



XVII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
5-9 Eylül 2011, Fırat Üniversitesi, Elazığ

EKSENEL PARAMETRİK ZORLAMALI ÇOK YAYLI KİRİŞLERİN YENİ BİR YAKLAŞIMLA DİNAMİK ANALİZİ

B. Gültekin SINIR^{1*} ve Sümeyye SINIR^{2 †}
Celal Bayar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü,
Mekanik ABD, Manisa

ÖZET

Bu çalışmada eksenel yüklü ve açıklıkta yay mesnetler içeren basit basit kesirli kirişin dinamik analizi incelenmiştir. Dinamik analiz için çok zaman ölçekli perturbasyon metodunun direkt uygulaması kullanılmıştır. Ancak iki farklı yaklaşımla çözüm yapılmıştır. Önerilen yeni yöntemin doğruluğu literatürdeki yöntemlerle karşılaştırılmış ve sonuçların çok uyumlu olduğu gösterilmiştir.

1.GİRİŞ

Bir yapı, kolon, kiriş, döşeme gibi farklı yapı elemanlarından oluşur. Yapılarda karşılaşılan çeşitli durumlara bağlı olarak yapı elemanlarında süreksizliklerle karşılaşılabilir. Örneğin bir kirişte oluşan çatlak, kiriş boyunca belli aralıklarla yerleştirilen mesnetler, kiriş üzerinde bulunan tekil kuvvetler ya da aralıklı yerleştirilmiş konsantre kütleler gibi durumlar kiriş elemanında süreksizliklere sebep olur. Süreksizlikler içeren yapı elemanlarının statik veya dinamik davranışının analizinde süreksizlik durumu sıkıntılar ortaya çıkartmaktadır. Literatürde yapı elemanlarının dinamik analizinde üç farklı tür çözüm yöntemi kullanılır. Bunlar analitik yöntemler, yarı analitik yöntemler ve nümerik yöntemler olarak sayılabilir. Analitik veya yarı analitik yöntemlerle, ilgili yapı elemanın davranışını analizi etmek istersek süreksizliğe sebep olan noktalar arasında kalan her açıklık için ayrı ayrı denklemler yazmak gerekir. Çözüm aşamasında sınır koşulları haricinde süreksizliğin görüldüğü her nokta için uygunluk koşulları da yazılmak zorundadır [1-4]. Az sayıda süreksiz nokta için analitik veya yarı analitik çözüm elde edilebilirken süreksiz nokta sayısı arttıkça yazılan denklem sayısı ve uygunluk koşulları sayısı artacağından ve bu durumun bilgisayar programını yazmak da zor olacağından çözüm yapmak giderek daha da karmaşık bir hale gelir. Belli bir süreksiz nokta sayısından sonra ise imkânsız hale dönüşecektir. Çok iyi bilinen sonlu elemanlar ve sonlu farklar metodları gibi nümerik analiz teknikleri gerçeğe çok yakın sonuçlar verirler [5]. Bu nümerik yöntemlerde alınan eleman veya nokta sayısı arttıkça elde edilen sonuç gerçek sonuca daha yakın olmaktadır. Nümerik yöntemlerin bu çalışmada ele alınan süreksizlik içeren yapı elemanlarına uygulanması gelişen programlar sayesinde kolaydır. Ancak biz bu çalışmada dinamik problemlerin analizinde çok güçlü bir yöntem olan çok zaman ölçekli metodu kullanmak istedik. Çok zaman ölçekli metodun iki farklı uygulama şekli vardır: direkt uygulama ve ayrıklaştırılmış uygulama. Direkt uygulamada çok zaman ölçekli kısmi diferansiyel denklem olarak elde edilmiş matematik modele

* Yrd. Doç. Dr., İnşaat Müh. Böl., E-posta: gultekin.sinir@bayar.edu.tr

† Lisansüstü Öğrenci, İnşaat Müh. Böl., E-posta: sumeyyesinir@hotmail.com

SINIR, SINIR

direkt uygulanır. Çözülebilirlik şartı uygulama safhasında kısmi diferansiyel denklem tek bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. Ayırıştırılmış uygulamada ise önce Galerkin metodu uygulanır. Seçilen kesim sayısı kadar denklem içeren bir adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Ancak direkt uygulamanın ayırıştırılmış uygulamaya göre daha iyi sonuçlar verdiği literatürde gösterilmiştir [6-8].

