



20. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
05 - 09 Eylül 2017, Uludağ Üniversitesi, Bursa

WINKLER ELASTİK ZEMİN ÜZERİNE OTURAN HOMOJEN OLMAYAN ORTOTROPİK DİKDÖRTGEN PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİM PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

V.C. Hacıyev¹, Abdullah Avey², G.R. Mirzeyeva³, A.İ.Şiriyev⁴, M. Süzer⁵

^{1,3,4}Azərbaycan Milli Bilimler Akademisi, Matematik və Mekanik Enstitüsü, Bakü,
Azərbaycan

²İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta

⁵Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Öğrencisi, Isparta

ÖZET

Winkler elastik zemin üzerine oturan homojen olmayan ortotropik plakların serbest titreşimi incelenmiştir. Ortotropik malzemelerin homojen olmaması, uzunluk ve kalınlık koordinatlarıyla doğrusal olarak değişir. Hareket denklemi Donnell-Mushtari teorisi kullanılarak elde edilir ve Galerkin yöntemi ile çözülür. Ortotropik malzemelerin heterojenliğinin, ortotropikliğinin ve Winkler elastik zemininin frekanslar üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Serbest titreşim, homojen olmayan ortotropik malzemeler, plaklar, Winkler elastik zemin, frekanslar

ABSTRACT

The free vibration of inhomogeneous orthotropic plates resting on the Winkler elastic foundation is studied. The inhomogeneity of orthotropic materials varies linearly with the coordinates of length and thickness. The equation of motion is obtained using the Donnell-Mushtari theory and solved by the Galerkin method. The effects of heterogeneity and orthotropy of orthotropic materials, and Winkler elastic foundation on the frequencies are investigated.

Keywords: Free vibration, inhomogeneous orthotropic materials, plates, elastic foundation, frequencies

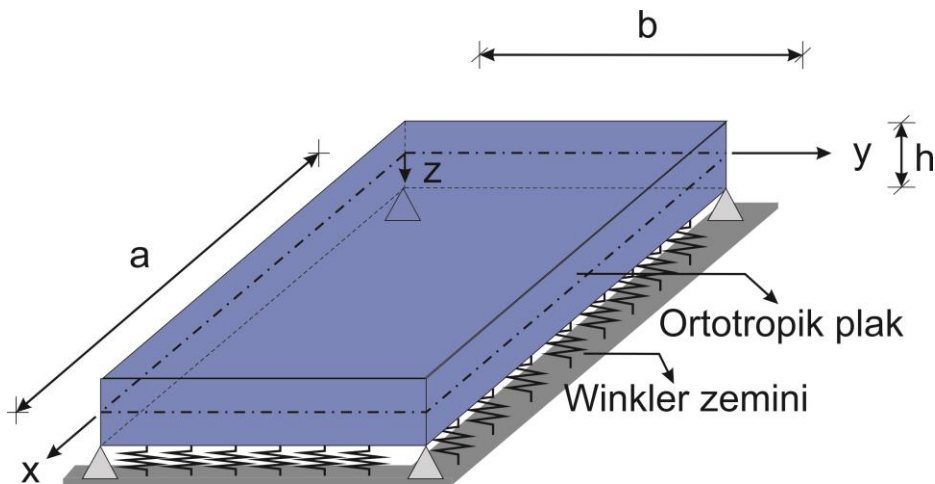
1. GİRİŞ

Homojen olmayan yapılar havacılık, aerodinamik yapı, uzay araçları, otomobillerin hafif alaşım yapısı ve diğer mühendislik yapılarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Yapıdaki değişkenlerin sayısındaki artış, ileri kompozit malzemelerin imkânlarını genişletirken aynı zamanda stabilite ve titreşim davranışlarını önemli ölçüde değiştirebilir. Malzemenin heterojenliğinin ortaya çıkışı, imalat teknolojisi, ısıl ve mekanik etkiler, kompozisyonların heterojenliği ve diğer birçok nedenden kaynaklanabilir [1]. Homojen olmama durumunun farklı türlerini göz önüne almaya yönelik çabalar [2-6] referanslarında sunulmaktadır. Birçok pratik uygulamada, kompozit plaklar topraklar veya diğer katı parçacıklarla temas halindedir ve bu faktörler onların davranışlarında önemli ve kaçınılmaz etkilere sahip olabilirler. Literatürde elastik zemin modelleri ile ilgili temel bilgiler birçok kaynakta mevcuttur [8]. Sivil, mekanik, denizcilik ve uzay mühendislerinde pratik uygulamaları olan elastik zemin üzerine oturan homojen ve homojen olmayan ortotropik plakların titreşimi, çeşitli analitik ve sayısal yöntemler kullanılarak incelenmiştir [9-15].

