

BURKULMAYA MARUZ ÇUBUKLARIN OPTİMUM ENİNE KESİT DEĞİŞİMLERİNİN ANALİTİK VE NÜMERİK YÖNTEMLE İRDELENMESİ

Yeliz PEKBEY

Ege Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü, Kampüs, Bornova, İZMİR

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, en az malzeme ile en büyük burkulma kuvvetine dayanan çubukların enine kesitlerinin, çubuk boyu ile değişimini incelenmektir. Bunun için, burkulma optimizasyonu yapılmıştır. Optimizasyon problemi, hem analitik hem de nümerik yöntemle incelenmiştir. Analitik yöntemde, problemin diferansiyel denklemi çıkartılmış ve çözüm yapılmıştır. Ayrıca bu çözümde, sabit enine kesit formundaki çubuk uzunluğu ve hacmi değiştirilmeden, çubuğa verilen optimum form ile, çubuğun kritik burkulma kuvveti artırılmıştır. Nümerik yöntemle yapılan optimizasyonda ise, sabit enine kesit formundaki uzunluk ve kritik burkulma kuvveti değiştirilmeden, çubuğa verilen optimum form ile, çubuğun hacmi azaltılmıştır. ANSYS 10.0 sonlu elemanlar paket programı, nümerik yöntem için kullanılmıştır. Bu çözümler sonunda, toplam 6 mesnetleme durumu için, çubuk uzunluğu boyunca değişen, optimum enine kesit formları elde edilmiştir. Kritik burkulma kuvveti hem sabit hem de değişken enine kesit formu için verilmiş ve optimum çözüm ile sabit enine kesitli çubuklara nazaran sağlanan malzeme tasarrufu yüzde olarak hesaplanmıştır. Ayrıca, enine kesitin daire, kare ve eşkenar üçgen olması durumundaki optimum enine kesit değişimi ile kritik burkulma kuvvetleri, sabit enine kesitli olmasına göre kıyaslanmıştır.

ABSTRACT

The objective of the present work is investigated the relation between the cross section and bar length of axially compressed bars with maximum critical buckling load and minimum material. For this problem, buckling optimization is carried out. Buckling optimization problem is studied both analytical and numerical methods. In analytical method, the differential equation of the buckling problem is obtained and solved. Besides, the critical buckling load is increased with optimum form without changing the bar length and volume of uniform cross section of the bar with analytical solution. In the numerical method, the volume

is decreased with optimum form without changing the bar length and the critical buckling load of uniform cross section of the bar. The numerical solution is carried out ANSYS 10.0 the finite element program. As a result of these solutions, for six different support types, the optimum form is obtained with variation of cross section with the length of the bar. The critical buckling load is given both uniform and variable cross section and the difference between the uniform cross section and the variable cross section solutions is compared in term of material saving. In addition, for support types, the critical buckling loads of square, circle and equilateral triangle cross sections are calculated and compared with uniform cross sections.

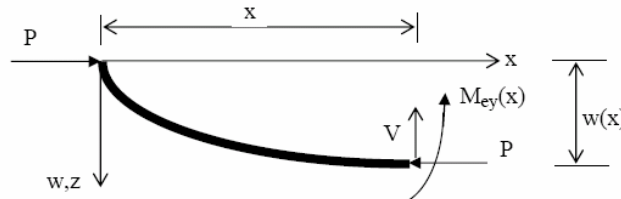
1. GİRİŞ

Basmaya zorlanan sabit enine kesitli çubukların kritik burkulma kuvvetleri, 1744 yılında Euler tarafından dört mesnetleme durumu için verilmiştir [1]. Bu çubuklarda daha ekonomik bir çözüm istenirse, çubuk enine kesit alanı, çubuk uzunluğu boyunca değişmelidir. Eksenel yüke maruz kirişlerin, burkulma optimizasyonu, 2 şekilde yapılabilir. Birincisi, aynı uzunluk ve hacme sahip çubuğa öyle bir optimum form verilir ki, bu formda çubuğun kritik burkulma kuvveti, sabit enine kesitli çubuğun kritik burkulma kuvvetinden daha fazladır. Bu tür burkulma optimizasyonunda, sistemin en küçük özdeğeri yani kritik burkulma kuvvetinin, en büyük değerde olması sağlanır. İkinci tür optimizasyonda ise çubuğa verilen optimum form ile, daha az hacim elde edilmiş olur. Yani bu tür optimizasyonda, optimum forma sahip çubuğun, uzunluğu ile kritik burkulma kuvveti, sabit enine kesitli çubuk ile aynıdır. Sonuçta, verilen optimum form ile, daha az hacimli yani daha hafif bir yapı elde edilmiş olur. Optimizasyon problemi, ilk olarak 1773 yılında Lagrange tarafından formüle edilmiştir [2]. Daha sonra, 1936 yılında Ratzersdorfer [3], basit mesnetli çubuklar için, 1962 yılında ise Tadjbakhsk & Keller [4], ankastre-ankastre ankastre-serbest ve ankastre mafsalı olan çubuklar için enine kesitin çubuk boyu ile değişimini vermişlerdir.