Süreksizliğin kaynağı olan durum ve geçiş şartları için özel fonksiyonlar kullanarak daha sade halde hareket denklemleri yazılabilir. Biz bu çalışmada çok zaman ölçekli metodun direkt uygulamasının avantajlarından yararlanarak daha sade yazılmış haldeki problemin analizini bulmayı amaçladık. Bunun için yeni bir çözüm metodu geliştirdik: pertürbasyon-sonlu fark metodu (PSF). Bu metotta öncelikle direkt pertürbasyon yöntemi uygulanmaktadır. Elde edilen lineer denklemin çözümü ise sonlu fark ile yapılmaktadır. Literatürde böyle bir çalışma daha önce yapılmamıştır. Bu yönüyle çalışma orijinal bir çalışmadır.

2. PROBLEMİN TANITIMI

Biz bu çalışmada basit-basit mesnet ile mesnetlinmiş kirişi ele aldık. Kiriş ayrıca lineer elastik yaylarla da desteklenmiştir. Genel formu göstermek için, N tane lineer elastik yay için denklemler verilmiştir. Bu tür süreksizlik içeren problemlerin hareket denklemleri iki farklı şekilde yazılabilir.

2.1. Bilinen yöntemlere uygun hareket denklemleri ve sınır şartları

Literatürde yaygın olarak bilinen ve çalışılan formda problemi tanımlamak istersek N+1 tane hareket denklemleri yazmak gerekir ve her iki denklem arası geçiş şartı belirtilmelidir. Üniform, homojen bir kiriş için hareket denklemleri

$$EI\hat{y}_j^{iv} + \hat{P}\hat{y}_j'' + m\hat{y}_j'' = 0 \text{ burada } j = 1, 2, \dots, N+1 \quad (1)$$

Sınır şartları:

$$\hat{y}_1(0, \hat{t}) = \hat{y}_1''(0, \hat{t}) = 0 \text{ ve } \hat{y}_{N+1}(L, \hat{t}) = \hat{y}_{N+1}''(L, \hat{t}) = 0 \quad (2)$$

Geçiş şartları:

$$\begin{aligned} \hat{y}_j(\hat{x}_j, \hat{t}) &= \hat{y}_{j+1}(\hat{x}_j, \hat{t}), \quad \hat{y}_j'(\hat{x}_j, \hat{t}) = \hat{y}_{j+1}'(\hat{x}_j, \hat{t}), \quad \hat{y}_j''(\hat{x}_j, \hat{t}) = \hat{y}_{j+1}''(\hat{x}_j, \hat{t}) \text{ ve} \\ EI\hat{y}_j'''(\hat{x}_j, \hat{t}) + \hat{P}\hat{y}_j'(\hat{x}_j, \hat{t}) - \hat{k}_j\hat{y}_j(\hat{x}_j, \hat{t}) &= EI\hat{y}_{j+1}'''(\hat{x}_j, \hat{t}) + \hat{P}\hat{y}_{j+1}'(\hat{x}_j, \hat{t}) \end{aligned} \quad (3.a, b, c, d)$$

Denklemler (1-3) de verilen E , I , m , L sırasıyla kirişin elastisite modülü, atalet momenti, birim kesit kütlesi ve iki mesnet arası uzunluğudur. \hat{P} ise eksenel harmonik basınç yüküdür ve $\hat{P} = \hat{P}_0 + \varepsilon\hat{P}_1 \cos \hat{\Omega}\hat{t}$ şeklindedir. ε birden küçük bir sayıdır. Bağımlı değişken enine yer değiştirmeyi, bağımsız değişkenler ise konumu ve zamanı göstermektedir. Bağımlı değişkenin üzerindeki tırnak işaretleri konuma göre türevi, nokta ise zamana göre türevi tanımlamaktadır.

Malzeme ve geometri bağımlılığından kurtulmak ve daha sade denklemler ve sınır şartları elde etmek için boyutsuzlaştırma yapılır. Bağımlı ve bağımsız değişkenler aşağıdaki şekilde boyutsuzlaştırılmıştır.

$$y = \frac{\hat{y}}{L}, \quad x = \frac{\hat{x}}{L}, \quad t = \hat{t} \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (4)$$

SINIR, SINIR

Denklem (4) kullanarak hareket denklemleri ve sınır ile geçiş şartları aşağıdaki gibi yazılabilir

$$y_j'' + Py_j'' + \ddot{y}_j = 0 \text{ burada } j = 1, 2, \dots, N + 1 \quad (5)$$

Sınır şartları:

$$y_1(0, t) = y_1''(0, t) = 0 \text{ ve } y_{N+1}(1, t) = y_{N+1}''(1, t) = 0 \quad (6)$$