Yukarıdaki çalışmaların çoğunda, homojen olmayan ortotropik malzemelerin elastik özellikleri, uzay koordinatlarına ayrı-ayrı bağlı olarak incelenmiştir. Önerilen çalışma, Winkler elastik zemin üzerine oturan heterojen ortotropik plakların serbest titreşimi, malzeme heterojenliği uzunluk ve kalınlık boyunca birlikte lineer olarak değiştiği durum için ele alınmaktadır.

2. Problemin Formülasyonu

Winkler elastik zemin üzerine oturan uzunluğu a , genişliği b ve kalınlığı h olan dikdörtgen homojen olmayan ortotropik plağın konfigürasyonu Şekil 1'de sunulmaktadır. Dikdörtgen plak basit mesnetli olup kartezyen koordinat sistemi şekildeki gibi seçilmiştir. Düzlem içi eksenler ortotropi doğrultuları boyunca yönelir ve z eksenini onlara normal doğrultudadır (Şekil 1).



Şekil 1. Winkler elastik zemine oturan homojen olmayan ortotropik dikdörtgen plak ve koordinat sistemi

Ortotropik plağın Young modülleri ve kayma modülünün x ve z koordinatlarına bağlı olarak doğrusal değiştiği, yoğunluk ve Poisson oranlarının sabit olduğu varsayılmaktadır [2-6]:

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= E_1 \left[1 + \frac{x}{a}(\mu_1 - 1) \right] \left[1 + \mu_2 \frac{z}{h} \right], & \bar{E}_2 &= E_2 \left[1 + \frac{x}{a}(\mu_1 - 1) \right] \left[1 + \mu_2 \frac{z}{h} \right], \\ \bar{G}_{12} &= G_{12} \left[1 + \frac{x}{a}(\mu_1 - 1) \right] \left[1 + \mu_2 \frac{z}{h} \right], & \rho &= \text{sabit}, \quad \nu_1 = \text{sabit}, \quad \nu_2 = \text{sabit}.\end{aligned}\quad (1)$$

Burada E_1, E_2, G_{12} homojen ortotropik malzemenin Young ve kayma modülleri, ρ yoğunluğu ve ν_1, ν_2 Poisson oranlarıdır. Ayrıca μ_1 ve μ_2 sırasıyla x ve z doğrultularında homojen olmama katsayıları olup 0 ile 1 arasında değişmektedir. Burada $\mu_1 = 1$ ve $\mu_2 = 0$ olduğunda heterojen malzeme homojen malzemeye dönüşür.

3. Temel bağıntı ve denklem

Klasik plak teorisine dayanarak, x ve z doğrultularında homojen olmayan ortotropik plakların herhangi noktasındaki gerilmeler ve deformasyonlar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi yazılabilir [2-6]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E_1 \left[1 + \frac{x}{a}(\mu_1 - 1) \right] \left[1 + \mu_2 \frac{z}{h} \right]}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[e_{11} + \nu_1 e_{22} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right], \\ \sigma_{22} &= \frac{E_2 \left[1 + \frac{x}{a}(\mu_1 - 1) \right] \left[1 + \mu_2 \frac{z}{h} \right]}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[e_{22} + \nu_2 e_{11} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right], \\ \sigma_{12} &= G_{12} \left[1 + \frac{x}{a}(\mu_1 - 1) \right] \left[1 + \mu_2 \frac{z}{h} \right] \left(e_{12} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).\end{aligned}\quad (2)$$

Burada w , z yönünde küçük yerdeğiştirme olup e_{ij} ($i, j = 1, 2$), homojen olmayan ortotropik plağın orta düzlemindeki eğrilikleridir.

Kuvvet ve moment bileşenleri, aşağıdaki bağıntılardan bulunur [15,16]:

$$(T_{ij}, M_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij}, z\sigma_{ij}) dz, \quad (i, j = 1, 2) \quad (3)$$

Plağın düzleminde herhangi bir dış kuvvet olmadığından ($T_{11} = T_{22} = T_{12} = 0$), kuvvet bileşenleri her yerde sıfıra eşit olduğu varsayımından, aşağıdaki koşullar yazılabilir:

$$A_1(e_{11} + \nu_1 e_{22}) - A_2(\chi_{11} + \nu_1 \chi_{22}) = 0, \quad A_1(e_{22} + \nu_2 e_{11}) - A_2(\chi_{22} + \nu_2 \chi_{11}) = 0 \quad (4)$$

$$A_1 e_{12} - A_2 \chi_{12} = 0$$

Burada $A_1 = h$ ve $A_2 = \frac{\mu_2 h^2}{12}$ olup $\chi_{ij} (i, j = 1, 2)$ deformasyona maruz plağın eğriliğidir.