Bu çalışmada değişik mesnetleme durumları için optimum enine kesit formları elde edilmiştir. Optimizasyon problemi, hem analitik hem de sayısal yöntemle çözülmüştür. Analitik yöntemde, problemin diferansiyel denklemi çıkartılmış ve 6 mesnetleme durumu için çözüm yapılmıştır. Sayısal yöntemle yapılan optimizasyonda ise, sabit enine kesit formundaki uzunluk ve kritik burkulma kuvveti değiştirilmeden, çubuğa verilen optimum form ile, çubuğun hacmi azaltılmıştır.

2. PROBLEMİN DİFERANSİYEL DENKLEMİ VE İNCELENEN SINIR ŞARTLARI

Şekil 1'de bası kuvvetine maruz ve x noktasında kesilmiş bir çubuğun serbest cisim diyagramında, moment denklemi (1) ile elastik eğri denklemindeki eğilme momenti kesit zoru denklemi (2), birbirine eşitlenir ve iki kez x 'e göre türevi alınırsa (3) eşitliği bulunmuş olur.



Şekil 1 Bası kuvvetine maruz kiriş elemanın serbest cisim diyagramı

$$M_{ey}(x) = Pw(x) \quad (1)$$

$$M_{ey}(x) = -EI(x)w''(x) \quad (2)$$

$$[-EI(x)w''(x)]'' - Pw''(x) = 0 \quad (3)$$

Bu denklemlerde, eğilme momenti kesit zoru $M_{ey}(x)$, çökme fonksiyonu ve çökme fonksiyonunun x 'e göre ikinci türevi sırasıyla, $w(x)$ ve $w''(x)$ ile belirtilmektedir. $I(x)$ ise çubuk enine kesitinin, alan eylemsizlik momentini ifade etmektedir. Ayrıca çubuk enine kesitlerinin çubuk boyunca aynı formda kalacağı ifade edilirse, çubuk enine kesit alan eylemsizlik momenti $I(x)$ ile çubuk enine kesit alanı $A(x)$ arasında,

$$I(x) = \alpha A^2(x) \quad (4)$$

bağıntısı mevcut olup, α , enine kesit form katsayısını belirtir. Bu değer, çubuk enine kesit formuna bağlı olarak değişen bir değer olup, kare, daire ve eşkenar üçgen enine kesit formları için sırasıyla, $1/12$, $1/4\pi$, $\sqrt{3}/18$ dir [5]. (3) nolu diferansiyel denklemde, (4) nolu denklem ve aşağıdaki değişkenler ile kısaltmalar yazılırsa, (8) nolu denklem elde edilir.

$$\zeta = x/L, \quad (5)$$

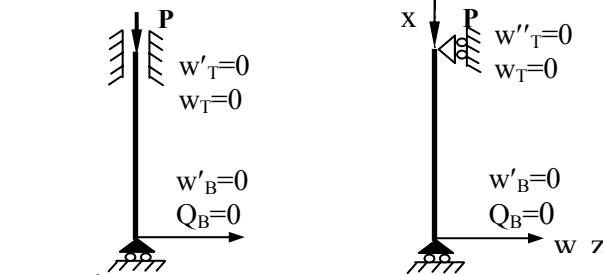
$$\phi(\zeta) = L^2 A^2(\zeta L) w''(\zeta L), \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{PL^2}{E\alpha}, \quad (7)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} + \frac{\lambda}{A^2(\zeta L)} \phi(\zeta) = 0 \Rightarrow \phi_{\zeta\zeta}(\zeta) + \lambda A^{-2} \phi(\zeta) = 0 \quad (8)$$

Diferansiyel denklemin çözümü için, $\phi^2 = A^3$ ifadesinden hareketle, (9) nolu diferansiyel denklem elde edilir [4].

$$\phi_{\zeta\zeta}(\zeta) + \lambda \phi^{-1/3}(\zeta) = 0 \quad (9)$$



Şekil 2 İncelenen yeni mesnetleme durumları ve sınır şartları

Diferansiyel denklemin çözümü için, sınır şartlarından yararlanılacaktır. Bu çalışmada Euler mesnetleme durumları ile alt ucu ankastreli kayıcı basit mesnetli ve üst ucu ankastre mesnetli ile alt ucu ankastreli kayıcı basit mesnetli ve üst ucu kayıcı basit mesnetli mesnetleme durumu için optimum kesitler elde edilecektir [5] (Şekil 2). Enine kesit değişimi, $A(\zeta) = A_0 \sin^2 \theta(\zeta)$ olarak kabul edilirse,

$$\phi(\zeta) = A_0^{3/2} \sin^3 \theta(\zeta) \quad (10)$$

denklemini elde edilmiş olur. Bu ifadeler, (8) nolu denklemde yerine yazılır ve integrasyon işlemleri de yapılırsa, diferansiyel denklemin çözümü olan (11) nolu denklem elde edilmiş olur.