Geçiş şartları:

$$y_j(\eta_j, t) = y_{j+1}(\eta_j, t), y_j'(\eta_j, t) = y_{j+1}'(\eta_j, t), y_j''(\eta_j, t) = y_{j+1}''(\eta_j, t) \text{ ve} \\ y_j'''(\eta_j, t) + Py_j'(\eta_j, t) - k_j y_j(\eta_j, t) = y_{j+1}'''(\eta_j, t) + Py_{j+1}'(\eta_j, t) \quad (7. a, b, c, d)$$

Yukarıdaki denklemlerde ortaya çıkan boyutsuz terimler ise

$$\eta_j = \frac{x_j}{L}, k_j = \frac{\hat{k}_j L^3}{EI}, P = \frac{\hat{P} L^2}{EI} \text{ ve } P = P_0 + \varepsilon P_1 \cos \Omega t \quad (8)$$

Yukarıdaki denklemlerden de görüleceği üzere eğer N tane elastik yay mesnet kullanılırsa N+1 tane denklem çözülmekte ve 4x(N+1) tane sınır şartı uygulanmaktadır. Bu çözüm küçük N sayıları için yapılabilmekte iken büyük N sayılarında ise nerdeyse imkânsız hale gelmektedir.

2.2. Yeni yöntemeye uygun hareket denklemi ve sınır şartları

Bizim geliştirdiğimiz yöntemde lineer mertebe çözümde nümerik metot kullanılacağı için denklemi özel fonksiyonlar ile tanımlamakta bir sıkıntı yoktur. Bu durumda hareket denklemi

$$EI \hat{y}'''' + \hat{P} \hat{y}'' + \sum_j^N \hat{y} \hat{k}_j \delta(\hat{x} - \hat{x}_j) + m \ddot{\hat{y}} = 0 \quad (9)$$

Ve sınır şartları

$$\hat{y}(0, \hat{t}) = \hat{y}''(0, \hat{t}) = 0 \text{ ve } \hat{y}(L, \hat{t}) = \hat{y}''(L, \hat{t}) = 0 \quad (10)$$

Boyutsuzlaştırma işlemi sonucunda ise

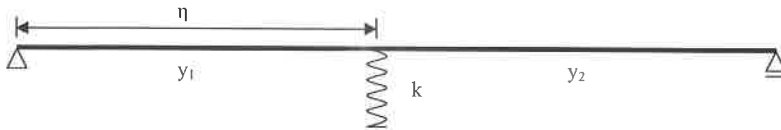
$$y'''' + Py'' + \sum_j^N y k_j \delta(x - \eta_j) + \ddot{y} = 0 \quad (11)$$

$$y(0, t) = y''(0, t) = 0 \text{ ve } y(1, t) = y''(1, t) = 0 \quad (12)$$

Görüldüğü gibi diğer gösterime göre oldukça sade ve basit bir denklem yapısı ve sınır şartları vardır. Denklem (11) deki, δ işareti direkt-delta fonksiyonunu gösterir.

3. İKİ AÇIKLIKLI, TEK ELASTİK YAYLI KİRİŞİN DİNAMİK ANALİZİ

Bu problemi incelememizin temel nedeni geliştirilen yeni analiz metodunun geçerliliğini göstermektir. Bunun için Şekil 1'de gösterildiği gibi basit-basit mesnetli bir kirişe, bir elastik yay ile destek çıkılmıştır.



Şekil 1. Tek yaylı kirişin gösterimi

SINIR, SINIR

Dinamik analiz tekniği olarak çok zaman ölçekli pertürbasyon tekniğinin direkt uygulaması kullanılacaktır. O nedenle hem klasik uygulamada hem de yeni geliştirilen metotta kullanılacak pertürbatif açılımlar aşağıdaki gibidir:

$$T_0 = t, T_1 = \varepsilon t \quad (13)$$

Yukarıdaki terimlerden ilki hızlı zamanı, ikinci daha yavaş zamanı göstermektedir. Bu ifadelere göre zamana göre türevleri açarsak

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (14)$$

Burada

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (15)$$

Çok zaman ölçekli metotta aynı zamanda bağımlı değişkende (titreşim genliğide) yavaş ve hızlı zaman genlikleri olmak üzere ölçeklere ayrılır.