(2) bağıntıları (3) integrallerinde yerine yazıldığında, moment bileşenleri için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$M_{11} = -\left(1 - \frac{\mu_2^2}{12}\right) D_1 \left[1 + \frac{x}{a} (\mu_1 - 1)\right] \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right],$$

$$M_{22} = -\left(1 - \frac{\mu_2^2}{12}\right) D_2 \left[1 + \frac{x}{a} (\mu_1 - 1)\right] \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] \quad (5)$$

$$M_{12} = -\left(1 - \frac{\mu_2^2}{12}\right) D_{12} \left[1 + \frac{x}{a} (\mu_1 - 1)\right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Burada D_1 , D_2 ve D_{12} homojen ototropik plakların esnek rijitlikleri olup şu şekilde tanımlanır:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{12} = \frac{G_{12} h^3}{12} \quad (6)$$

Winkler elastik zemin üzerine oturan plağın hareketinin kısmi diferansiyel denklemi şu şekilde yazılabilir [15]:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} - K_w w - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

Burada K_w (birimi N/m^3) olup Winkler zemin modülüdür [7-13].

(5) bağıntıları (7) denkleminde yerine yazıldığında, bazı matematiksel dönüşümlerden sonra Winkler elastik zemin üzerine oturan, Young ve kayma modülleri x ve z koordinatlarına bağlı doğrusal olarak değişen ortotropik plâğın hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left[1 + \frac{x}{a}(\mu_1 - 1) \right] \left[D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + (D_1 \nu_2 + \nu_1 D_2 + 4D_{12}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + 2D_1 \frac{\mu_1 - 1}{a} \times \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu_1 \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) + 4D_{12} \frac{\mu_1 - 1}{a} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{12}{12 - \mu_2^2} K_w w + \frac{12}{12 - \mu_2^2} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

4. Temel denklemin çözümü

Sürekli homojen olmayan ortotropik plâkların eğilmesi için sınır koşullarının homojen izotropik plaktaki normal koşullarla çakıştığı varsayılmaktadır. (8) denkleminin harmonik çözümü aşağıdaki gibi aranır [15,16]:

$$w(x, y, t) = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (9)$$

Burada homojen olmayan ortotropik dikdörtgen plâkların basitçe desteklenen sınır şartlarını sağlar, $i = \sqrt{-1}$, m ve n dalga sayıları ve A bilinmeyen genliktir.

(9) 'u (8)' de yerine yazarak, Galerkin'in yöntemi uyguladığımızda ve $m=n=1$ durumu dikkate alındığında, Winkler elastik zemin üzerine oturan homojen olmayan ortotropik plâkların serbest titreşim frekansı için ifade aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\omega = \sqrt{\frac{12 - \mu_2^2}{12} \frac{(1 + \mu_1) \left[\eta_1^4 D_1 + \eta_2^4 D_2 + \eta_1^2 \eta_2^2 (D_1 \nu_2 + D_2 \nu_1 + 4D_{12}) \right]}{2\rho h} + \frac{K_w}{\rho h}} \quad (10)$$

Burada şu tanımlar geçerlidir: $\eta_1 = \pi/a$ ve $\eta_2 = \pi/b$.

Winkler elastik zemin üzerine oturan homojen olmayan ortotropik plâklar için boyutsuz frekans parametresi şu şekilde ifade edilir:

$$\omega_1 = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho / E_1} \quad (11)$$

Eğer $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$ ve $K_w = 0$ durumları (10) ifadesinde dikkate alındığında, sonuçlar zeminsiz homojen ortotropik plağın frekansı ile çakışır ve şu şekilde dönüşür:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\eta_1^4 D_1 + \eta_2^4 D_2 + \eta_1^2 \eta_2^2 (D_1 \nu_2 + D_2 \nu_1 + 4D_{12})}{\rho h}} \quad (12)$$

5. Sonuçlar ve Tartışma

Bu bölümde, elde edilen sonuçların doğruluğunun kontrol edilmesi ve Winkler elastik zemine üzerine oturan dikdörtgen plakların frekans parametrelerindeki x ve z yönlerinde homojen olmamanın ve ortotropikliğin etkileri ile ilgili yeni sayısal hesaplamalar ve analizler sunulmaktadır.