$$\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + a = 2\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{1/2} A_0^{-1} \zeta \quad (11)$$

Bu denklemde, a ve A_0 sabitlerdir ve incelenen mesnetleme durumuna bağlı olarak, sınır şartlarından belirlenir. Burada, alt ucu ankastreli kayıcı basit mesnetli ve üst ucu kayıcı basit mesnetli mesnetleme durumu için diferansiyel denklemin çözümü yapılacaktır. Alt ucu alt ucu ankastreli kayıcı basit mesnetli ve üst ucu kayıcı basit mesnetli mesnetleme durumu için, sınır şartları (12) nolu denklem ile verilmiştir.

$$x = 0 \Rightarrow w_x(0) = Q(0) = 0 \quad (12)$$

$$x = L \Rightarrow w(L) = w_{xx}(L) = 0$$

Sınır şartları ile (13) nolu çökme denklemi elde edilmiş olur.

$$w(\zeta) = w(0) + w_x(0)\zeta L + \frac{1}{\lambda} [\zeta \phi_x(\zeta = 0) - \phi(\zeta) + \phi(0)] \quad (13)$$

Sınır şartlarında bir diğeri ise, $x=0$ noktasındaki kesme kuvveti kesit zorunun sıfır olmasıdır. Bunun için, küçük bir çubuk elemanı alınır ve denge denklemi yazılırsa,

$$Q(x) = \frac{dM}{dx} - P \frac{dw}{dx} \quad (14)$$

elde edilir. (2) nolu denklem, (12) nolu denklemde yerine yazılırsa, kesme kuvveti kesit zoru için, (15) nolu denklem elde edilmiş olur.

$$Q(x) = -[EI'(x)w''(x) + EI(x)w'''(x) + Pw'(x)] \quad (15)$$

Bu denklemde yer alan, çökme fonksiyonunun 3. türevi, (16) nolu denklemler yardımıyla elde edilmektedir.

$$A^{-2} \phi = L^2 w''(\zeta L) \Rightarrow w''(\zeta L) = \frac{-1}{\lambda L^2} \phi_{\zeta\zeta} \quad (16)$$

Böylece çökme fonksiyonunun 3. türevi (17) nolu denklem elde edilmiş olur.

$$w'''(\zeta) = \frac{-1}{L^2 A_0^{1/2}} \frac{\cos \theta(\zeta)}{\sin^2 \theta(\zeta)} \frac{d\theta}{d\zeta} \quad (17)$$

Ayrıca, (13) nolu denklemde verilen $\phi_x(\zeta)$ ifadesi, (10) ve (11) nolu denklemler yardımıyla,

$$\frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} = (3.A_0.\lambda)^{1/2} . \cos \theta(\zeta) \Rightarrow \phi_{\zeta} = (3.A_0.\lambda)^{1/2} . \cos \theta(\zeta) \quad (18)$$

haline dönüşür. Buna göre $x=0$ noktasında, kesme kuvvetinin sıfır olmasından dolayı, (15) nolu denklem yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$Q = \frac{3\alpha A_0^{3/2} \sin^2 \theta(0) \cos \theta(0)}{L^3} \frac{d\theta(0)}{d\zeta} = 0 \quad (19)$$

denklemini elde edilmiş olur. $\frac{d\theta(0)}{d\zeta}$ ifadesinin sıfır olması enine kesitin çubuk boyunca sabit

olması anlamına geldiğinden böyle bir çözüm olmayacaktır. Dolayısıyla (20) nolu denklem aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\frac{3\alpha A_0^{3/2} \sin^2 \theta(0) \cos \theta(0)}{L^3} = 0 \Rightarrow \sin^2 \theta(0) \cos \theta(0) = 0 \quad (20)$$

$x=0$ da $w_x=0$ sınır şartı ise, (13) nolu denklem gereğince kendiliğinden sağlanmaktadır. $x=L$ 'de $w_{xx}(L) = 0$ sınır şartından, (16) nolu denklem yardımıyla,

$$\phi(\zeta) = 0 \Rightarrow \sin \theta(1) = 0 \Rightarrow \theta(1) = -n\pi, \dots -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots n\pi \quad (21)$$

elde edilir. $x=L$ 'deki son sınır şartından da,

$$x = L \Rightarrow w(L) = 0 \Rightarrow w(L) - w(0) = w_x(0)L + \frac{1}{\lambda} [\phi_\zeta(0) - \phi(1) + \phi(0)] \quad (22)$$

yani,

$$w(0) = \frac{-1}{\lambda} \left[(3\lambda A_0)^{1/2} \cos \theta(0) + A_0^{3/2} \sin^3 \theta(0) \right] \quad (23)$$

bulunur. (20), (21) ve (23) nolu denklemleri birçok açı değeri sağlamakla birlikte, en küçük λ değerini,