3.1. Klasik yöntemle çözüm

Klasik olarak uygulanan, referanslarda verilen çalışmalara benzer şekilde çözüm yapmak istersek, boyutsuz hareket denklemleri ve sınır şartları aşağıdaki gibi olur:

$$y_1'''' + (P_0 + \varepsilon P_1 \cos \Omega t) y_1'' + \ddot{y}_1 = 0 \quad \text{ve} \quad y_2'''' + (P_0 + \varepsilon P_1 \cos \Omega t) y_2'' + \ddot{y}_2 = 0 \quad (16)$$

Sınır şartları:

$$y_1(0, t) = y_1''(0, t) = 0 \quad \text{ve} \quad y_2(1, t) = y_2''(1, t) = 0 \quad (17)$$

Geçiş şartları:

$$y_1(\eta, t) = y_2(\eta, t), \quad y_1'(\eta, t) = y_2'(\eta, t), \quad y_1''(\eta, t) = y_2''(\eta, t) \quad \text{ve} \\ y_1'''(\eta, t) + P y_1'(\eta, t) - k y_1(\eta, t) = y_2'''(\eta, t) + P y_2'(\eta, t) \quad (18.a, b, c, d)$$

Çok zaman ölçekli pertürbasyon uygulaması için aşağıdaki açılımlar kullanılır

$$y_1(x, T_0, T_1; \varepsilon) \cong y_{10}(x, T_0, T_1) + \varepsilon y_{11}(x, T_0, T_1) + \dots \quad (19)$$

$$y_2(x, T_0, T_1; \varepsilon) \cong y_{20}(x, T_0, T_1) + \varepsilon y_{21}(x, T_0, T_1) + \dots \quad (20)$$

Denklemler (19-20) ve Denklemler (13-15) verilen açılımlar hareket denklemlerine yerleştirilerek ε kuvvetine göre ayırırsak

ε^0 :

$$y_{10}'''' + P_0 y_{10}'' + D_0^2 y_{10} = 0 \quad (21.a)$$

$$y_{20}'''' + P_0 y_{20}'' + D_0^2 y_{20} = 0 \quad (21.b)$$

Sınır şartları

$$y_{10}(0, T_0, T_1) = y_{10}''(0, T_0, T_1) = 0 \quad \text{ve} \quad y_{20}(1, T_0, T_1) = y_{20}''(1, T_0, T_1) = 0 \quad (22.a, b)$$

Geçiş şartları ise

SINIR, SINIR

$$y_{10}(\eta, T_0, T_1) = y_{20}(\eta, T_0, T_1), \quad y'_{10}(\eta, T_0, T_1) = y'_{20}(\eta, T_0, T_1), \quad y''_{10}(\eta, T_0, T_1) = y''_{20}(\eta, T_0, T_1) \text{ ve}$$

$$y'''_{10}(\eta, T_0, T_1) + Py'_{10}(\eta, T_0, T_1) - ky_{10}(\eta, T_0, T_1) = y'''_{20}(\eta, T_0, T_1) + Py'_{20}(\eta, T_0, T_1) \quad (23.a, b, c, d)$$

ε^1 :

$$y''_{11} + P_0 y''_{11} + D_0^2 y_{11} = -2D_0 D_1 y_{10} - P_1 \cos \Omega T_0 y''_{10} \quad (24.a)$$

$$y''_{21} + P_0 y''_{21} + D_0^2 y_{21} = -2D_0 D_1 y_{20} - P_1 \cos \Omega T_0 y''_{20} \quad (24.b)$$

Sınır şartları

$$y_{11}(0, T_0, T_1) = y''_{11}(0, T_0, T_1) = 0 \text{ ve } y_{21}(1, T_0, T_1) = y''_{21}(1, T_0, T_1) = 0 \quad (25.a, b)$$

Geçiş şartları ise

$$y_{11}(\eta, T_0, T_1) = y_{21}(\eta, T_0, T_1), \quad y'_{11}(\eta, T_0, T_1) = y'_{21}(\eta, T_0, T_1), \quad y''_{11}(\eta, T_0, T_1) = y''_{21}(\eta, T_0, T_1) \text{ ve}$$

$$y'''_{11}(\eta, T_0, T_1) + Py'_{11}(\eta, T_0, T_1) - ky_{11}(\eta, T_0, T_1) = y'''_{21}(\eta, T_0, T_1) + Py'_{21}(\eta, T_0, T_1) \quad (26.a, b, c, d)$$

ε^0 mertebesinde çözümleri aşağıdaki gibidir

$$y_{10} = (A(T_1)e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_n T_0})X_{1n}(x) \quad (27.a)$$

$$y_{20} = (A(T_1)e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_n T_0})X_{2n}(x) \quad (27.b)$$

Denklem (27)'yi Denklemler (21-23)'de yerine yazarsak

$$X''_{1n} + P_0 X''_{1n} - \omega_n^2 X_{1n} = 0 \quad (28.a)$$

$$X''_{2n} + P_0 X''_{2n} - \omega_n^2 X_{2n} = 0 \quad (28.b)$$

Sınır şartları

$$X_{1n}(0) = X''_{1n}(0) = 0 \text{ ve } X_{2n}(1) = X''_{2n}(1) = 0 \quad (29.a, b)$$

