1^2 dx + \int_{\mathbb{R}} (R_1^2 + 3R_2^2) p_2^2 dx + 4\int_{\mathbb{R}} R_1 R_2 p_1 p_2 dx \right\}$$

olmak üzere,

$$\langle L_1^+ p_1, p_1\rangle + \langle L_2^+ p_2, p_2\rangle + 2\langle L_3^+ p_1, p_2\rangle = \|p_1\| + \|p_2\| - \gamma\ I \tag{\textbf{4.65}}$$

yazılabilir. Daha sonra (**4.64**) ve (**4.65**) ifadeleri birleştirilerek

$$\|p_1\| + \|p_2\| - \gamma\ I \geq \mathcal{A} \tag{\textbf{4.66}}$$

elde edilir. Dolayısıyla $m > 0$ herhangi bir gerçel sayı olmak üzere

$$\left\{\frac{1}{m+1}(\|p_1\| + \|p_2\|) - \gamma\ I\right\} + \frac{m}{m+1}(\|p_1\| + \|p_2\|) \geq \mathcal{A}$$

elde edilir. (**4.66**) eşitsizliği $(m+1)$ ile bölünüp, çıkan eşitsizliğin her iki tarafına $-\dfrac{\gamma m}{m+1} I$ eklenirse

$$\frac{1}{m+1}(\|p_1\| + \|p_2\|) - \gamma\ I \geq \frac{\mathcal{A}}{m+1} - \frac{\gamma m}{m+1} I \tag{\textbf{4.67}}$$

bulunur. (**4.67**) eşitsizliğinin sağ tarafı açık olarak yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{A}}{m+1} - \frac{\gamma m}{m+1} I \ = \ & \frac{C_3}{m+1}(\|p_1\|_2^2 + \|p_2\|_2^2) - \frac{\max(E_1,\ E_2)}{m+1}(\|w_1\|_{H^1}^3 + \|w_2\|_{H^1}^3) \\
& - \frac{1}{m+1}\left(\frac{C_3}{4} + \gamma E^2 + \max(F_1,\ F_2)\right)(\|w_1\|_{H^1}^4 + \|w_2\|_{H^1}^4) \\
& - \frac{\gamma}{m+1}\left\{\int_{\mathbb{R}} (3R_1^2 + R_2^2)p_1^2 dx - \int_{\mathbb{R}} (R_1^2 + 3R_2^2)p_2^2 dx \right. \\
& \left. - \int_{\mathbb{R}} R_1 R_2 p_1 p_2 dx \right\} \\
\geq \ & \frac{C_3}{m+1}(\|p_1\|_2^2 + \|p_2\|_2^2) - A_2(\|w_1\|_{H^1}^3 + \|w_2\|_{H^1}^3) \\
& - A_3(\|w_1\|_{H^1}^4 + \|w_2\|_{H^1}^4) \\
& - \frac{4\gamma E^2}{m+1}[\|p_1\|_2^2 + \|p_2\|_2^2 + \frac{1}{2}\|p_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|p_2\|_2^2]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (**4.67**) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m+1}(\|p_1\| + \|p_2\|) - \gamma\ I \geq & \frac{(C_3 - 6\gamma E^2 m)}{m+1}(\|p_1\|_2^2 + \|p_2\|_2^2) \\
& - A_2(\|w_1\|_{H^1}^3 + \|w_2\|_{H^1}^3) - A_3(\|w_1\|_{H^1}^4 + \|w_2\|_{H^1}^4)
\end{aligned}$$

halini alır. Burada m sayısı $C_3 - 6\gamma E^2 m \geq 0$ olacak şekilde, yani $m \leq \dfrac{C_3}{6\gamma E^2}$, seçilirse,

$$\frac{1}{m+1}(\|p_1\| + \|p_2\|) - \gamma\ I \geq -A_2(\|w_1\|_{H^1}^3 + \|w_2\|_{H^1}^3) - A_3(\|w_1\|_{H^1}^4 + \|w_2\|_{H^1}^4)$$

yazılabilir. Bulunan bu eşitsizlik yardımıyla (**4.65**) tekrar yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\langle L_1^+ p_1, p_1\rangle + \langle L_2^+ p_2, p_2\rangle + 2\langle L_3^+ p_1, p_2\rangle \\
&\qquad = \|p_1\| + \|p_2\| - \gamma\ I \\
&\qquad = \frac{1}{m+1}(\|p_1\| + \|p_2\|) - \gamma\ I + \frac{m}{m+1}(\|p_1\| + \|p_2\|) \\
&\qquad \geq \frac{m}{m+1}(\|p_1\| + \|p_2\|) - A_2(\|w_1\|_{H^1}^3 + \|w_2\|_{H^1}^3) \\
&\qquad - A_3(\|w_1\|_{H^1}^4 + \|w_2\|_{H^1}^4) \\
&\qquad \geq A_1(\|p_1\|_{H^1}^2 + \|p_2\|_{H^1}^2) - A_2(\|w_1\|_{H^1}^3 + \|w_2\|_{H^1}^3) \\
&\qquad - A_3(\|w_1\|_{H^1}^4 + \|w_2\|_{H^1}^4)
\end{aligned}
$$

elde edilir, yani (**4.49**) gösterilmiş olur. Burada, $m > 0$ yeterince küçük seçilmek üzere, $A_i \quad (i = 1, 2, 3)$ pozitif sayıları

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{m}{m+1}\min(1, \Omega), \quad A_2 = \frac{\max(E_1,\ E_2)}{m+1} \\
A_3 &= \frac{1}{m+1}\left(\frac{C_3}{4} + \gamma E^2 + \max(F_1,\ F_2)\right)
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanmıştır. □

Şimdi (**4.36**) ifadesindeki ilk integral terim için bir alt sınır bulunacaktır. Gösterilim kolaylığı sağlamak için bu terimin mutlak değeri $\mathcal{B}$ ile gösterilecektir. $\mathcal{B}$ için aşağıdaki üst sınır kolaylıkla

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \left| -\gamma \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)^2 + 2(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)(p_1 R_1 + p_2 R_2)\right] dx \right| \\
&\leq \frac{\gamma}{2}\int_{\mathbb{R}} (|w_1|^2 + |w_2|^2)^2 dx + 2\gamma E(\|w_1\|_\infty + \|w_2\|_\infty)(\|w_1\|_2^2 + \|w_2\|_2^2)
\end{aligned} \tag{4.68}
$$

elde edilir. Eğer $(a^2 + b^2)^2 \leq 2a^4 + 2b^4$ eşitsizliği ve $H^1(\mathbb{R})$ uzayının $L^4(\mathbb{R})$ ve $L^\infty(\mathbb{R})$ uzaylarına sürekli gömülmesi kullanılırsa, $\bar{C}_4$ ve $\bar{C}_5$ pozitif sabitler olmak üzere, (**4.68**) eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} \ &\leq\ \gamma\left(\|w_1\|_4^4 + \|w_2\|_4^4\right) + \bar{C}_4\left(\|w_1\|_{H^1}^3 + \|w_1\|_{H^1}\|w_2\|_{H^1}^2\right) \\
&\quad + \bar{C}_5\left(\|w_2\|_{H^1}^3 + \|w_2\|_{H^1}\|w_1\|_{H^1}^2\right)
\end{aligned} \tag{4.69}
$$

şeklini alır. Bu aşamada, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ özelliğine sahip $p=3$ ve $q=\dfrac{3}{2}$ sayıları için Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|w_1\|_{H^1}\|w_2\|_{H^1}^2 &\le \frac{1}{3}\|w_1\|_{H^1}^3+\frac{2}{3}\|w_2\|_{H^1}^3,\\ \|w_2\|_{H^1}\|w_1\|_{H^1}^2 &\le \frac{1}{3}\|w_2\|_{H^1}^3+\frac{2}{3}\|w_1\|_{H^1}^3\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $C_i \ \ (i=4,5,6,7)$, pozitif sabitler olmak üzere,

$$\mathcal{B} \ \le \ C_4\|w_1\|_{H^1}^3+C_5\|w_2\|_{H^1}^3+C_6\|w_1\|_{H^1}^4+C_7\|w_2\|_{H^1}^4 \qquad (\mathbf{4.70})$$

kestirimi elde edilir. Buradan da (**4.36**) ifadesindeki integral terimi için

$$\begin{aligned}&-\gamma\int\limits_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{2}(p_1^2+q_1^2+p_2^2+q_2^2)^2+2(p_1^2+q_1^2+p_2^2+q_2^2)(p_1R_1+p_2R_2)\right]dx\\ &\qquad \ge -C_4\|w_1\|_{H^1}^3-C_5\|w_2\|_{H^1}^3-C_6\|w_1\|_{H^1}^4-C_7\|w_2\|_{H^1}^4 \qquad (\mathbf{4.71})\end{aligned}$$

alt sınırı bulunur.