Tablo 1'de, Winkler zemine oturan ince homojen izotropik kare plakların eğilme modları için boyutsuz frekans parametrelerinin karşılaştırılması sunulmaktadır. Karşılaştırmada (12) ifadesinin özel hali kullanılmaktadır. Boyutsuz parametreler şu şekilde belirtilir:

$$\omega_1 = \frac{\omega b^2}{\pi^2} \sqrt{\rho h / D}, \bar{K}_w = \frac{K_w a^4}{D}, D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \nu = 0.3, \rho = 1, a/b = 1, b/h = 100$$

Bu veriler, Leissa [15] çalışmasından alınmıştır. İnce plaklar için doğal frekans değerleri Leissa [15] ve Zhou ve ark.[10] sonuçları ile iyi bir uyum içinde olduğu Tablo 1' den görülmektedir.

Tablo 1. Winkler elastik zemin üzerinde bulunan ince kare plakların frekans parametrelerinin karşılaştırılması ($a/b = 1, b/h = 100$)

\bar{K}_w	Kaynaklar	ω_1
10^2	Leissa [15]	2.2420
	Zhou ve ark. [10]	2.2413
	Bu çalışma	2.2420
	Leissa [15]	3.0221
	Zhou ve ark. [10]	3.0214

5×10^2	Bu çalışma	3.0220
-----------------	------------	--------

Şekil 2’ de dikdörtgen plağın boyutsuz frekans parametrelerinin değerleri homojen ve homojen olmayan durumlarda ve Winkler zemin etkisi dikkate alındığı ve alınmadığı durumlarda E_1/E_2 oranına bağlı değişim sunulmaktadır. Dikdörtgen plağın geometrik ölçüleri $a/b = 0.5, b = 1\text{m}, a/h = 50$ olup ve onu oluşturan homojen ortotrop malzemenin özellikleri aşağıdaki gibi ele alınmıştır [15].

$$E_1/E_2 = 10, 25, 40, 55; E_2 = 206.9\text{GPa}; G_{12} = 0.5E_2, \nu_1 = 0.25, \rho = 1\text{kg}/\text{m}^3$$

Tablo 2. Winkler elastik zemine oturan homojen ve homojen olmayan ortotropik dikdörtgen plağın boyutsuz frekans parametrelerinin E_1/E_2 oranına bağlı dağılımı

	ω_1			
	H	NH		
	$\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$	$\mu_1 = 2, \mu_2 = 0$	$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1$	$\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$
E_1/E_2	$K_w^0 = 0$			
10	3.084	3.777	2.953	3.616
25	2.995	3.668	2.868	3.512
40	2.964	3.630	2.838	3.476
55	2.947	3.609	2.821	3.455
E_1/E_2	$K_w^0 = 5 \times 10^6 (\text{N}/\text{m}^3)$			
10	3.320	3.972	3.198	3.819
25	3.238	3.869	3.120	3.721
40	3.209	3.833	3.093	3.687
55	3.193	3.813	3.077	3.668

Tablo 2’ den görüldüğü gibi E_1/E_2 oranı arttığında dikdörtgen plağın boyutsuz frekans parametrelerinin değerleri homojen ve homojen olmayan durumlarda ve zemin etkisi dikkate alındığı ve alınmadığı durumlarda zayıf bir şekilde düşüş göstermektedir. Zemin etkisi dikkate alınmadığında, homojen olmamanın etkisi belirgin olmasına rağmen yaklaşık olarak E_1/E_2 oranından bağımsızdır. Örneğin; zemin etkisi dikkate alınmadığında; Young ve kayma modülleri sadece x doğrultusunda değiştiğinde, homojen olmamanın etkisi belirgin olup %22.47 iken, Young modülleri sadece z doğrultusunda değiştiğinde bu etki daha az (-%4.3) ve Young modülleri x ve z doğrultularında birlikte değiştiğinde homojen olmamanın etkisi %17.3 olduğu tespit edilmiştir. Burada aksi işareti homojen olmayan plağın frekans değerinin

homojen durumdaki frekans değerinden küçük olduğunu göstermektedir. Zemin etkisinin dikkate alınması ile homojen olmamanın frekanslara etkisinde önemli değişiklikler ortaya çıkmaktadır. Örneğin; Winkler zemin katsayısı $K_w = 5 \times 10^6$ (N/m³) olarak dikkate alındığında ve E_1 / E_2 oranı 10 dan 55'e kadar arttığı durumda; Young ve kayma modülleri sadece x doğrultusunda değiştiğinde homojen olmamanın etkisi artarak %29 civarında, sadece z doğrultusunda homojen olmama durumunda ise bu etki %3.7' den %4.41' e kadar artarken, Young ve kayma modülleri x ve z doğrultularında birlikte değiştiğinde homojen olmamanın etkisi %23.83'ten %24.47' ye zayıf bir artış göstermektedir. E_1 / E_2 oranı artışına bağlı olarak frekans değerlerine zeminin etkisi artış göstermektedir. Zeminin en fazla etkin olduğu durum Young ve kayma modülleri sadece z doğrultusunda değişen ortotropik plaklarda tespit edilmiş ve E_1 / E_2 a oranı 10 dan 55'e kadar arttığında söz konusu etki %8.3'ten %9.1'e kadar artmaktadır.