Geçiş şartları ise

$$X_{1n}(\eta) = X_{2n}(\eta), \quad X'_{1n}(\eta) = X'_{2n}(\eta), \quad X''_{1n}(\eta) = X''_{2n}(\eta) \text{ ve}$$

$$X'''_{1n}(\eta) + P_0 X'_{1n}(\eta) - kX_{1n}(\eta) = X'''_{2n}(\eta) + P_0 X'_{2n}(\eta) \quad (30.a, b, c, d)$$

Denklem (28)'in çözümü

$$X_{1n} = c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-2P_0 - 2\sqrt{P_0^2 + 4\omega^2}}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{-2P_0 - 2\sqrt{P_0^2 + 4\omega^2}}x} + c_3 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-2P_0 + 2\sqrt{P_0^2 + 4\omega^2}}x} + c_4 e^{\frac{1}{2}\sqrt{-2P_0 + 2\sqrt{P_0^2 + 4\omega^2}}x} \quad (31.a)$$

$$X_{2n} = d_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-2P_0 - 2\sqrt{P_0^2 + 4\omega^2}}x} + d_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{-2P_0 - 2\sqrt{P_0^2 + 4\omega^2}}x} + d_3 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-2P_0 + 2\sqrt{P_0^2 + 4\omega^2}}x} + d_4 e^{\frac{1}{2}\sqrt{-2P_0 + 2\sqrt{P_0^2 + 4\omega^2}}x} \quad (31.b)$$

Sınır ve geçiş şartlarını uygularsak matris formunda yazılan denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_1} & e^{\lambda_2} & e^{\lambda_3} & e^{\lambda_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1^2 e^{\lambda_1} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3} & \lambda_4^2 e^{\lambda_4} \\ e^{\lambda_1 \eta} & e^{\lambda_2 \eta} & e^{\lambda_3 \eta} & e^{\lambda_4 \eta} & -e^{\lambda_1 \eta} & -e^{\lambda_2 \eta} & -e^{\lambda_3 \eta} & -e^{\lambda_4 \eta} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 \eta} & \lambda_2 e^{\lambda_2 \eta} & \lambda_3 e^{\lambda_3 \eta} & \lambda_4 e^{\lambda_4 \eta} & -\lambda_1 e^{\lambda_1 \eta} & -\lambda_2 e^{\lambda_2 \eta} & -\lambda_3 e^{\lambda_3 \eta} & -\lambda_4 e^{\lambda_4 \eta} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 \eta} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 \eta} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 \eta} & \lambda_4^2 e^{\lambda_4 \eta} & -\lambda_1^2 e^{\lambda_1 \eta} & -\lambda_2^2 e^{\lambda_2 \eta} & -\lambda_3^2 e^{\lambda_3 \eta} & -\lambda_4^2 e^{\lambda_4 \eta} \\ f_1 e^{\lambda_1 \eta} & f_2 e^{\lambda_2 \eta} & f_3 e^{\lambda_3 \eta} & f_4 e^{\lambda_4 \eta} & -g_1 e^{\lambda_1 \eta} & -g_2 e^{\lambda_2 \eta} & -g_3 e^{\lambda_3 \eta} & -g_4 e^{\lambda_4 \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Matris formundaki

$$\lambda_{1,2,3,4} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{-2P_0 \mp 2\sqrt{P_0^2 + 4\omega^2}}, \quad f_i = \lambda_i^3 + P_0\lambda_i - k \quad \text{ve} \quad g_i = \lambda_i^3 + P_0\lambda_i \quad (33. \text{ a, b, c})$$

şekindedir. Basit çözümden farklı bir çözüm elde edebilmek için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Bu şartı kullanarak kritik eksenel yük ve doğal frekans, yay katsayısına ve konumuna bağlı olarak hesaplanır. Daha sonra ise keyfi sabitler saptanarak mod yapıları bulunur. Bundan sonraki adım ise bu bilgileri kullanarak çözülebilirlik şartını uygulamaktır. Literatürde yapılan çalışmalar [9] göstermiştir ki kritik zorlama frekansı değeri, doğal frekansın 2 katına yakın olan değerdir. Bu durum dikkate alınarak perturbatif çözüme devam edilir.