4.3.4.4 Yörüngesel kararlılık teoremi'nin ispatı

(**4.37**), (**4.49**) ve (**4.70**) eşitsizlikleri birleştirilerek; (**4.36**) ile verilen ΔL için bir alt sınır, w_i fonksiyonlarının H^1 normlarının bir alt sınırı cinsinden,

$$\Delta L(t) \ge g(\|w_1\|_{H^1})+g(\|w_2\|_{H^1}) \qquad (\mathbf{4.72})$$

olarak yazılır. (**4.72**) eşitsizliğindeki g fonksiyonu, a_1, a_2 ve a_3 pozitif sabitleri

$$a_1=\inf(C_1,C_2,A_1), \quad a_2=A_2+\sup(C_4,C_5), \quad a_3=A_3+\sup(C_6,C_7)$$

olarak tanımlanmak üzere, $g(x)=a_1x^2-a_2x^3-a_3x^4$ şeklindedir. $g(0)=0$ ve $x=0$ civarında $g(x)\approx a_1x^2$ olduğundan, bir $\epsilon_0>0$ sayısı ile belirlenen $[0,\epsilon_0]$ aralığında $g(x)$ artan fonksiyondur. Dolayısıyla, bu aralıkta yeteri kadar küçük bir $\epsilon>0$ sayısına karşılık gelen bir $\delta>0$ sayısı,

$$\|w_1(0)\|_{H^1}=\|\phi_0(.)-\Phi(.)\|_{H^1}\le\delta, \quad \|w_2(0)\|_{H^1}=\|\psi_0(.)-\Psi(.)\|_{H^1}\le\delta$$

iken

$$\Delta L(0) < g(\epsilon)+g(\epsilon) \qquad (\mathbf{4.73})$$

olacak şekilde bulunabilir. Diğer yandan, $L(t)$ fonksiyoneli zamandan bağımsız olup, $\Delta L(t)=\Delta L(0)$ için

$$g(\|w_1(t)\|_{H^1})+g(\|w_2(t)\|_{H^1}) \le \Delta L(t)=\Delta L(0) < g(\epsilon)+g(\epsilon)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. g fonksiyonu sürekli olduğundan, $t \in [0, \infty)$ için $\epsilon \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_0$ koşulunu sağlayan bir ϵ_1 sayısı

$$\|w_1(t)\|_{H^1} \leq \epsilon_1 \quad \text{ve} \quad \|w_2(t)\|_{H^1} \leq \epsilon_1$$

olacak şekilde bulunabilir. Böylece, 1D-LSI sisteminin $(\phi_s,\ \psi_s)$ yalnız dalga çözümlerinin yörüngesel kararlılığı gösterilmiş olur.

Son olarak, $u(x,t)$ reel bileşeni ile ilgili $\eta(x,t)$ artım fonksiyonu için, $C_8 > 0$ olmak üzere, $\|\eta\|_2 \leq C_8\epsilon$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için (**4.73**) ile verilen

$$\begin{aligned} \Delta L(t) &= A(t) + B^2(t) \\ &< 2g(\epsilon) \end{aligned} \tag{4.74}$$

eşitsizliği kullanılacaktır. Burada (**4.36**) yardımıyla A ve B^2

$$\begin{aligned} A(t) &= \langle L^- q_1, q_1\rangle + \langle L^- q_2, q_2\rangle + \langle L_1^+ p_1, p_1\rangle + \langle L_2^+ p_2, p_2\rangle + 2\langle L_3^+ p_1, p_2\rangle \\ &\quad - \gamma \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)^2 + 2(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)(p_1 R_1 + p_2 R_2)\right] dx \\ B^2(t) &= \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[\eta + \frac{2\beta}{c}(p_1 R_1 + p_2 R_2) + \frac{\beta}{c}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)\right]^2 dx \end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. $0 < \epsilon < \epsilon_0$ aralığındaki bir ϵ için $\|w_1(t)\|_{H^1} \leq C_1\epsilon$ ve $\|w_2(t)\|_{H^1} \leq C_2\epsilon$ iken, g artan fonksiyonu için $g(\|w_1(t)\|_{H^1}) > 0$ ve $g(\|w_2(t)\|_{H^1}) > 0$ olduğundan (**4.74**) eşitsizliğindeki $A(t)$ ifadesi pozitiftir: $A(t) > 0$. Buradan

$$B^2(t) = \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[\eta + \frac{2\beta}{c}(p_1 R_1 + p_2 R_2) + \frac{\beta}{c}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)\right]^2 dx < 2g(\epsilon)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $(a+b)^2 \geq \dfrac{a^2}{2} - b^2$ olması kullanılırsa

$$\frac{4}{c} g(\epsilon) \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \eta^2 dx - \frac{\beta^2}{c^2} \int_{\mathbb{R}} \left[2(R_1 p_1 + R_2 p_2) + (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)\right]^2 dx$$

bulunur. Sağ taraftaki ikinci integralde $-(a+b)^2 \geq -2(a^2+b^2)$ eşitsizliği iki kere kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{4}{c} g(\epsilon) &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \eta^2 dx - \frac{16\beta^2}{c^2} \int_{\mathbb{R}} (R_1^2 p_1^2 + R_2^2 p_2^2) dx \\ &\quad - \frac{4\beta^2}{c^2} \int_{\mathbb{R}} \left[(p_1^2 + q_1^2)^2 + (p_2^2 + q_2^2)^2\right] dx \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{8}{c}g(\epsilon) \geq \|\eta\|_2^2 - \frac{32\beta^2}{c^2}\max(\|R_1\|_\infty, \|R_2\|_\infty)(\|w_1\|_2^2 + \|w_2\|_2^2) - \frac{8\beta^2}{c^2}(\|w_1\|_4^4 + \|w_2\|_4^4) \tag{4.75}$$

yazılabilir. $H^1(\mathbb{R})$ uzayı $L^2(\mathbb{R})$ ve $L^\infty(\mathbb{R})$ uzayına sürekli olarak gömüldüğünden, pozitif ν_0 ve ν_1 sabitleri için (**4.75**) ifadesi

$$\begin{aligned} \|\eta\|_2^2 &\leq \frac{8}{c}g(\epsilon) + \frac{32\beta^2}{c^2}\nu_0 \max(\|R_1\|_\infty, \|R_2\|_\infty)(\|w_1\|_{H^1}^2 + \|w_2\|_{H^1}^2) \\ &\quad + \frac{8\beta^2}{c^2}\nu_1(\|w_1\|_{H^1}^4 + \|w_2\|_{H^1}^4) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. $\|w_1(t)\|_{H^1} \leq C_1\epsilon$ ve $\|w_2(t)\|_{H^1} \leq C_2\epsilon$ olduğundan, C_8 pozitif sabiti için

$$\|\eta\|_2 \leq C_8\epsilon$$

olur. Bu sonuç ise, 1D-LSI sisteminin yalnız dalga çözümünün u_s bileşeni için de yörüngesel kararlı olduğunu gösterir.

Böylece 1D-LSI sisteminin $(\phi_s(x,t), \psi_s(x,t), u_s(x,t))$ yalnız dalga çözümlerinin,

$$\|\phi\|_2 = \|R_1\|_2, \quad \|\psi\|_2 = \|R_2\|_2$$

koşulunu sağlayan küçük artımlar için yörüngesel kararlılığı gösterilmiş olur.

Genel artımlar için $(\phi_s(x,t), \psi_s(x,t), u_s(x,t))$ yalnız dalga çözümlerinin, yörüngesel kararlılığını göstermek amacıyla, (**3.7**) denklem sistemini sağlayan $(Q_{1\Omega}, Q_{2\Omega})$ çözümleri göz önüne alınacaktır:

$$\left.\begin{aligned} Q_{1\Omega}'' - \Omega Q_{1\Omega} + \gamma(Q_{1\Omega}^2 + Q_{2\Omega}^2)Q_{1\Omega} = 0, \\ Q_{2\Omega}'' - \Omega Q_{2\Omega} + \gamma(Q_{1\Omega}^2 + Q_{2\Omega}^2)Q_{2\Omega} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.76}$$

Burada (ϕ, ψ) ile $(Q_{1\Omega},\ Q_{2\Omega})$ fonksiyonlarının L^2-normlarının eşit olmadığı varsayılmıştır:

$$\|\phi\|_2^2 \neq \|Q_{1\Omega}\|_2^2, \quad \|\psi\|_2^2 \neq \|Q_{2\Omega}\|_2^2.$$

Bu durumda, eğer $(Q_{1\Omega}, Q_{2\Omega})$ fonksiyon çifti (**4.76**) sisteminin çözümü ise,

$$P_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}Q_{i\Omega}(\frac{x}{\sqrt{\Omega}}), \quad (i = 1, 2)$$

olarak tanımlanan fonksiyonlar

$$P_1'' - P_1 + \gamma(P_1^2 + P_2^2)P_1 = 0,$$

$$P_2'' - P_2 + \gamma(P_1^2 + P_2^2)P_2 = 0$$

sistemini sağlar. Ayrıca $Q_{i\Omega}$ ve P_i fonksiyonları arasında, $X = x\sqrt{\Omega}$ olmak üzere,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} P_i^2(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \int\limits_{\mathbb{R}} Q_{i\Omega}^2(X)dX, \quad (i = 1, 2)$$

ilişkisi mevcuttur. Diğer bir deyişle $\|Q_{i\Omega}\|_2 = \Omega^{1/4}\|P_i\|_2$ bağıntısı geçerlidir.