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}, \theta(1) = \pi \quad (24)$$

açıları vermektedir. Buna göre (11) nolu denklemden,

$$\theta(\zeta = 0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin(2 \frac{\pi}{2}) + a = 2(\frac{\lambda}{3})^{1/2} A_0^{-1} \cdot 0 \Rightarrow a = -\frac{\pi}{2}$$

$$\theta(\zeta = 1) = \pi \Rightarrow \pi - \frac{1}{2} \sin(2\pi) = 2(\frac{\lambda}{3})^{1/2} A_0^{-1} \cdot 1 \Rightarrow A_0 = 4\pi^{-1} (\frac{\lambda}{3})^{1/2} \quad (25)$$

bulunur. Bu değerler, tekrar (11) nolu denklemde yerine yazılırsa,

$$\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \zeta \quad (26)$$

ifadesi bulunmuş olur. L boyundaki çubuğun hacmi,

$$\int_0^L A(x) dx = V \Rightarrow \int_0^1 A(\zeta) d\zeta = \frac{V}{L} \quad (27)$$

bağıntısı ile verilebilir. Bu integralde, (26) nolu denklemde verilen ζ değişkeni yerine yazılır ve integrasyon yapılırsa,

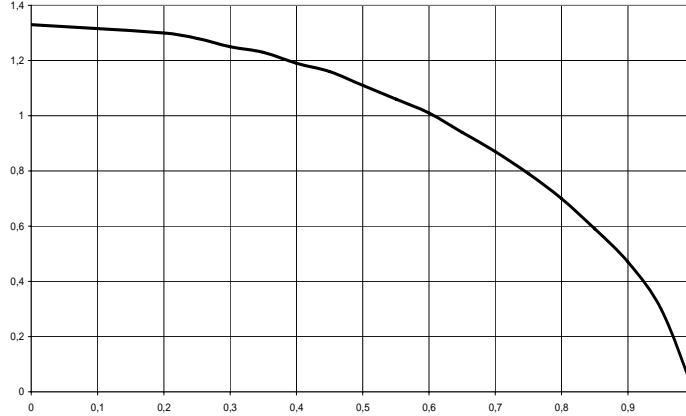
$$\int_0^\theta A_0 \sin^2 \theta(\zeta) \frac{4}{\pi} \sin^2 \theta(\zeta) d\theta = \frac{V}{L} \Rightarrow \frac{4A_0}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi \sin^4 \theta d\theta = \frac{V}{L} \Rightarrow V = \frac{3A_0 L}{4} \quad (28)$$

bulunur. $A(\zeta) = A_0 \sin^2 \theta(\zeta)$ eşitliğinden, çubuğun optimum enine kesit değişimi, (29) nolu denklem ile ifade edilmiş olur.

$$A(\zeta) = \frac{4}{3} \frac{V}{L} \sin^2 \theta(\zeta) \quad (29)$$

Buna göre, alt ucu ankastreli kayıcı basit mesnetli ve üst ucu kayıcı basit mesnetli mesnetleme durumu için Şekil 3’de enine kesit alanının çubuk boyu ile değişimi verilmiştir. (25) ve (28) nolu denklemlerdeki A_0 değerleri eşitlendiğinde, kritik burkulma kuvveti bulunabilir:

$$\lambda = \frac{PL^2}{E\alpha} \Rightarrow P_{OPT} = \frac{\lambda\alpha E}{L^2} \Rightarrow P_{OPT} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{V}{L}\right)^2 \frac{\alpha E}{L^2} \quad (30)$$



Şekil 3 Ankastre kayıcı basit mesnetli-Kayıcı Basit mesnet mesnetleme durumu optimum enine kesit formu

3. ANALİTİK ÇÖZÜMLE ELDE EDİLEN OPTİMUM FORMLAR VE KRİTİK BURKULMA KUVVETLERİ

Çizelge 1’ de, (11) nolu diferansiyel denklemin sınır şartlarına bağlı olarak bulunan a , A_0 ve λ değerleri, Çizelge 2’de ise sabit ve değişken enine kesitlerin kare, daire, ve eşkenar üçgen olması durumundaki kritik burkulma kuvvetleri verilmiştir. Ayrıca Şekil 4’de de, tüm mesnetleme durumları için, analitik çözümlerle elde edilen optimum enine kesit formları görülmektedir.