SONUÇLAR

Winkler elastik zemin üzerine oturan, uzunluk ve kalınlık koordinatlarına bağlı homojen olmayan ortotropik plakların serbest titreşimi incelenmiştir. Ortotropik malzemelerin heterojenliği uzunluk ve kalınlık koordinatlarına bağlı olarak doğrusal olarak değişmektedir. Hareket denklemi Donnell-Mushtari teorisi kullanılarak elde edilmekte ve Galerkin yöntemi uygulanarak çözülmektedir. Ortotropik malzemelerin heterojenliği ve ortotropikliğinin ve Winkler elastik zeminin frekanslar üzerindeki etkileri incelenerek, bu etkilerin önemli olduğu ve yapı-zemin etkileşimi tasarımında dikkate alınmasının gerek olduğu ortaya konulmuştur.

KAYNAKLAR

- [1] A.S. Kolchin, E.A. Favarion, *Theory of Elasticity of Inhomogeneous Bodies*. Chisinau, USSR, 1977.
- [2] V.C. Hacıyev, A.H. Sofiyev, R.D. Mirzoyev, Free vibration of non-homogeneous elastic rectangular plates. *Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics, Academy of Sciences of Azerbaijan*, IV (XIII), 103-108, Baku (in Russian), 1996.
- [3] A.H. Sofiyev, O. Aksogan, Dynamic stability of a non-homogeneous orthotropic elastic cylindrical shell under a time dependent external pressure. *Digest, Turkish Chamber of Civil Engineers* 10(1999) 607-612.
- [4] M.E. Fares, A.M. Zenkour, Buckling and free vibration of non-homogeneous composite cross-ply laminated plates with various plate theories. *Composite Structures* 44 (1999) 279-287.
- [5] A.H. Sofiyev, M.H. Omurtag, E. Schnack, The vibration and stability of orthotropic conical shells with non-homogeneous material properties under a hydrostatic pressure. *Journal Sound and Vibration* **319**(3-5) (2009) 963-983.
- [6] P. Xia, S.Y. Long, H.X. Cui, G.Y. Li, The static and free vibration analysis of a nonhomogeneous moderately thick plate using the meshless local radial point interpolation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 33 (2009) 770-777.
- [7] R. Lal, Y. Kumar, Transverse vibrations of nonhomogeneous rectangular plates with variable thickness. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 20(2013)264-275.

- [8] M.N. Gorbunov-Possadov, T.A. Malikova, V.I. Solomin, *Design of Structures on Elastic Foundation*. Strojizdat, Moscow, Russia, 1984.
- [9] M.H. Omurtag, F. Kadioğlu, Free vibration analysis of orthotropic plates resting on Pasternak foundation by mixed finite element formulation. *Computers and Structures* 67(1998) 253-265.
- [10] Zhou D, Cheung YK, Lo SH, Au FTK. Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundation. *International Journal for Numerical Methods Engineering* 59 (2004)1313–1334.
- [11] T. Morimoto, Y. Tanigawa, Elastic stability of inhomogeneous thin plates on an elastic foundation. *Archives Applied Mechanics* 77(9) (2007) 653-674.
- [12] Hsu MH. Vibration analysis of orthotropic rectangular plates on elastic foundations. *Composite Structures* 92 (2010) 844-852.
- [13] R. Lal, R. Saini, Buckling and vibration analysis of non-homogeneous rectangular Kirchhoff plates resting on two-parameter foundation. *Meccanica* 50(4) (2015) 893-913.
- [14] Ma'en SS, Al-Kouz WG. Vibration analysis of non-uniform orthotropic Kirchhoff plates resting on elastic foundation based on nonlocal elasticity theory. *International Journal of Mechanical Sciences* 114, 1-11, 2016.
- [15] A.W. Leissa, The free vibration of plates. *Journal of Sound Vibration* 31 (1973) 257-293.
- [16] Reddy JN. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd ed. CRC Press, 2004