Aynı şekilde (**4.76**) sistemini sağlayan $(Q_{1\Omega_0}, Q_{2\Omega_0})$ fonksiyonları için de $\|Q_{i\Omega_0}\|_2 = \Omega_0^{1/4}\|P_i\|_2$ koşulu sağlanır. Burada $\Omega_0 > 0$ değeri Teorem 4.2'nin yukarıda verilmiş ispatı için gerekli

$$\|\phi\|_2 = \|Q_{1\Omega_0}\|_2, \quad \|\psi\|_2 = \|Q_{2\Omega_0}\|_2$$

koşulları sağlanacak şekilde seçilmiştir. Dolayısıyla, yukarıda ispatlanmış kararlılık teorisi $(Q_{1\Omega_0}, Q_{2\Omega_0})$ fonksiyon çifti için de geçerli olur. Öte yandan $(Q_{1\Omega}, Q_{2\Omega})$ yalnız dalga çözümünün yörüngesel kararlılığını göstermek amacıyla, verilen bir $\epsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned}
\|w_1(0)\|_{H^1} &= \|\phi_0(\cdot) - Q_{1\Omega}(\cdot)e^{i\frac{c\cdot}{2}}\|_{H^1} \leq \delta, \\
\|w_2(0)\|_{H^1} &= \|\psi_0(\cdot) - Q_{2\Omega}(\cdot)e^{i\frac{c\cdot}{2}}\|_{H^1} \leq \delta
\end{aligned}$$

iken

$$\begin{aligned}
&\inf_{\substack{x_0\in\mathbb{R} \\ \theta_1\in[0,2\pi)}} \|e^{i\theta_1}\phi(\cdot + x_0, t) - Q_{1\Omega}(\cdot)e^{i\frac{c}{2}}\|_{H^1} \leq \epsilon, \\
&\inf_{\substack{x_0\in\mathbb{R} \\ \theta_2\in[0,2\pi)}} \|e^{i\theta_2}\psi(\cdot + x_0, t) - Q_{2\Omega}(\cdot)e^{i\frac{c}{2}}\|_{H^1} \leq \epsilon
\end{aligned} \qquad (\mathbf{4.77})$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunabileceğini göstermek gerekmektedir. Bu sonuca ulaşmak için,

$$\begin{aligned}
\|e^{i\theta_1}\phi - Q_{1\Omega}(\cdot)e^{i\frac{c\cdot}{2}}\|_{H^1} &\leq \|e^{i\theta_1}\phi - Q_{1\Omega_0}(\cdot)e^{i\frac{c\cdot}{2}}\|_{H^1} \\
&\quad + \|Q_{1\Omega_0}(\cdot)e^{i\frac{c\cdot}{2}} - Q_{1\Omega}(\cdot)e^{i\frac{c\cdot}{2}}\|_{H^1} \\
\|e^{i\theta_2}\psi - Q_{2\Omega}(\cdot)e^{i\frac{c\cdot}{2}}\|_{H^1} &\leq \|e^{i\theta_2}\psi - Q_{2\Omega_0}(\cdot)e^{i\frac{c\cdot}{2}}\|_{H^1} \\
&\quad + \|Q_{2\Omega_0}(\cdot)e^{i\frac{c\cdot}{2}} - Q_{2\Omega}(\cdot)e^{i\frac{c\cdot}{2}}\|_{H^1}
\end{aligned}$$

üçgen eşitsizlikleri ve $(Q_{1\Omega_0}, Q_{2\Omega_0})$ için yukarıda ispatlanmış kararlılık sonucu kullanılacaktır. Eşitsizliklerin sağındaki ilk ifadeler, $(Q_{1\Omega_0}, Q_{2\Omega_0})$ çözümlerinin kararlı olmasından dolayı bir $\epsilon > 0$ sayısıyla üstten sınırlıdır. Kararlılık ispatının tamamlanması için $\|Q_{i\Omega} - Q_{i\Omega_0}\|_{H^1}$ terimlerinin de üstten bir $\epsilon > 0$ sayısıyla sınırlı olduğu gösterilmelidir. Genelleştirilmiş KdV denkleminin yalnız dalga çözümlerinin kararlılığının incelenmesinde takip edilen bir yaklaşım [39] kullanılarak, aranan üst sınır aşağıdaki gibi bulunacaktır.

İlk olarak $Q_{i\Omega}(x) = \sqrt{\Omega}P_i(\sqrt{\Omega}x)$ $(i = 1,2)$ tanımı ve $X = \sqrt{\Omega}x$ değişken dönüşümü kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\|Q_{i\Omega} - Q_{i\Omega_0}\|_{H^1} &= \int_{\mathbb{R}} |\sqrt{\Omega}\; P_i(\sqrt{\Omega}\; x) - \sqrt{\Omega_0}\; P_i(\sqrt{\Omega_0}\; x)|^2 dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} |\Omega\; P_i'(\sqrt{\Omega}\; x) - \Omega_0\; P_i'(\sqrt{\Omega_0}\; x)|^2 dx \\
&= \sqrt{\Omega} \int_{\mathbb{R}} |\; P_i(X) - \sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}}\; P_i(\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}}\; X)|^2 dX \\
&\quad + (\Omega)^{3/2} \int_{\mathbb{R}} |\; P_i'(X) - \frac{\Omega_0}{\Omega}\; P_i'(\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}}\; X)|^2 dX \\
&= J_1 + J_2 \qquad (i = 1,2). \qquad (\mathbf{4.78})
\end{aligned}$$

yazılabilir. Aşağıdaki ifadelerde, uygunluk için, X değişkeni x ile değiştirilmiştir. (**4.78**) ifadesinin sağındaki J_1 ve J_2 integralleri,

$$(a - \epsilon b)^2 = [\epsilon(a - b) + (1 - \epsilon)a]^2 \leq 2\epsilon^2(a - b)^2 + 2(1 - \epsilon)^2 a^2$$

eşitsizliği kullanılarak,

$$J_1 \leq \frac{2\Omega_0}{\sqrt{\Omega}} \int_{\mathbb{R}} |\; P_i(x) - \; P_i(\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}}\; x)|^2 dx + 2\sqrt{\Omega} \left(\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}} - 1 \right)^2 \int_{\mathbb{R}} |\; P_i(x)|^2 dx$$

ve

$$J_2 \leq \frac{2\Omega_0^2}{\sqrt{\Omega}} \int_{\mathbb{R}} |\; P_i'(x) - \; P_i'(\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}}\; x)|^2 dx + 2\sqrt{\Omega^3} \left(\frac{\Omega_0}{\Omega} - 1 \right)^2 \int_{\mathbb{R}} |\; P_i'(x)|^2 dx$$

olarak yazılabilir. J_1 integraline bir üst sınır bulmak için,

$$\int_{\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}}}^{1} \frac{d}{dt} P_i(tx) dt = P_i(x) - P_i(\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}}\; x)$$

eşitliği, integral hesabın esas teoremi ve Minkowski eşitsizliğinin genelleştirilmiş bir formu (Ek A) kullanılacaktır:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} | P_i(x) - P_i(\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}}x)|^2 dx &\le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}}}^{1} |\frac{d}{dt}P_i(tx)|dt \right)^2 dx \\ &\le \left\{ \int_{\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}}}^{1} \left[\int_{\mathbb{R}} |\frac{d}{dt}P_i(tx)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} dt \right\}^2 .\end{aligned}$$

Böylece $y = tx$ değişken dönüşümü ile

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} | P_i(x) - P_i(\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}}x)|^2 dx &\le \left\{ \left(\int_{\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}}}^{1} t^{-\frac{3}{2}} dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |y\frac{d}{dy}P_i(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \\ &= 4\|xP_i'(\cdot)\|_2^2 \left[\left(\frac{\Omega_0}{\Omega}\right)^{-\frac{1}{4}} - 1 \right]^2\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde J_2 terimindeki integral için de üst sınır bulunabilir:

$$\int_{\mathbb{R}} | P_i'(x) - P_i'(\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}}x)|^2 dx \quad \le 4\|xP_i''(\cdot)\|_2^2 \left[\left(\frac{\Omega_0}{\Omega}\right)^{-\frac{1}{4}} - 1 \right]^2 .$$

Böylece J_1 ve J_2 terimleri için üst sınırlar, sırasıyla,

$$J_1 \le 8\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}}(\Omega_0^{1/4} - \Omega^{1/4})^2 \|xP_i'\|_2^2 + \frac{(\sqrt{\Omega_0} - \sqrt{\Omega})^2}{\sqrt{\Omega}}\|P_i\|_2^2$$

ve

$$J_2 \le 8\sqrt{\frac{\Omega_0^3}{\Omega}}(\Omega_0^{1/4} - \Omega^{1/4})^2 \|xP_i''\|_2^2 + 2\frac{(\Omega_0 - \Omega)^2}{\sqrt{\Omega}}\|P_i'\|_2^2$$

şeklinde yazılabilir. Buradan, C_i ve D_i pozitif sabitler olmak üzere, $i = 1, 2$ için

$$\begin{aligned}\|Q_{i\Omega_0} - Q_{i\Omega}\|_{H^1} \le\ & 8\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega}} \left(\|xP_i'\|_2^2 + \Omega_0 \|xP_i''\|_2^2 \right) \ (\sqrt[4]{\Omega_0} - \sqrt[4]{\Omega})^2 \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\Omega}} \left[\|P_i\|_2^2 + (\sqrt{\Omega_0} + \sqrt{\Omega})^2 \|P_i'\|_2^2 \right] \ (\sqrt{\Omega_0} - \sqrt{\Omega})^2 \\ \le\ & C_i(\sqrt{\Omega_0}P_i)\ (\sqrt[4]{\Omega_0} - \sqrt[4]{\Omega})^2 + D_i(\sqrt{\Omega_0}P_i)\ (\sqrt{\Omega_0} - \sqrt{\Omega})^2\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeyi sınırlamak için sadece $|\sqrt{\Omega_0} - \sqrt{\Omega}|$ terimini sınırlamak yeterlidir. Bunun için, $\delta > 0$ sayısının küçük değerleri için $|\sqrt{\Omega_0} - \sqrt{\Omega}| \le C\delta$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabitinin var olduğunu göstermek yeterli olur. Dikkat edilirse,

$$\sqrt{\Omega_0} = \frac{\|Q_{i\Omega_0}\|_2^2}{\|P_i\|_2^2} = \frac{\|\phi_0\|_2^2}{\|P_1\|_2^2} = \frac{\|\psi_0\|_2^2}{\|P_2\|_2^2}, \quad \sqrt{\Omega} = \frac{\|Q_{i\Omega}\|_2^2}{\|P_i\|_2^2},$$

tanımları kullanılarak

$$|\sqrt{\Omega_0} - \sqrt{\Omega}| = \frac{1}{\|P_1\|_2^2} \left| \ \|\phi_0(.)\|_2^2 - \|Q_{1\Omega}(.)e^{\frac{ic.}{2}}\|_2^2 \ \right| \qquad (\mathbf{4.79})$$

yazılabilir. ($\mathbf{4.79}$) ifadesini düzenlemek için, aşağıdaki eşitsizlik kullanılacaktır:

$$\begin{aligned} ||a|^2 - |b|^2| &\leq |a-b|(|a|+|b|) \\ &\leq 2|a|\ |a-b| + |a-b|^2 \\ &\leq (1+\frac{1}{\delta})|a-b|^2 + \delta|a|^2. \end{aligned}$$