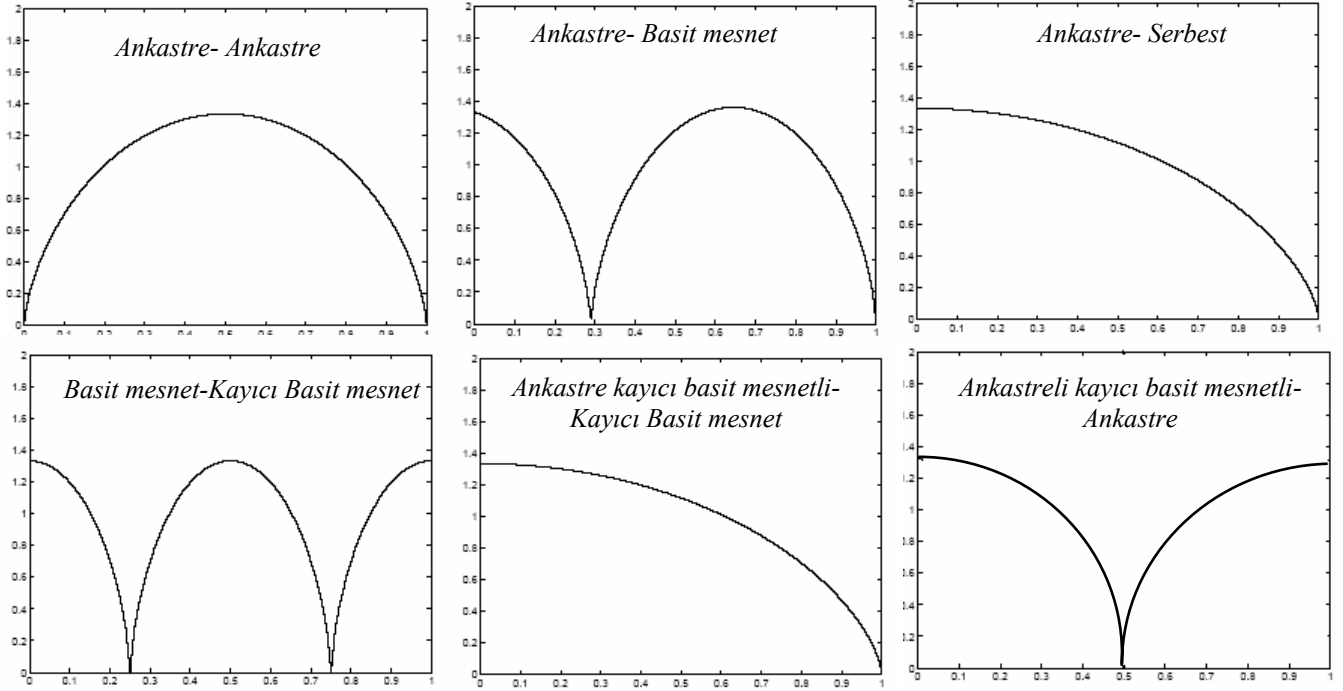
Çizelge 1. Değişik mesnetleme durumları için a , A_0 ve λ değerleri

Mesnetleme Durumları	$\theta(0)$	$\theta(1)$	a	A_0	λ
Ankastre-Ankastre	$-\pi/2$	$3\pi/2$	$\pi/2$	$\frac{1}{\pi} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{1/2}$	$\frac{16\pi^2}{3} \left(\frac{V}{L}\right)^2$
Ankastre-Serbest	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	$\frac{4}{\pi} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{1/2}$	$\frac{\pi^2}{3} \left(\frac{V}{L}\right)^2$
Ankastre-Basit Mesnet	-1,4243	π	1,28	$0,452 \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{1/2}$	$2,76\pi^2 \left(\frac{V}{L}\right)^2$
Basit Mesnet- Kayıcı Basit Mesnet	0	π	0	$\frac{2}{\pi} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{1/2}$	$\frac{4\pi^2}{3} \left(\frac{V}{L}\right)^2$
Ankastreli kayıcı basit mesnetli-Kayıcı basit mesnet	$-\pi/2$	π	$-\pi/2$	$\frac{4}{\pi} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{1/2}$	$\frac{\pi^2}{3} \left(\frac{V}{L}\right)^2$
Ankastreli kayıcı basit mesnet-Ankastre	$\pi/2$	$3\pi/2$	$-\pi/2$	$\frac{2}{\pi} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{1/2}$	$\frac{4\pi^2}{3} \left(\frac{V}{L}\right)^2$