Kritik zorlama:

$$\Omega = 2\omega_n + \varepsilon\sigma \quad (34)$$

Burada σ ayar parametresidir. ε^1 mertebesindeki çözüm ise

$$y_{11} = \phi_1(x, T_1)e^{i\omega_n T_0} + W_1(x, T_0, T_1) + ke \quad (35.a)$$

$$y_{21} = \phi_2(x, T_1)e^{i\omega_n T_0} + W_2(x, T_0, T_1) + ke \quad (35.b)$$

Çözülebilirlik şartını kullanarak aşağıdaki denklem elde edilir

$$D_1 A_n + k_0 \bar{A}_n e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (36)$$

$$k_0 = -i \frac{P_1}{4\omega_n} \left(\int_0^\eta X_{1n}'' X_{1n} dx + \int_\eta^1 X_{2n}'' X_{2n} dx \right) \quad (37)$$

Bu denklem elde edilirken $\int_0^\eta X_{1n}^2 dx + \int_\eta^1 X_{2n}^2 dx = 1$ normalizasyonu yapılmıştır. Referans [9] d aynı

denklem için stabilite sınırları aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$-2\sqrt{k_{0R}^2 + k_{0I}^2} < \sigma < 2\sqrt{k_{0R}^2 + k_{0I}^2} \quad (38)$$

Denklemdaki R ve I alt indisi reel ve kompleks kısımlarını göstermektedir. Bu çalışmada elde edilen k_0 katsayısı sadece kompleks katsayıdan oluştuğu için

$$k_{0R} = 0 \quad \text{ve} \quad k_{0I} = -\frac{P_1}{4\omega_n} \left(\int_0^\eta X_{1n}'' X_{1n} dx + \int_\eta^1 X_{2n}'' X_{2n} dx \right) \quad (39)$$

Bu durumda stabilite sınırları takip eden forma dönüşür.

$$-2k_{0I} < \sigma < 2k_{0I} \quad (40)$$

Çözümde de anlaşılacağı üzere stabilite sınırları doğal frekansa, mod yapısına ve harmonik zorlamanın genliğine bağlıdır.

3.2. Geliştirilen yeni yöntemle çözüm

Bu çalışmada kullanılan metod, literatürde ilk kez uygulanan bir metottur. Süreksizlik içeren problemlerde, süreksizlik sayısındaki artışa bağlı olarak problemin çözümü karmaşıklaşmaktadır. Programlama yaklaşımına uygun olmadığı için süreksizlik sayısının arttığı durumlarda çözüm imkansızlaşmaktadır. Bu sorunu gidermek için yeni bir metod bu çalışmada sunulmuştur. Hareket denklemi ve sınır şartları, Denklem (11) ve (12) de verildiği gibidir. Titreşim genliği ise

$$y(x, t) \cong y_0(x, T_0, T_1) + \varepsilon y_1(x, T_0, T_1) \quad (41)$$

Bu açılımı ve daha önce verilen ilgili açılımları kullanarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$y'' + Py + \sum_j^N y k_j \delta(x - \eta_j) + \ddot{y} = 0 \quad (42)$$

ε^0 :

$$y_0'' + P_0 y_0'' + k\delta(x - \eta)y_0 + D_0^2 y_0 = 0 \quad (43)$$

Sınır şartları

SINIR, SINIR

$$y_0(0, T_0, T_1) = y_0''(0, T_0, T_1) = 0 \text{ ve } y_0(1, T_0, T_1) = y_0''(1, T_0, T_1) = 0 \quad (44.a, b)$$

ϵ^1 :

$$y_1'' + P_0 y_1'' + k\delta(x-\eta)y_1 + D_0^2 y_1 = -2D_0 D_1 y_{10} - P_1 \cos \Omega T_0 y_{10}'' \quad (45)$$

Sınır şartları

$$y_1(0, T_0, T_1) = y_1''(0, T_0, T_1) = 0 \text{ ve } y_1(1, T_0, T_1) = y_1''(1, T_0, T_1) = 0 \quad (46.a, b)$$

ϵ^0 mertebesindeki çözümleri aşağıdaki gibidir

$$y_0 = (A(T_1)e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_n T_0})X_n(x) \quad (47)$$