Ayrıca, $\|\phi_0(.) - Q_{1\Omega}(.)e^{\frac{ic.}{2}}\|_2^2 \leq \delta$ olduğundan

$$\begin{aligned} |\sqrt{\Omega_0} - \sqrt{\Omega}| \quad &\leq \frac{1}{\|P_1\|_2^2}\left(\delta\|\phi_0(.)\|_2^2 + (1+\frac{1}{\delta})\|\phi_0(.) - Q_{1\Omega}(.)e^{\frac{ic.}{2}}\|_2^2\right) \\ &\leq \frac{1}{\|P_1\|_2^2}\left(\delta\sqrt{\Omega}\|P_1\|_2^2 + \delta^2 + \delta\right) \\ &\leq C(\Omega, P_i)\delta \end{aligned}$$

bulunur. Benzer bir eşitsizlik $|\sqrt[4]{\Omega_0} - \sqrt[4]{\Omega}|$ terimi için de bulunabilir. Bu sonuç ile, genel artımlar için de 1D-LSI sisteminin (ϕ_s, ψ_s, u_s) yalnız dalga çözümlerinin yörüngesel kararlılığı ispatlanmış olur.

5. İKİ BOYUTLU LSI DENKLEMLERİ İÇİN YALNIZ DALGA ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

5.1 Giriş

Bu bölümde 2D-LSI denklemleri için iki boyutlu yalnız dalga çözümlerinin varlığı tartışılacaktır. İlk olarak Altbölüm 5.2'de 2D-LSI denkleminin iki boyutlu yalnız dalga çözümleri sunulacaktır. Daha sonra Altbölüm 5.3'de, γ parametresinin negatif olduğu durumda iki boyutlu yalnız dalga çözümlerinin mevcut olmadığı ve Altbölüm 5.4'te, γ parametresinin pozitif değerleri için iki boyutlu yalnız dalga çözümlerinin var olduğu ispatlanacaktır.

5.2 2D-LSI Denklemleri İçin İki Boyutlu Yalnız Dalga Çözümleri

Bu bölümde (**2.6**) 2D-LSI denklemlerinin

$$\phi = e^{i(\omega t+\alpha x)}\Phi(x+ct, y+bt), \tag{5.1}$$

$$u = U(x+ct, y+bt) \tag{5.2}$$

şeklindeki yerel yalnız dalga çözümleri göz önüne alınacaktır. Burada $\omega \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ olup, $\Phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ve $\nabla U \in L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(\xi,\eta) \;\to\; \infty \;\text{ iken }\; U(\xi,\eta), \nabla U(\xi,\eta) \;\to\; 0$$

koşulunu sağlayan gerçel değerli fonksiyonlardır.

Eğer (**5.1**)-(**5.2**) yalnız dalga çözümleri (**2.6**) denklemlerine yerleştirilirse, 2D-LSI denklemleri

$$\Phi_{xx} - (\omega+\alpha^2)\Phi = \Phi U_x, \tag{5.3}$$

$$(c+2\alpha)\Phi_x + b\Phi_y = 0, \tag{5.4}$$

$$cU_{xx} + bU_{xy} + \gamma U_{yy} = -(\Phi^2)_x \tag{5.5}$$

şeklini alır. (**5.4**) denklemi Φ fonksiyonunun

$$bx - (c+2\alpha)y = \text{sabit} \tag{5.6}$$

karakteristik doğruları üzerinde sabit olduğunu belirtir. $\Phi \in H^1$ özelliğine sahip bir fonksiyon için bu koşul ancak ve ancak

$$\alpha = -\frac{c}{2}, \qquad b = 0$$

olmasıyla mümkündür. Böylece (**5.1**)-(**5.2**) yalnız dalga çözümleri

$$\phi = e^{i(\omega t - \frac{c}{2}x)}\Phi(x + ct, y) \tag{5.7}$$

$$u = U(x + ct, y) \tag{5.8}$$

şekline dönüşür. Eğer $\tilde{\omega} = \omega + c^2/4$ tanımı yapılırsa, (**5.3**) ve (**5.5**) denklemleri

$$\Phi_{xx} - \tilde{\omega}\Phi = \Phi U_x, \tag{5.9}$$

$$cU_{xx} + \gamma U_{yy} = -(\Phi^2)_x \tag{5.10}$$

denklemlerine indirgenir. Aşağıda, Altbölüm 5.3'te verilen Teorem 5.2'de, eğer $\gamma < 0$ ise, (**5.9**)-(**5.10**) denklemlerinin çözümlerinin var olmadığı ispat edilecektir. Ayrıca, Altbölüm 5.4'te, eğer $\gamma > 0$ ise, bu denklemlerin çözümlerinin var olduğu ispatlanacaktır. Yalnız dalga çözümlerinin hem varlığının hem de var olmadığının ispatı Pohozaev tipi özdeşlikler üzerine kurulmuştur. Yalnız dalga çözümlerinin varlık ispatının, bir yerel olmayan terim içeren tek ikinci mertebe kısmi türevli diferansiyel denklem için aşikar olmayan çözümlerin varlığını ispatlamaya indirgendiği gösterilecektir.

Uyarı 1. Eğer bir boyutlu $\Phi = \Phi(x)$, $U = U(x)$ durumu gözönüne alınırsa, (**5.9**) ve (**5.10**) denklemleri

$$\Phi'' - \tilde{\omega}\Phi + \frac{1}{c}\Phi^3 = 0, \tag{5.11}$$

şeklinde tek bir denkleme indirgenir. Burada $x \to \infty$ iken Φ, $U' \to 0$ olduğu varsayılmıştır. (**5.11**) denkleminin $x \to \mp\infty$ iken $\Phi, \Phi' \to 0$ koşulu ile çözümü

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= \sqrt{2c\tilde{\omega}}\operatorname{sech}(\sqrt{\tilde{\omega}}(x - ct))e^{i(\omega t - \frac{c}{2}x)} \\ u(x,t) &= -2\sqrt{\tilde{\omega}}\tanh(\sqrt{\tilde{\omega}}(x - ct)) \end{aligned} \tag{5.12}$$

bir boyutlu yalnız dalga çözümlerini verir.

5.3 Yalnız Dalgaların Var Olmadığının İspatı: $\gamma < 0$ Durumu

İlk olarak, yalnız dalga çözümlerinin var olmadığının ispatında kullanılacak olan Pohozaev tipi özdeşlikler türetilecektir.

Lemma 5.1. (ϕ, u) fonksiyonları (**2.6**) denklemlerinin (**5.7**)-(**5.8**) formundaki yalnız dalga çözümleri olsun. Bu durumda, $\Phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $\nabla U \in L^2(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere, Φ ve U fonksiyonları

$$\int_{\mathbb{R}^2} [(\Phi_x)^2 - \tilde{\omega}\Phi^2 + \frac{c}{2}(U_x)^2 - \frac{\gamma}{2}(U_y)^2] dxdy = 0, \qquad \textbf{(5.13)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} [(\Phi_x)^2 + \tilde{\omega}\Phi^2 - \frac{c}{2}(U_x)^2 - \frac{3\gamma}{2}(U_y)^2] dxdy = 0, \qquad \textbf{(5.14)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} [(\Phi_x)^2 + \tilde{\omega}\Phi^2 - c(U_x)^2 - \gamma(U_y)^2] dxdy = 0 \qquad \textbf{(5.15)}$$

özdeşliklerini sağlarlar.

İspat. Bu özdeşlikler bazı cebirsel hesaplamalar ve kısmi integrasyon işlemleri yardımıyla elde edilmiştir. (**5.13**) özdeşliğini türetmek için, (**5.9**) denklemi $x\Phi_x$ ile çarpılır ve (**5.10**) kullanılırsa

$$x\Phi_x\Phi_{xx} - \tilde{\omega}x\Phi\Phi_x = -\frac{c}{2}xU_xU_{xx} - \frac{\gamma}{2}xU_xU_{yy}$$

bulunur. Elde edilen eşitlik $\mathbb{R}^2$ üzerinde integre edilir,

$$\int_{\mathbb{R}^2} xU_xU_{yy} dxdy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (U_y)^2 dxdy$$

denklemi kullanılır ve kısmi integrasyon işlemi iki kere uygulanılırsa (**5.13**) özdeşliği elde edilir. Benzer şekilde (**5.14**) özdeşliğini türetmek için (**5.9**) denklemi $y\Phi_y$ ile çarpılır ve elde edilen denklem $\mathbb{R}^2$ üzerinde integre edilir. Burada

$$\int_{\mathbb{R}^2} y\Phi_y\Phi_{xx} dxdy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\Phi_x)^2 dxdy,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} y\Phi^2 U_{xy} dxdy = \frac{c}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (U_x)^2 dxdy - \frac{\gamma}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (U_y)^2 dxdy,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} yU_yU_{xx} dxdy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (U_x)^2 dxdy$$

denklemleri kullanılarak ve kısmi integrasyon işlemi bir kaç kere uygulanarak (**5.14**) özdeşliği elde edilir. Son olarak, eğer (**5.9**) denklemi Φ ile çarpılır, elde edilen denklem $\mathbb{R}^2$ üzerinde integre edilir, bir kere kısmi integrasyon işlemi uygulanır ve (**5.10**) denklemi kullanılırsa (**5.15**) özdeşliği elde edilir.