Bu çalışmada incelenen toplam 6 mesnetleme durumundan, ankastre-ankastre mesnetleme durumu için elde edilen optimum enine kesit formu, literatürde tartışmalı bir durum olarak ortaya çıkar. Tadjbakhsh & Keller [4] unimodal çözüm ile, çubuğun ankastre olarak yatakladığı noktalar $x=0$ ve $x=L$ olmak üzere, $x=0,25$ ve $x=0,75$ noktalarında kesiti sıfır olarak bulmuşlardır, ki elde etmiş oldukları optimum form Şekil 4’de verilmiştir. Olhoff & Rasmussen [5], 1977 yılında yapmış olduğu çalışmasında, Tadjbakhsh & Keller’in [4] ankastre-ankastre mesnetleme durumu için bulmuş olduğu sonuçların yanlış olduğunu iddia etmiş ve bu durum için problemin optimum çözümünü sayısal olarak yapmıştır. Değişken enine kesitli optimum çubuklarda kabul gören Tadjbakhsh & Keller [4] ve Olhoff & Rasmussen [6], Masur [7] tarafından verilen çözümlerin yanlış olduğu, Pekbey [8] tarafından gösterilmiş ve yeni optimum çözüm elde etmiştir. Ayrıca, Pekbey [8], yeni bulmuş olduğu çözümü deneysel ve sayısal olarak da desteklemiştir [9].

Çizelge 2. Değişik mesnetleme durumları için analitik çözümle bulunan kritik burkulma kuvvetleri

<i>Mesnetleme Durumları</i>	<i>Sabit Enine Kesit</i>	Değişken Enine Kesit Formu		
		Daire Enine Kesit	Kare Enine Kesit	Eşkenar Üçgen Enine Kesit
<i>Ankastre-Ankastre</i>	$\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$4,18879 \frac{EV^2}{L^4}$	$4,38649 \frac{EV^2}{L^4}$	$5,06508 \frac{EV^2}{L^4}$
<i>Ankastre-Serbest</i>	$\frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$0,26179 \frac{EV^2}{L^4}$	$0,274155 \frac{EV^2}{L^4}$	$0,31657 \frac{EV^2}{L^4}$
<i>Ankastre-Basit Mesnet</i>	$\frac{2,05\pi^2 EI}{L^2}$	$2,16609 \frac{EV^2}{L^4}$	$2,26833 \frac{EV^2}{L^4}$	$2,61925 \frac{EV^2}{L^4}$
<i>Basit Mesnet- Kayıcı Basit Mesnet</i>	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$1,04719 \frac{EV^2}{L^4}$	$1,09662 \frac{EV^2}{L^4}$	$1,26627 \frac{EV^2}{L^4}$
<i>Ankastreli kayıcı basit mesnetli-Kayıcı basit mesnet</i>	$\frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$0,26179 \frac{EV^2}{L^4}$	$0,274155 \frac{EV^2}{L^4}$	$0,31657 \frac{EV^2}{L^4}$
<i>Ankastreli kayıcı basit mesnet-Ankastre</i>	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$1,04719 \frac{EV^2}{L^4}$	$1,09662 \frac{EV^2}{L^4}$	$1,26627 \frac{EV^2}{L^4}$



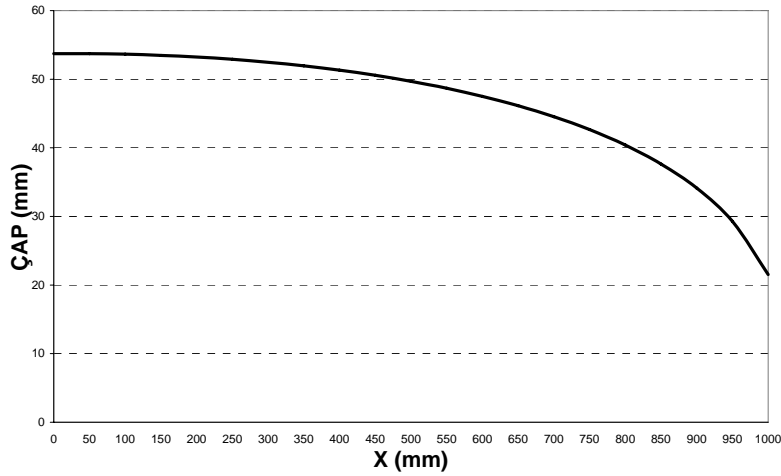
Şekil 4 Analitik çözümle elde edilen, değişik mesnetleme durumları için enine kesit alanının çubuk boyu ile değişimi