Bu çözüm önerisini Denklem (43) ve (44)'de yerine yazarsak

$$X_n'' + P_0 X_n'' + kX_n \delta(x-\eta) - \omega_n^2 X_n = 0 \quad (48)$$

$$X_n(0) = X_n''(0) = 0 \text{ ve } X_n(1) = X_n''(1) = 0 \quad (49.a, b)$$

Denklem (48)'in analitik çözümünü bulunamaz. Dolayısıyla doğal frekansı ve mod yapısını belirlemek için nümerik bir yaklaşıma ihtiyaç vardır. Denklem (48) de sadece konuma bağlı türevler olduğu için bütün terimlerde çok iyi bilinen merkezi sonlu fark açılımı uygulanacaktır. Merkezi sonlu farklar

$$X_n'' = \frac{1}{\Delta x^4} (X_n^{i+2} - 4X_n^{i+1} + 6X_n^i - 4X_n^{i-1} + X_n^{i-2}) \quad (50.a)$$

$$X_n'' = \frac{1}{\Delta x^2} (X_n^{i+1} - 2X_n^i + X_n^{i-1}) \quad (50.b)$$

Bu açılımlar kullanılarak elde edilen denklem sisteminin matris formda gösterimi

$$\begin{bmatrix} p-1 & r & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & p & r & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r & p & r & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r & p & r & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & r & p & r & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & r & p & r & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & p & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & p & r & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & r & p & r & 0 \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \\ X_n^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n^{M-3} \\ X_n^{M-2} \\ X_n^{M-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (51)$$

şeklinde. Matriste gösterilen

$$r = -4 + P_0 \Delta x^2, \quad p = 6 - 2P_0 \Delta x^2 - \omega^2 \Delta x^4 \quad (52. a, b)$$

Yayın bulunduğu noktada sadece küçük bir değişim olacaktır. Bu noktada

$$p = 6 - 2P_0 \Delta x^2 - \omega^2 \Delta x^4 + k \Delta x^4 \quad (53)$$

şekline dönüşecektir. Çözümden de anlaşılacağı üzere yay ne kadar fazla olursa olsun problemin bilgisayar programını oluşturmak oldukça kolaydır. Basit olmayan çözüm için katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olma şartı vardır. Bu şartı kullanarak sistemin doğal frekansını yaklaşık olarak bulabiliriz. Ayrıca mod yapısı da nümerik olarak elde edilmiş olur.

Perturbatif çözüme devam edersek Denklem (36) ve (40) elde ederiz. Ancak bu denklemlerdeki katsayı aşağıdaki gibi değişir:

$$k_0 = -i \frac{P_1}{4\omega_n} \int_0^1 X_n'' X_n'' dx \quad (54)$$

SINIR, SINIR

Bu katsayı elde edilirken $\int_0^1 X_n^2 dx = 1$ normalizasyonu yapılmıştır.

Denklem (54) de verilen katsayının içinde belirli integral vardır. Nümerik olarak mod yapısını elde ettiğimiz için bu belirli integrali hesaplamak için de nümerik integrasyon metodu kullanılmıştır. Bu çalışmada nümerik integrasyon metodu olarak Simpson metodu kullanılmıştır. Simpson metodunda

$$\int_0^1 f(x) dx \cong \frac{\Delta x}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{M-2} + 4f_{M-1} + f_M) \quad (55)$$

Bu çalışmada

$$f_i = \frac{X_n^i}{\Delta x^2} (X_n^{i+1} - 2X_n^i + X_n^{i-1}) \quad (56)$$

şeklindedir.

4. SAYISAL SONUÇLAR

Geliştirilen yeni yöntem de sonlu farklar açılımı kullanılmaktadır. Sonlu fark açılımında N toplam grid noktası sayısını göstermektedir. Bu çalışmada N=100 almak yeterli olmakla birlikte bazı sayısal değerleri elde ederken N=200 alınmıştır. Aşağıdaki tabloda farklı yay katsayısı ve noktası için elde edilmiş kritik aksenal yük değerlerinin karşılaştırılması verilmiştir.

Tablo1. Klasik yöntem (siyah) ve sonlu fark yöntemi(mavi) ile elde edilen kritik aksenal yükün karşılaştırılması (N=200)

η	k	100	1000		
0.1		11.6355	11.6353	18.6836	18.6820
0.3		20.4587	20.4582	30.7234	30.7207
0.5		29.2960	29.2957	39.4784	39.4752

Tablodaki değerlerden de anlaşılacağı üzere virgülden sonra bindelik düzeylerde hata vardır. Bu çok iyi bir sonuçtur. Benzeri şekilde çok iyi sonuçları frekans değerleri içinde elde edebiliriz. Bunun için elde edilen sonuçlarda Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. Klasik yöntem (siyah) ve sonlu fark yöntemi(mavi) ile $P_0=10$ için elde edilen doğal frekansların karşılaştırılması (N=200)

η	k	100	1000		
0.1		4.0239	4.0236	9.7712	9.7702
0.3		10.4605	10.4602	19.5262	19.5244
0.5		13.8591	13.8587	34.1140	34.1107

Sonuçlar göstermiştir ki klasik yöntem ile sonlu farklarla elde edilen sonuçlar bir birine çok yakındır. Bu iki yöntemin uygulanması mümkündür.