Teorem 5.2. Eğer *(i)* $\gamma < 0$ veya *(ii)* $\gamma > 0$ fakat $c < 0$ veya $\tilde{\omega} < 0$ ise; (**2.6**) 2D-LSI denklemlerinin (**5.7**)-(**5.8**) formunda, aşikar olmayan, bir yalnız dalga çözümü yoktur.

İspat. (**5.13**) ve (**5.14**) özdeşliklerinin toplanması ve (**5.15**) özdeşliğinin (**5.14**) özdeşliğinden çıkarılması, sırasıyla,

$$\int_{\mathbb{R}^2} [(\Phi_x)^2 - \gamma (U_y)^2] dxdy = 0 \tag{5.16}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\frac{c}{2}(U_x)^2 - \frac{\gamma}{2}(U_y)^2] dxdy = 0 \tag{5.17}$$

denklemlerini verir. Bu durumda (**5.13**) özdeşliği (**5.17**) yardımıyla

$$\int_{\mathbb{R}^2} [(\Phi_x)^2 - \tilde{\omega}\Phi^2] dxdy = 0 \tag{5.18}$$

halini alır. (**5.16**) özdeşliği eğer $\gamma < 0$ ise, sadece aşikar çözümün mevcut olduğunu ifade eder. Benzer şekilde, (**5.17**) özdeşliği, eğer $\gamma c < 0$ ise sadece aşikar çözümün mevcut olduğunu ifade eder. Son olarak (**5.18**) özdeşliği, $\tilde{\omega} < 0$ ise sadece aşikar çözümün mevcut olduğunu ifade eder. Bu sonuçlar şu şekilde de ifade edilebilir: *(i)* Eğer $\gamma < 0$ ise yalnız dalga çözümü mevcut değildir. *(ii)* Eğer $\gamma > 0$ ise $c < 0$ veya $\tilde{\omega} < 0$ durumlarında yalnız dalga çözümü mevcut değildir.$\square$

Yukarıda ifade edilen teoremin $\gamma > 0$, $c > 0$ ve $\tilde{\omega} > 0$ durumu için herhangi bir sonuç içermediğine, yani 2D-LSI denklemlerinin bütün mümkün durumları için (**5.7**)-(**5.8**) formunda yalnız dalga çözümlerinin mevcut olmadığına dair herhangi bir sonuç içermediğine, dikkat edilmelidir.

Uyarı 2. Teorem 5.2'de ifade edilen sonucun $c = 0$ değerini de kapsadığına, yani 2D-LSI denklemlerinin $\phi = e^{i\omega t}\Phi(x, y)$, $u = U(x, y)$ formunda aşikar olmayan, duran dalga çözümlerine de sahip olmadığına dikkat edilmelidir. Ayrıca, $\gamma < 0$ durumunda hem sağa giden yalnız dalgaların hem de sola giden yalnız dalgaların mevcut olmadığına ve $\gamma > 0$ durumunda ise sadece sağa giden yalnız dalgaların mevcut olmadığına dikkat edilmelidir.

Uyarı 3. Teorem 5.2'deki yalnız dalgaların mevcut olmamasıyla ilgili sonuç [7]'de verilmiş iki boyutlu ancak lokalize olmayan yalnız dalga çözümleriyle uyumludur. Çünkü [7]'de ifade edilen yalnız dalga çözümleri $L^2(\mathbb{R}^2)$'de değildir ve bu teoremin çerçevesi içerisinde düşünülmemelidir.

Uyarı 4. Teorem 5.2'deki yalnız dalgaların mevcut olmamasıyla ilgili sonuç (**5.12**) denklemleriyle verilen bir boyutlu yalnız dalga çözümleriyle çelişmez. Bir boyutlu yalnız dalga çözümleri y değişkenine bağlı olmadığından $L^2(\mathbb{R}^2)$'de değildir ve bu nedenle Teorem 5.2.'nin kapsamı içinde düşünülmemelidir.

5.4 Yalnız Dalgaların Varlığının İspatı: $\gamma > 0$ Durumu

Yukarıdaki altbölümde, ancak parametrelerin $\gamma > 0$, $c > 0$ ve $\tilde{\omega} > 0$ koşullarını sağlaması durumunda yalnız dalga çözümlerinin varlığının sözkonusu olabileceği belirtilmişti. Bu altbölümde, belirtilen kısıtlamalar altında (**5.7**)-(**5.8**) yalnız dalga çözümlerinin varlığı ispatlanacaktır.

Eğer (**5.10**) denkleminin Fourier dönüşümü alınırsa, $\mathcal{F}$ ile Fourier dönüşümü gösterilmek ve $\hat{\Lambda} = \mathcal{F}(\Phi^2)$ olmak üzere

$$\hat{U}(k_1, k_2) = \frac{ik_1}{ck_1^2 + \gamma k_2^2}\hat{\Lambda}(k_1, k_2)$$

elde edilir. Burada k_1 ve k_2 Fourier değişkenleri olup, $\hat{}$ işareti ile ilgili büyüklüğün Fourier dönüşümü gösterilir. Böylece, $\mathcal{K}$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{K}(v)\} = \alpha(k_1, k_2)\hat{v}(k_1, k_2) \qquad \textbf{(5.19)}$$

şeklinde tanımlanmış yerel olmayan bir operatör olmak üzere,

$$U_x = -\mathcal{K}(\Phi^2)$$

yazılabilir. Burada

$$\alpha(k_1, k_2) = \frac{k_1^2}{ck_1^2 + \gamma k_2^2}$$

tanımı yapılmıştır. Bu durumda (**5.9**) denklemi

$$\Phi_{xx} - \tilde{\omega}\Phi + \mathcal{K}(\Phi^2)\Phi = 0 \qquad \textbf{(5.20)}$$

yerel olmayan denklemine dönüşür. Aşağıdaki işlemlerde gösterilim kolaylığı sağlamak için, $L^2(\mathbb{R}^2)$ üzerinde bir $\mathcal{B}$ kuadratik fonksiyoneli tanımlanacaktır:

$$\mathcal{B}(v) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathcal{K}(v(x,y))v(x,y)dxdy \equiv \langle \mathcal{K}(v), v\rangle$$

veya

$$\mathcal{B}(\Phi^2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Phi^2\mathcal{K}(\Phi^2)dxdy.$$

Lemma 5.3. $(\phi,\ u)$ fonksiyonları (**2.6**) 2D-LSI denklemlerinin (**5.7**)-(**5.8**) formundaki yalnız dalga çözümleri olsun. Bu durumda, $\Phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $\nabla U \in L^2(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere, Φ ve U fonksiyonları

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}[(\Phi_x)^2 - \tilde{\omega}\Phi^2]dxdy + \mathcal{B}(\Phi^2) - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(\hat{\Lambda})^2\frac{\partial}{\partial k_1}(k_1\alpha)dk_1dk_2 = 0, \qquad (\mathbf{5.21})$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}[(\Phi_x)^2 + \tilde{\omega}\Phi^2]dxdy - \mathcal{B}(\Phi^2) + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(\hat{\Lambda})^2\frac{\partial}{\partial k_2}(k_2\alpha)dk_1dk_2 = 0, \qquad (\mathbf{5.22})$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}[(\Phi_x)^2 + \tilde{\omega}\Phi^2]dxdy - \mathcal{B}(\Phi^2) = 0 \qquad (\mathbf{5.23})$$

özdeşliklerini sağlarlar.

İspat. Bu özdeşlikler bazı cebirsel hesaplamalar ve kısmi integrasyon yardımıyla elde edilmiştir. (**5.21**) özdeşliğini türetmek için, (**5.20**) denklemi $x\Phi_x$ ile çarpılır, $\mathbb{R}^2$ üzerinde integre edilir ve kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}[(\Phi_x)^2 - \tilde{\omega}\Phi^2]dxdy + \mathcal{B}(\Phi^2) + \int\limits_{\mathbb{R}^2} x\Phi^2[\mathcal{K}(\Phi^2)]_x dxdy = 0$$

elde edilir. Son terimde Parseval teoremi kullanılır ve Fourier uzayında kısmi integrasyon uygulanırsa (**5.21**) özdeşliği elde edilir. Benzer şekilde (**5.22**) özdeşliğini türetmek için (**5.20**) denklemi $y\Phi_y$ ile çarpılır, $\mathbb{R}^2$ üzerinde integre edilir ve kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}[(\Phi_x)^2 + \tilde{\omega}\Phi^2]dxdy - \mathcal{B}(\Phi^2) - \int\limits_{\mathbb{R}^2} y\Phi^2[\mathcal{K}(\Phi^2)]_y dxdy = 0$$

elde edilir. Son terimde Parseval teoremi kullanılır ve Fourier uzayında kısmi integrasyon uygulanırsa (**5.22**) özdeşliği elde edilir. Son olarak, (**5.20**) denklemi Φ ile çarpılır, $\mathbb{R}^2$ üzerinde integre edilir ve kısmi integrasyon işlemi bir kere uygulanırsa (**5.23**) özdeşliğini elde edilir. $\square$

Lemma 5.4. $\mathcal{B}(\Phi^2) > 0$.