4. SAYISAL YÖNTEMLE BURKULMA OPTİMİZASYONU

Çalışmanın bu bölümünde, sonlu elemanlar paket programı (ANSYS 10.0) kullanılarak, yapılan burkulma optimizasyonu anlatılacaktır. Bunun için, L uzunluğunda, sabit enine kesit formuna sahip, narin bir çubuk modellenip, kritik burkulma kuvveti bulunmuştur. Daha sonra, optimizasyon işlemine geçilerek, tüm mesnetleme durumları için, optimum formlar elde edilmiştir. ANSYS optimizasyon probleminin çözümünde, optimize edilecek tasarım değişkenleri, sağlanması gereken durum değişkenleri ve de minimum ya da maksimum yapılacak amaç fonksiyonu tanımlanmıştır. Burada, çubuk uzunluğu parçalara ayrılarak, her bir eleman tasarım değişkeni olarak tanımlanmıştır. Kritik burkulma kuvveti durum değişkeni, amaç fonksiyonu olarak da optimizasyon işlemi ile, minimize edilecek olan çubuğun hacmi tanımlanmıştır. Daha sonra tasarım değişkenleri değiştirilerek, minimum amaç fonksiyonunun değeri veren tasarım en iyi tasarımıdır. Burada, yapılan optimizasyon döngüsünde de, durum değişkeninin belirlenen sınırlamalara uyması sağlanır. Böylece, sabit enine kesit formundaki kritik burkulma kuvveti ile aynı değerde, fakat daha az hacimli optimum formlar elde edilmiştir.

Uygulama örneği olarak, 1000 mm uzunluğunda, malzeme özellikleri, Elastisite modulu $E = 200$ GPa, Poisson oranı $\nu = 0,3$ olan bir çelik çubuk modellenmiştir. Ayrıca, enine kesit formu kare, eşkenar üçgen ve daire olacak şekilde değiştirilmiştir. Boyutları, 50×50 mm² kare enine kesit, çapı 50 mm olan daire enine kesit formu ve bir kenar uzunluğu 50 mm olan eşkenar üçgen kesit, 6 değişik mesnetleme durumu için modellenmiş ve burkulma optimizasyonu yapılmıştır. Her bir mesnetleme durumu için, çubuk uzunluğu boyunca değişen enine kesit formları elde edilmiştir. Yapılan optimizasyon ile, sabit enine kesit formundaki uzunluğa ve kritik burkulma kuvvetine sahip, fakat daha az hacimli optimum formlar elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen optimum form ile analitik çözümden elde edilen optimum formların birbirine benzediği gözlemlenmiştir. Fakat, analitik çözümde, çubuğun bazı

noktalarında kesit değişimi sıfır olarak bulunurken, ANSYS çözümünde buna rastlanmamaktadır. Elde edilen kesit formlarının tümü, sıfırdan farklı bir değere sahiptir.



Şekil 5 Ankastr kayıcı basit mesnetli-Kayıcı Basit mesnetleme durumu için enine kesit alanının çubuk boyu ile değişimi (ANSYS)

Şekil 5’de, daire enine kesitli ankastr kayıcı basit mesnetli-kayıcı basit mesnetleme durumunun, sayısal yöntemden bulunan optimum formu görülmektedir. Elde edilen optimum formda, x eksenini, çubuğun ankastr kayıcı basit mesnetli mesnetleme noktası orjin olarak tanımlanırsa, çubuk uzunluğu boyunca mesafesini göstermektedir. Dolayısıyla, X=0 ve X=1000 mm noktaları, sırasıyla, ankastr kayıcı basit mesnet ve kayıcı basit mesnet noktalarını göstermektedir. Y eksenini de çubuk uzunluğu boyunca değişen çap değerlerini göstermektedir. Analitik çözümle elde edilen optimum formlarda, bu eksenler boyutsuz parametre olarak tanımlanmışlardır. Analitik çözümde, X=1000 mm noktasında kesit değeri sıfır olarak bulunurken, ANSYS çözümünde ise sıfırdan farklı bir değer bulunmaktadır. Ayrıca, hacmi 1963495,4 mm³ olan, sabit daire enine kesitli çubuk için, optimizasyonla, çubuk hacmi 1705573 mm³ değerine indirilmiştir. Bu yaklaşık % 13 hacimsel tasarruf demektir. Sabit enine kesit formundaki kritik burkulma kuvveti (151,4 kN), yapılan optimizasyonla değişmemiştir. Benzer sonuçlar, diğer mesnetleme ve kesitler için de geçerlidir. Çizelge 3 ve Çizelge 4’de, ANSYS 10.0 paket programından elde edilen sonuçlar ve optimizasyon ile sağlanan hacim tasarrufu görülmektedir.

Çizelge 3. Sabit enine kesit formu için analitik ve sayısal kritik burkulma kuvvetleri (kN)

Mesnetleme Durumları	Sabit Enine Kesit Formu					
	Daire Enine Kesit		Kare Enine Kesit		Eşkenar Üçgen Enine Kesit	
	Teorik	ANSYS	Teorik	ANSYS	Teorik	ANSYS
<i>Ankastr-Ankastr</i>	2422,4	2421,20	4112,3	4112,4	890,4	893,2
<i>Ankastr-Serbest</i>	151,4	151,3	257,1	257,1	55,7	55,7
<i>Ankastr-Basit Mesnet</i>	1241,5	1239,3	2107,6	2103,2	456,3	456,8
<i>Basit Mesnet- Kayıcı Basit Mesnet</i>	605,6	605,3	1028,1	1028,1	222,6	223,3
<i>Ankastrli kayıcı basit mesnetli-Kayıcı basit mesnet</i>	151,4	151,3	257,1	257,1	55,7	55,7
<i>Ankastrli kayıcı basit mesnet-Ankastr</i>	605,6	605,3	1028,1	1028,1	222,6	223,3