Karşılaştırmak amacıyla her iki yöntem ile elde edilen k_0 sayıları tablo halinde Tablo 3'de verilmiştir. Görüldüğü üzere sonuçlar mükemmel uyum içindedir. Geliştirilen bu yeni yöntemin birçok araştırmacı tarafından kullanılacağı umulmaktadır.

Tablo 3. Klasik yöntem (siyah) ve sonlu fark yöntemi(mavi) ile $P_0=10$ ve $P_1=1$ için elde edilen k_0 değerlerinin karşılaştırılması (N=200)

η	k 100		1000	
	Siyah	Mavi	Siyah	Mavi
0.1	-0.6150	-0.6150	-0.2778	-0.2769
0.3	-0.2466	-0.2457	-0.2212	-0.2495
0.5	-0.1792	-0.1792	-0.0984	-0.1067

5.SONUÇ

Birçok mühendislik yapısı içerisinde süreksizlikler içeren yapı elemanlarından oluşur. Süreksizlik içeren yapıların analizinde süreksizlik sayısı arttıkça sorunlar ortaya çıkmaktadır. Bu durumda sayısal yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Özellikle dinamik ve non-lineer analiz için sayısal yöntemlere sıklıkla başvurulmaktadır. Pertürbasyon tekniği dinamik analizde çok güçlü bir tekniktir. Özellikle çok zaman ölçekli metot yapı elemanlarının dinamik analizinde çok yaygın olarak kullanılmaktadır. Pertürbasyon tekniği ile bir dinamik analiz sonucunda çeşitli rezonans durumları (baskın, parametrik, alt ve üst harmonik, 1:1, 1:2, 1:3 gibi iç rezonans), stabile şartları, zorlama- tepki grafikleri ve çeşitli bifurkasyon noktaları analiz edilebilir. Bu çalışmada pertürbasyon tekniğinin dinamik analizdeki avantajları ile sayısal yöntemin süreksizlik durumdaki avantajlarının birleştirilmesi sağlanarak yeni bir metot geliştirildi.

Geliştirilen yeni yöntem ile

- ✓ süreksizlik içeren durumların
- ✓ keyfi bir fonksiyona bağlı değişen durumların

analizleri yapılabilir.

Çok yaygın kullanılan bir yanlış vardır: sonlu elemanlar ile dinamik analiz. Aslında sonlu elemanlarla konumda ayrıklaştırma yapılır. Dinamik analiz kısmı yani zamanla değişim kısmında da çeşitli sayısal teknikler kullanılır. Aslında geliştirilen bu yeni yöntem ile çok önemli bilgisayar programları geliştirilebilir. Önü çok açık ve uygulama alanı çok geniş bir çalışmadır.

KAYNAKLAR

- [1]. S. Naguleswaran. Transverse vibration and stability of an Euler–Bernoulli beam with step change in cross-section and in axial force Journal of Sound and Vibration 270 (2004) 1045–1055
- [2]. K.H. Low. On the methods to derive frequency equations of beams carrying multiple masses International Journal of Mechanical Sciences 43 (2001) 871-881
- [3]. E. Özkaya and M. Pakdemirli, Non-linear vibrations of a beam-mass system with both ends clamped, Journal of Sound and Vibration 221, 491-503, 1999.
- [4]. A. Tekin, E. Özkaya, and S. M. Bağdatlı. Three-to-one internal resonance in multiple stepped beam systems, Appl. Math. Mech. -Engl. Ed. 30(9), 1131–1142 (2009)
- [5]. H. R. Öz and E. Özkaya. Natural Frequencies of Beam-Mass Systems in Transverse Motion for Different End Conditions, Mathematical and Computational Applications, Vol. 10, No. 3, pp. 369-376, 2005.
- [6]. M.Pakdemirli, H.Boyacı, Comparision of direct-perturbation methods with discretization-perturbation methods for nonlinear vibrations, Journal of Sound and Vibration 186 (1995) 837–845.

SINIR, SINIR

- [7]. M.Pakdemirli, H.Boyacı, The direct perturbation method versus the discretization perturbation method: linear systems, *Journal of Sound and Vibration* 199 (5) (1997)825–832.
- [8]. H.Boyacı, M.Pakdemirli, A comparison of different versions of the method of multiple scales for partial differential equations, *Journal of Sound and Vibration* 204(4)(1997)595–607.
- [9]. H. R. Öz and M. Pakdemirli. Vibrations of an axially moving beam with time dependent velocity, *Journal of Sound and Vibration* 227(2)(1999), 239-257.