İspat. (**5.22**) özdeşliği (**5.21**) özdeşliğinden çıkarılır ve

$$k_1 \frac{\partial \alpha}{\partial k_1} + k_2 \frac{\partial \alpha}{\partial k_2} = 0$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial k_1}(k_1 \alpha) + \frac{\partial}{\partial k_2}(k_2 \alpha) = 2\alpha$$

özdeşliği kullanılırsa,

$$\mathcal{B}(\Phi^2) = 2\tilde{\omega} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Phi^2 dxdy = 2\tilde{\omega}\langle \Phi, \Phi \rangle \tag{5.24}$$

elde edilir. Bu eşitlik, $\tilde{\omega} > 0$ olması nedeniyle, $\mathcal{B}(\Phi^2) > 0$ olduğunu ifade eder. $\square$

Uyarı 5. Eğer (**5.24**) sonucu (**5.23**) Pohozaev özdeşliğinde kullanılırsa,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} (\Phi_x)^2 dxdy = \tilde{\omega} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Phi^2 dxdy$$

veya

$$\tilde{\omega}\langle \Phi, \Phi \rangle = \langle \Phi_x, \Phi_x \rangle \tag{5.25}$$

özdeşliği elde edilir.

Şimdi (**5.24**) ve (**5.25**) özdeşlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} J(\Phi) &= \frac{\|\Phi\|_2^2 \|\Phi_x\|_2^2}{\mathcal{B}(\Phi^2)} = \frac{\|\Phi\|_2^2 \|\Phi_x\|_2^2}{\langle \mathcal{K}(\Phi^2), \Phi^2 \rangle} \\ &= \frac{(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Phi^2 dxdy)(\int\limits_{\mathbb{R}^2} (\Phi_x)^2 dxdy)}{\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Phi^2 \mathcal{K}(\Phi^2) dxdy} \end{aligned} \tag{5.26}$$

ile tanımlanan fonksiyonele karşılık gelen varyasyonel problemin Euler-Lagrange denkleminin (**5.20**) denklemi olduğu gösterilecektir. Eğer Φ fonksiyonu J fonksiyonelini minumum yapan bir fonksiyon ise, o zaman J fonksiyonelinin birinci varyasyonu sıfır olmalıdır: $\delta J = 0$. Fonksiyonelin paydasındaki terimin türevini hesaplamak için, $\mathcal{B}'(v)$ ile $\mathcal{B}(v)$ fonksiyonelinin Frechet türevini göstermek üzere, fonksiyonelin

$$\delta \mathcal{B}(v) = \langle \mathcal{B}'(v), \eta \rangle$$

veya

$$\delta\mathcal{B}(\Phi^2) = \langle 2\Phi\mathcal{B}'(\Phi^2), \eta\rangle$$

şeklindeki birinci varyasyonunu hesaplamak gerekir.

Lemma 5.5.

$$\langle \mathcal{B}'(v), \eta\rangle = \langle 2\mathcal{K}(v), \eta\rangle$$

veya

$$\langle 2\Phi\mathcal{B}'(\Phi^2), \eta\rangle = \langle 4\Phi\mathcal{K}(\Phi^2), \eta\rangle.$$

İspat. Eğer

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\mathcal{B}(v+h) - \mathcal{B}(v) - \mathcal{A}(h)\|}{\|h\|} = 0$$

olacak şekilde bir sınırlı $\mathcal{A}$ operatörü varsa, o zaman $\mathcal{B}(v)$ fonksiyonelinin Frechet türevi $\mathcal{A}(h) = \langle \mathcal{B}'(v), h\rangle$ şeklinde gösterilir. Eşdeğer bir tanım

$$\|\mathcal{B}(v+h) - \mathcal{B}(v) - \mathcal{A}(h)\| \leq M\|h\|^2$$

eşitsizliği ile verilebilir [40]. Eğer

$$\mathcal{B}(v+h) - \mathcal{B}(v) = \langle \mathcal{K}(v+h), v+h\rangle - \langle \mathcal{K}(v), v\rangle$$

ifadesinde Parseval özdeşliği ve Fourier dönüşümünün doğrusal olması kullanılırsa,

$$\mathcal{B}(v+h) - \mathcal{B}(v) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \alpha(\hat{v}^2 + 2\hat{v}\hat{h} + \hat{h}^2)dk_1dk_2 - \int\limits_{\mathbb{R}^2} \alpha\hat{v}^2 dk_1dk_2$$

veya

$$\mathcal{B}(v+h) - \mathcal{B}(v) - 2\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathcal{K}(v)h dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \alpha\hat{h}^2 dk_1dk_2$$

elde edilir. Eğer burada $0 \leq \alpha(k_1, k_2) \leq 1/c$ kullanılırsa,

$$\|\mathcal{B}(v+h) - \mathcal{B}(v) - \langle 2\mathcal{K}(v), h\rangle\| \leq \frac{1}{c}\|h\|^2$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. □

J fonksiyonelini minumum yapan Φ fonksiyonu için, fonksiyonelin birinci varyasyonu özdeş olarak sıfır olup

$$\delta J = \frac{1}{[\mathcal{B}(\Phi^2)]^2}\big\{2[\langle\Phi,\Phi\rangle\langle\Phi_x,\eta_x\rangle + \langle\Phi_x,\Phi_x\rangle\langle\Phi,\eta\rangle]\langle\mathcal{K}(\Phi^2),\Phi^2\rangle$$
$$-4\langle\Phi,\Phi\rangle\langle\Phi_x,\Phi_x\rangle\langle\Phi\mathcal{K}(\Phi^2),\eta\rangle\big\} = 0 \qquad \textbf{(5.27)}$$

şeklindedir. Eğer (**5.24**) ve (**5.25**) özdeşlikleri (**5.27**) ifadesinde kullanılırsa,

$$\delta J = \frac{4\tilde{\omega}\langle \Phi, \Phi \rangle^2}{\langle \mathcal{K}(\Phi^2), \Phi^2 \rangle^2} \left\{ \langle \Phi_x, \eta_x \rangle + \tilde{\omega} \langle \Phi, \eta \rangle - \langle \Phi \mathcal{K}(\Phi^2), \eta \rangle \right\} = 0$$

veya

$$\delta J = \frac{-4\tilde{\omega}\langle \Phi, \Phi \rangle^2}{\langle \mathcal{K}(\Phi^2), \Phi^2 \rangle^2} \left\{ \langle \Phi_{xx} - \tilde{\omega}\Phi + \Phi \mathcal{K}(\Phi^2), \eta \rangle \right\} = 0$$

elde edilir. Bu sonuç (**5.20**) denkleminin J fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemi olduğunu gösterir. Böylece, 2D-LSI denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin varlığı problemi, J doğrusal olmayan fonksiyonelinin minimumunun varlığı problemine indirgenmiş olur.

(**5.20**) yerel olmayan denklemi literatürde incelenmiş olan [28, 41]

$$\triangle \Phi - \tilde{\omega}\Phi + \kappa \Phi^3 + b\mathcal{K}(\Phi^2)\Phi = 0, \quad \Phi \in H^1(\mathbb{R}^2) \tag{5.28}$$

yarı-doğrusal eliptik kısmi türevli diferansiyel denkleminin bir özel haline karşılık gelir. Burada $\triangle$ iki boyutlu uzayda Laplace operatörünü, $\mathcal{K}(\Phi^2)$ ise yerel olmayan etkileri gösteren bir operatördür. $\mathcal{K}(\Phi^2)$ operatörünün Fourier uzayındaki gösterilimi (**5.19**) ile tanımlanmıştır. (**5.28**) denklemi Davey-Stewartson (DS) [41] ve genelleştirilmiş Davey-Stewartson (GDS) [28] denklemlerinin duran dalga çözümlerinin varlığının çalışılması sırasında ortaya çıkmıştır. $\alpha(k_1, k_2)$ sembolü DS sistemi ve GDS sistemi için, sırasıyla,

$$\alpha(k_1, k_2) = \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2}$$

ve λ_1, m_1, m_2, n reel sabitler olmak üzere

$$\alpha(k_1, k_2) = \frac{\lambda k_1^4 + (1 + m_1 - 2n)k_1^2 k_2^2 + m_2 k_2^4}{(\lambda k_1^2 + m_2 k_2^2)(k_1^2 + m_1 k_2^2)}$$