Çizelge 4. Sayısal yöntemle yapılan burkulma optimizasyonunda sağlanan malzeme tasarrufu

<i>Mesnetleme Durumları</i>	Değişken Enine Kesit Formu		
	Daire Enine Kesit Vsabit=1963495,4mm³	Kare Enine Kesit Vsabit=2500000mm³	Eşkenar Üçgen Enine Kesit Vsabit=1082531,7mm³
	% Hacim Tasarrufu	% Hacim Tasarrufu	% Hacim Tasarrufu
<i>Ankastre-Ankastre</i>	11,4	10,4	9,5
<i>Ankastre-Serbest</i>	13,1	11,5	13,2
<i>Ankastre-Basit Mesnet</i>	12,7	11,2	11,9
<i>Basit Mesnet- Kayıcı Basit Mesnet</i>	11,1	12,6	12,5
<i>Ankastreli kayıcı basit mesnetli-Kayıcı basit mesnet</i>	13,1	11,5	13,2
<i>Ankastreli kayıcı basit mesnet-Ankastre</i>	11,1	12,6	12,5

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, bası kuvvetine maruz narin ve ince çubuklarda en az malzeme ile en büyük burkulma kuvvetine dayanan, çubuk enine kesitlerinin çubuk boyunca değişimleri, değişik mesnetleme durumları için araştırılmıştır. Problemin diferansiyel denklemi analitik olarak çözülmüş, elde edilen sonuçlar da sayısal yöntemle desteklenmiştir. Çizelge 2 incelendiğinde, en büyük kritik burkulma kuvvetinin tüm mesnetleme koşullarında, eşit boy ve hacme sahip enine kesitli çubuklarda eşkenar üçgen enine kesitte olduğu görülmektedir. Eşkenar üçgen enine kesitli çubuğun kritik burkulma kuvveti 100 birim olarak alındığında, ankastre-ankastre mesnetleme durumu için daire enine kesitli çubuğun burkulma kuvveti yaklaşık 83 birim, kare enine kesitli çubuğun burkulma kuvveti de 87 birim olmaktadır. Diğer mesnetleme durumları için de benzer inceleme yapılırsa, eşkenar üçgen enine kesitli çubuğun kritik burkulma kuvveti 100 birim olarak alındığında, daire enine kesitli çubuğun burkulma kuvveti yaklaşık 83 birim, kare enine kesitli çubuğun burkulma kuvveti de 87 birim olduğu görülür. Ayrıca sayısal yöntemle yapılan optimizasyon işlemi ile, değişik mesnetleme koşulları için, yaklaşık olarak, minimum % 10, maksimum ise % 13 hacimsel tasarruf sağlanmıştır. Elde edilen optimum formlar da analitik çözümle elde edilen optimum formlara büyük bir oranda benzerlik gösterdiği görülmüştür. Fakat sayısal çözümde, çubuk uzunluğu boyunca kesit alanları, sıfırdan farklı değerlerde elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Euler, L., “De curvis elasticis” In Methodus inveniendi leneas curva maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti, Lausannae, E65A. O. O. Ser.I., 24, 231-297, 1744.
- [2] Lagrange, J. L. “Sur la figure des colonnes” Miscellanea Taurinensia 123, 1773.
- [3] Ratzersdorfer, J. (Ed.). “Die Knickfestigkeit von Staeben und Stabwerken” Springer Verlag, Wien, 103-106, (in German), 1936.
- [4] Tadjbakhsh, I., Keller, J. B., “Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues” Journal of Applied Mechanics 29 159-164, 1962.

- [5] Pekbey, Y., Özdamar, A., “Bası Yükleri Altında Burkulmaya Zorlanan Çubuklarda Optimum Enine Kesit Değişimi Üzerine Bir Araştırma” D.E.Ü. Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi 4/3 103-112, 2002.
- [6] Olhoff, N., Rasmussen, S.H., “On the single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns” International Journal of Solids and Structures 13 605-614, 1977.
- [7] Masur, E., “Optimal structural design under multiple eigenvalue constraints” International Journal of Solids and Structures 20211-231, 1984.
- [8] Pekbey Y., “Buckling of Economical Composite Bars” D.E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği, Mekanik Anabilim Dalı Doktora Tezi, 2005.
- [9] Pekbey, Y., Ozdamar, A., Sayman, O., “Experimental and Numerical Investigation on Optimization of Clamped Composite Columns: by the Example of Cedar and Oak” Advanced Composite Letters 15/6 207-214, 2006.