şeklinde tanımlanır. [41]'de Lions'un Konsantrasyon-Kompaktlık yöntemi kullanılarak, $\tilde{\omega} > 0$ ve $\kappa + b\alpha_m > 0$ olması durumunda çözümlerin varlığı ispat edilmiştir. Burada α_m ile α sembolünün üst sınır gösterilir. Aynı sonuç Lieb'in Kompaktlık Lemması kullanılarak [28]'de de elde edilmiştir. (**5.20**) yerel olmayan denklemi (**5.28**) denkleminin bir özel hali olduğu için, yukarıda ifade edilen sonuç, $\kappa = 0$ ve $b = 1$ ile (**5.20**) denklemi için de geçerlidir. Diğer bir deyişle, $\tilde{\omega} > 0$ ve $\alpha_m = \dfrac{1}{c} > 0$ olduğundan (**5.20**) denkleminin aşikar olmayan çözümleri mevcuttur. Yani, $\gamma > 0$, $\tilde{\omega} > 0$ ve $c > 0$ durumunda 2D-LSI denklemlerinin aşikar olmayan lokalize olmuş yalnız dalga çözümleri mevcuttur.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, uzun dalga-kısa dalga etkileşimini temsil eden bir boyutlu üç kuple denklemden oluşan 1D-LSI sistemi ve iki boyutlu iki kuple denklemden oluşan 2D-LSI sistemi için yalnız dalga çözümlerinin bazı özellikleri incelenmiştir. Çalışmada esas olarak üç temel sonuç elde edilmiştir. Birinci temel sonuç Bölüm 3'te elde edilmiş olup şu şekilde ifade edilebilir: 1D-LSI denklem sisteminin yalnız dalga çözümlerinin varlığı, bir varyasyonel problem tanımlanarak, gösterilmiştir. Bu bölümdeki içerik bir makale haline getirilmiş ve incelenmek üzere gönderilmiştir. İkinci temel sonuç Bölüm 4'te elde edilmiş olup, yine 1D-LSI denklem sisteminin yalnız dalga çözümlerinin yörüngesel kararlı olduğunun gösterilmesini içerir. Bu konu ile ilgili çalışmalar da ayrı bir makale haline getirilip yayınlanmak üzere gönderilme aşamasındadır. Üçüncü temel sonuç Bölüm 5'te türetilmiş olup, 2D-LSI denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin varlığı hakkındadır. Enine dispersif etkileri karakterize eden γ parametresinin negatif olması durumunda lokalize olmuş iki boyutlu yalnız dalga çözümlerinin mevcut olmadığı ve bu parametrenin pozitif olması durumunda lokalize olmuş yalnız dalga çözümlerinin var olduğu ispatlanmıştır. Bu sonuç ile ilgili çalışmalar bir makale haline getirilme aşamasındadır. Hem 1D-LSI hem de 2D-LSI denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin varlığı ile ilgili sonuçlar, Pohozaev tipindeki özdeşlikler ve varyasyonel yöntem kullanılarak elde edilmiştir. Yalnız dalgaların yörüngesel kararlılığı probleminde ise Lyapunov yöntemi kullanılmıştır: İlk olarak 1D-LSI sisteminin korunan büyüklükleri yardımıyla bir Lyapunov fonksiyoneli tanımlanmış ve daha sonra Lyapunov fonksiyonelindeki değişimin hem alttan hem de üstten sınırlı olduğu gösterilerek yalnız dalgaların yörüngesel kararlılığı ispatlanmıştır.

Bu tez çalışmasının devamı olarak üç ayrı konuda araştırmaların sürdürülmesi planlanmakta olup, bunların bazılarında ilk kısmi neticeler elde edilmiştir. İlk olarak, üç bileşenli 1D-LSI denklemlerinin iyi tanımlılığı probleminin incelenmesi planlanmaktadır. İkinci olarak, iki bileşenli 2D-LSI denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin yörüngesel kararlılığının incelenmesi, diğer bir deyişle bir boyutlu yalnız dalgalar için Bölüm 4'te gerçekleştirilen araştırmanın iki boyutlu hale genişletilmesi, düşünülmektedir. Üçüncü olarak, iki boyutlu ve iki bileşenli 2D-LSI denklemleri için bir boyutlu yalnız dalga çözümlerinin enine kararlı olup olmadığı sorusu cevaplandırılmaya çalışılacaktır.

KAYNAKLAR

[1] **Whitham, G. B.**, 1974. *Linear and nonlinear waves*, New York: John Wiley.

[2] **Ma, Y. C.**, 1981. The resonant interaction among long and short waves, *Wave Motion*, **3**, 257–267.

[3] **Craik, A. D. D.**, 1985. *Wave interactions and fluid flows*, Cambridge University Press.

[4] **Erbay, S.**, 2000. Nonlinear interaction between long and short waves in a generalized elastic solid, *Chaos Solitons Fractals*, **11**, 1789–1798.

[5] **Sulem, C., Sulem, P. L.**, 1999. *The Nonlinear Schrödinger Equation Self-Focusing and Wave Collapse*, New York: Springer.

[6] **Colin, T., Lannes, D.**, 2001. Long-wave short-wave resonance for nonlinear geometric optics, *Duke Math. J.*, **107**, 351–419.

[7] **Babaoglu, C.**, 2008. Long-wave short-wave resonance case for a generalized Davey-Stewartson system, *Chaos Solitons Fractals.*, **38**, 48–54.

[8] **Djordjevic, V. D., Redekopp, L. G.**, 1977. 2-Dimensional packets of capillary-gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **79**, 703–714.

[9] **Tsutsumi, M., Hatano, S.**, 1994. Well-posedness of the Cauchy problem for the long wave-short wave resonance equations, *Nonlinear Anal.*, **22**, 155–171.

[10] **Tsutsumi, M., Hatano, S.**, 1994. Well-posedness of the Cauchy problem for Benney's first equations of long wave short wave interactions, *Funkcial. Ekvac.*, **37**, 289–316.

[11] **Laurençot, P. H.**, 1995. On a nonlinear Schrödinger equation arising in the theory of water waves, *Nonlinear Anal.*, **24**, 509–527.

[12] **Borluk, H.**, **Muslu, G. M., Erbay, H. A.**, 2007. A numerical study of the long wave-short wave interaction equations, *Math. Comput. Simulation*, **74**, 113–125.

[13] **Gelfand, I. M., Fomin, S. V.**, 1963. *Calculus of variations*, Englewood Cliffs : Prentice-Halls.

[14] **Strauss, W. A.**, 1977. Existence of solitary waves in higher dimensions, *Comm. Math. Phys.*, **55**, 149–162.

[15] **Coleman, S.**, **Glaser, V.**, **Martin, A.**, 1978. Action minima among solutions to a class of Euclidean field equations, *Comm. Math. Phys.*, **58**, 211–221.

[16] **Berestycki, H.**, **Lions, P. L.**, 1983. Nonlinear scaler field equations I, existence of a ground-state, *Arch. Ration Mech. Anal.*, **82**, 313–345.

[17] **Esteban, M. J.**, 1980. Existence d'une infinité d'ondes solitaires pour des équatios des champs non linéaires, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, **2**, 181–191.

[18] **Berestycki, H.**, **Gallouet, T.**, **Kavian, O.**, 1983. Non-Linear Euclidean scalar field-equations in the plane, *C. R. Acad. Sc. Serie I-Mathematique*, **297**, 307–310.

[19] **Weinstein, M. I.**, 1983. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, *Comm. Math. Phys.*, **87**, 567–576.

[20] **Weinstein, M. I.**, 1986. Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **39**, 51–67.

[21] **Cipolatti, R.**, **Zumpichiatti, W.**, 2000. Orbital stable standing waves for a system of coupled nonlinear Schrödinger equations, *Nonlinear Anal.*, **42**, 445–461.

[22] **Lin, T. C.**, **Wei, J.**, 2005. Ground state of N coupled nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^n, n \leq 3$, *Comm. Math. Phys.*, **255**, 629–653.

[23] **Maia, L. A.**, **Montefusco, E.**, **Pellacci, B.**, 2006. Positive solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger system, *J. Differential Equations*, **229**, 743–767.

[24] **Ambrosetti, A.**, **Colorado, E.**, 2006. Bound and ground states of coupled nonlinear Schrödinger equations, *C. R. Mathematique*, **342**, 453–458.

[25] **Figueiredo, D. G. D.**, **Lopes, O.**, 2008. Solitary waves for some nonlinear Schrödinger systems, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **25**, 149–161.

[26] **Colin, T.**, **Weinstein, M.I.**, 1996. On the ground states of vector nonlinear Schrödinger equations, *Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Non Linéaire*, **65**, 57–79.

[27] **Papanicolaou, G. C.**, **Sulem, C.**, **Sulem, P. L.**, **Wang, X. P.**, 1994. The focussing singularity of the Davey-Stewartson equations for gravity-capillarity surface waves, *Phys. D*, **72**, 61–86.

[28] **Eden, A.**, **Erbay, S.**, 2006. Standing waves for a generalized Davey-Stewartson system, *J. Phys. A*, **39**, 13435–13444.

[29] **Lieb, E. H.**, 1983. On the lowest eigenvalue of the Laplacian for the intersection of two domains, *Invent. Math.*, **74**, 441–448.

[30] **Nagy, B. V. Sz.**, 1941. Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **10**, 64–74.

[31] **Brezis, H., Lieb, E.**, 1983. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **88**, 486–490.

[32] **Boussinesq, J.**, 1877. Essai sur la theorie des eaux courantes, *Mem. pres. div. Sav. Acad. Sci. Inst. Fr.*, **23**, 1–680.

[33] **Lax, P. D.**, 1968. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.*, **21**, 467–490.

[34] **Benjamin, T. B.**, 1972. The stability of solitary waves, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **328**, 153–183.

[35] **Bona, J.**, 1975. On the stability theory of solitary waves, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci*, **344**, 363–374.

[36] **Oliviera, F.**, 2003. Stability of the solitons for the one-dimensional Zakharov-Rubenchik equation, *Physica D*, **175**, 220–240.

[37] **Pava, J. A., Montenegro, J. F. B.**, 2001. Orbital stability of solitary wave solutions for an interaction equation of short and long dispersive waves, *J. Differential Equations*, **174**, 181–199.

[38] **Weinstein, M. I.**, 1985. Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations, *SIAM J. Math. Anal.*, **16**, 472–491.

[39] **Angulo, J.**, **Bona, J. L.**, **Linares, F., Scialom, M.**, 2002. Scaling, stability and singularities for non-linear, dispersive wave equations: the critical case, *Nonlinearity*, **15**, 759–786.

[40] **Kesavan, S.**, 1989. *Topics in functional analysis and applications*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, India.

[41] **Cipolatti, R.**, 1992. On the existense of standing waves for a Davey-Stewartson system, *Comm. Partial Differential Equations*, **17**, 967–988.

EKLER

EK A: Temel teorem ve eşitsizlikler

Bu tez çalışmasında kullanılan temel teorem ve eşitsizlikler aşağıda listelenmiştir.

Teorem: [Fatou Lemması] (Ω, Σ, μ) bir ölçü uzayı ve $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonları $L^p = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $\quad 0 < p < \infty$ uzayında düzgün sınırlı kompleks değerli fonkiyonlar olsun. $f_n \to f$ noktasal yakınsak olmak üzere

$$\|f\|_p \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|_p$$

sağlanır.

Teorem: [Kompaktlık Teoremi, Lieb [29]] $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$, $E_j = \{x|f_j(x) > \epsilon\}$ sabit $\epsilon > 0$, $\quad c > 0$ için $|E_j| \geq c$ özelliğini sağlamak üzere, $W^{1,p}$ $(1 < p < \infty)$ uzayında düzgün sınırlı gerçel değerli fonksiyon dizisi olsun. Bu durumda, bazı $\{n_j\}$ dizileri için $W^{1,p}$ uzayında $F_{n_j} \rightharpoonup F \neq 0$ zayıf yakınsaması olacak şekilde, $\mathbb{R}^n$ uzayında $\tau \; : \; y \mapsto y + x_j$, $F_j(y) \equiv f_j(\tau_j y) = f_j(y + x_j)$ şeklinde bir $\{\tau_j\}$ öteleme dizisi mevcuttur.

Parseval Özdeşliği: Eğer f ve g fonksiyonları $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayının elemanı ise, $\hat{f}$ ve $\hat{g}$ sırasıyla f ve g fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri olmak üzere,

$$\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

bağıntısı sağlanır.

Eşitsizlikler:

i) Cauchy Eşitsizliği: $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

ii) Young Eşitsizliği: $1 \leq p, q \leq \infty$, $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için, $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0).$$

iii) Hölder Eşitsizliği: $1 \leq p, q \leq \infty$, $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $u \in L^p(\mathbb{R})$ ve $v \in L^q(\mathbb{R})$ ise

$$\int_{\mathbb{R}} |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

iv) Minkowski Eşitsizliği: $1 \leq p \leq \infty$ ve $u, \; v \in L^p(\mathbb{R})$ için

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

v) Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği: $f = f(x,y)$ integre edilebilir bir fonksiyon olmak üzere, $p > 1$ için,

$$\left\{\int\limits_{\mathbb{R}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}} f dy\right]^p dx\right\}^{1/p} \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}} f^p dx\right]^{1/p} dy.$$

vi) Cauchy-Schwarz Eşitsizliği: x, y bir V vektör uzayının elemanları olmak üzere,

$$|\langle x,\ y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

EK B: 1D-LSI sisteminin değişmezleri

(**2.1**) denklem sistemi için Bölüm 2 Lemma 2.1'de Noether teoremi yardımıyla hesaplanan korunan büyüklükler, aşağıda verildiği şekilde cebirsel işlemler ve kısmi integrasyon yardımıyla da elde edilebilir.

(**2.1**) sisteminin birinci denklemi ϕ fonksiyonunun kompleks eşleniği olan ϕ^* fonksiyonu ile çarpılıp, bulunan denklem $\mathbb{R}$ üzerinde integre edildiğinde,

$$i\int\limits_{\mathbb{R}} \phi_t\phi^* dx - \int\limits_{\mathbb{R}} |\phi_x|^2 dx = \beta\int\limits_{\mathbb{R}} u|\phi|^2 dx$$

elde edilir. Bu denklemin sanal kısmı,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}} |\phi|^2 dx = 0,$$

I_1 korunan büyüklüğünü verir. Benzer şekilde, (**2.1**) sisteminin ikinci denklemini ψ^* ile çarparak ve benzer işlemlerle I_2 korunan büyüklüğü elde edilir.

I_3 korunan büyüklüğünü elde etmek için (**2.1**) sisteminin üçüncü denklemi u ile çarpılır ve sonuç denklem $\mathbb{R}$ üzerinde integre edilirse,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} uu_t dx = \beta\int\limits_{\mathbb{R}} (u\phi\phi_x^* + u\phi^*\phi_x + u\psi\psi_x^* + u\psi^*\psi_x)dx$$

bulunur. (**2.1**) denklemleri kullanılarak, bu eşitlik

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}} u^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}} &[(i\phi_t + \phi_{xx})\phi_x^* + (-i\phi_t^* + \phi_{xx}^*)\phi_x \\ &+ (i\psi_t + \psi_{xx})\psi_x^* + (-i\psi_t^* + \psi_{xx}^*)\psi_x]\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin uygun şekilde düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\rm I\!R} u^2 dx = &\int\limits_{\rm I\!R}(i\phi_t\phi_x^* - i\phi_t^*\phi_x + \phi_{xx}\phi_x^* + \phi_{xx}^*\phi_x \\
&+ i\psi_t\psi_x^* - i\psi_t^*\psi_x + \psi_{xx}\psi_x^* + \psi_{xx}^*\psi_x)dx \\
&= i\int\limits_{\rm I\!R}(\phi_t\phi_x^* - \phi_t^*\phi_x + \psi_t\psi_x^* - \psi_t^*\psi_x)dx \\
&= \frac{i}{2}\int\limits_{\rm I\!R}(\phi_t\phi_x^* + \phi_t\phi_x^* - \phi_t^*\phi_x - \phi_t^*\phi_x \\
&+ \psi_t\psi_x^* + \psi_t\psi_x^* - \psi_t^*\psi_x - \psi_t^*\psi_x)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2}\int\limits_{\rm I\!R}(\phi_t\phi_x^* + \phi_{tx}\phi^* - \phi_t^*\phi_x - \phi_\phi^* \\
&+ \psi_t\psi_x^* + \psi_{tx}\psi^* - \psi_t^*\psi_x - \psi_{tx}^*\psi)dx \\
&= \frac{i}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\rm I\!R}(\phi\phi_x^* - \phi_x\phi^* + \psi\psi_x^* - \psi_x\psi^*)dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece I_3 korunan büyüklüğü bulunmuş olur.

Son olarak, (**2.1**) sisteminin birinci denklemi ϕ_t^* ile çarpılır ve bulunan denklem $\rm I\!R$ üzerinde integre edilirse,

$$i\int\limits_{\rm I\!R} |\phi_t|^2 dx - \int_{\rm I\!R}\phi_x\phi_{tx}^* dx = \beta\int_{\rm I\!R} u\phi\phi_t^*$$

bulunur. Bu denklemin gerçel kısmı

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_{\rm I\!R}|\phi_x|^2 dx = \beta\int\limits_{\rm I\!R} u|\phi|_t^2 dx \qquad (\mathbf{B.1})$$

şeklindedir. Benzer şekilde (**2.1**) sisteminin ikinci denkleminin ψ_t^* ile çarpılıp integre edilmesiyle bulunan denklemin gerçel kısmı da

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_{\rm I\!R}|\psi_x|^2 dx = \beta\int\limits_{\rm I\!R} u|\psi|_t^2 dx \qquad (\mathbf{B.2})$$

şeklindedir. (**B.1**) ve (**B.2**) toplanarak,

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_{\rm I\!R}(|\phi_x|^2 + |\psi_x|^2)dx = \beta\int\limits_{\rm I\!R} u(|\phi|^2 + |\psi|^2)_t dx$$

yazılabilir. (ϕ, ψ, u) fonksiyonları (**2.1**) sisteminin üçüncü denklemini sağladığından bu ifadenin sağ tarafındaki integral

$$\begin{aligned}
\beta \int\limits_{\mathbb{R}} u(|\phi|^2 + |\psi|^2)_t dx &= \beta \frac{d}{dt} \int\limits_{\mathbb{R}} u(|\phi|^2 + |\psi|^2) dx - \beta \int\limits_{\mathbb{R}} u_t(|\phi|^2 + |\psi|^2) dx \\
&= \beta \frac{d}{dt} \int\limits_{\mathbb{R}} u(|\phi|^2 + |\psi|^2) dx \\
&\quad - \beta^2 \int\limits_{\mathbb{R}} (|\phi|^2 + |\psi|^2)(|\phi|^2 + |\psi|^2)_x dx \\
&= \beta \frac{d}{dt} \int\limits_{\mathbb{R}} u(|\phi|^2 + |\psi|^2) dx
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla I_4 korunan büyüklüğü de bulunmuş olur.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Handan Borluk
Doğum Yeri ve Tarihi: Kars, 1978.
Adres: Işık Üniversitesi, Matematik Bölümü, Şile Kampusu.
Lisans Üniversite: İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü.
Yüksek Lisans Üniversite: İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü.
Yayın Listesi:

. Borluk, H., Muslu, G. M., Erbay, H. A., 2007. A numerical study of the long wave-short wave interaction equations, Mathematics and Computers in Simulation, 74, 113-125.