İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ⋆ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEMİ-SİMETRİK METRİK F-KONNEKSİYONLU UZAYLAR

Yüksek Lisans Tezi
Ahmet Altundağ
(509051001)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 5 Mayıs 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Haziran 2008

Tez Danışmanı: –Yard. Doç. Dr. Fatma Özdemir

Jüri Üyesi: –Prof.Dr. Zerrin Şentürk

Jüri Üyesi: –Yard. Doç. Dr. Meltem Güngörmez

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın oluşumunda bilgisi ve eşsiz desteğiyle bana rehberlik eden değerli hocam Yrd. Doç. Dr Fatma Özdemir teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Tezimin yazımında emeği geçmiş çalışma arkadaşlarım Araş.Gör. Sevgi Harman, Araş.Gör. Ali Demirci, Araş.Gör. Hale Aytaç ve Araş.Gör.Serkan Karaçuha'ya teşekkür ederim. Ayrıca, tez süresi boyunca bana sabır gösteren ve her türlü yardımını esirgemeyen kız arkadaşım Yasemin Atalar'a şükranlarımı sunuyorum.

Desteklerini her zaman her konuda yanımda hissettiğim başta annem olmak üzere tüm aileme emekleri için minnettarım.

Mayıs, 2008 Ahmet Altundağ

İÇİNDEKİLER

SEMİ-SİMETRİK METRİK F-KONNEKSİYONLU UZAYLAR

ÖZET

Literatürde semi-simetrik metrik F-konneksiyonlu uzaylar birçok yazar tarafından incelenmiştir [1-3].

Bu çalışmada, Yano ve Imai'nin [3]'de ele aldığı semi-simetrik metrik F-konneksiyonlu uzaylar gözönüne alınmıştır. Bu uzaylarda, yaklaşık yapı, Hermitsel yapı, kaehler yapı tanımları verilip uzayın eğrilik tensörünün sıfır olması durumunda Bochner eğrilik tensörünün de sıfır olacağı gösterilmiştir.

Ayrıca, semi-simetrik metrik F-konneksiyonlu uzayların hangi koşullar altında yaklaşık Kaehler uzayı ve Kaehler uzayı olacağı teoremlerle ifade ve ispat edilmiştir.

Birinci bölümde Riemann uzayına ait temel kavramlar ele alınmıştır.

M_n bir Riemann manifoldu olsun. M_n üzerinde (1,1) tipinde tanımlı olan bir $F_i^{\ j}$ tensörü

$$F_i^{\ j} F_j^{\ k} = -\delta_i^k, \tag{1}$$

koşulunu sağlıyorsa $F_i^{\ j}$ tensörüne yaklaşık kompleks yapı ve $(M_n, F_i^{\ j})$ ikilisine de yaklaşık kompleks uzay denir.

Eğer M_n üzerinde bir yaklaşık kompleks $F_i^{\ j}$ yapısı varsa ve g_{ij} Riemann metrik tensörü

$$g_{ij} F_h^{\ i} F_k^{\ j} = g_{hk}, \tag{2}$$

koşulunu sağlarsa $(F_i^{\ j}, g_{hk},)$ çiftine M_n üzerinde yaklaşık Hermitsel yapı denir.

Eğer M_n üzerinde $F_i^{\ j}$ Hermitsel yapısı her i, j, k için

$$\nabla_k F_i^{\ j} = 0\,, \tag{3}$$

bağıntısını sağlıyorsa $F_i^{\ j}$ yaklaşık kompleks yapısına Kaehler yapı denir.

yaklaşık $F_i^{\ j}$ Hermitsel yapısı

$$F_{hij} = \nabla_h F_{ij} + \nabla_i F_{jh} + \nabla_j F_{hi} = 0, \tag{4}$$

bağıntısını gerçekleşiyorsa $F_i^{\ j}$ tensörüne yaklaşık Kaehler yapı denir.

Yaklaşık $F_i^{\ j}$ yapısı

$$F_i = -\nabla_j F_i^{\ j} = 0\,, \tag{5}$$

koşulunu sağlarsa $F_i^{\ j}$ tensörüne yaklaşık semi Kaehler yapısı denir.

Bu bölümde, yaklaşık yapı yardımıyla burulma tensörü tanımı verilmiş ve yaklaşık yapının integre edilebilme koşulu ifade edilmiştir. Ayrıca, M_n Kaehler manifoldunda Bochner eğrilik tensörü tanımı verilmiştir.

İkinci bölümde semi-simetrik konneksiyon ve semi-simetrik metrik F-konneksiyon tanımları verilmiştir.

M_n n-boyutlu diferansiyellenebilen, g Riemann metriğine sahip bir manifold olsun ve ∇, Riemann konneksiyonu, D de herhangi bir lineer konneksiyonu göstersin. M_n üzerinde herhangi bir p_j vektör bileşeni için D konneksiyonunun burulma tensörü

$$T_{jk}{}^{i} = p_j\, \delta^i_k - p_k\, \delta^i_j \,, \tag{6}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu konneksiyona semi-simetrik konneksiyon denir.

$\Gamma_{ji}{}^{h}$, D afin konneksiyonunun katsayıları olsun. Eğer D konneksiyonu için

$$D_k\, g_{ij} = 0\,, \qquad D_j\, F_i{}^{h} = 0\,, \tag{7}$$

koşulları sağlanıyorsa D'ye metrik F-konneksiyon denir. $\left\{ {h \atop ij} \right\}$, ∇ Riemann konneksiyon katsayıları ve $\Gamma_{ij}{}^{h}$ lar da D konneksiyon katsayıları olsun. Eğer D konneksiyonuna ait katsayılar

$$\Gamma_{ji}{}^{h} = \left\{ {h \atop ji} \right\} + U_{ji}{}^{h}\,, \tag{8}$$

şeklinde ele alınırsa, D konneksiyonun burulma tensörü

$$S_{ji}{}^{h} = U_{ji}{}^{h} - U_{ij}{}^{h}, \tag{9}$$

olarak elde edilir.

D metrik konneksiyon ise

$$U_{kj}{}^{t}\, g_{ti} + U_{ki}{}^{t}\, g_{tj} = 0, \tag{10}$$

dir. D konneksiyonu metrik F-konneksiyonu ise

$$U_{ji}{}^{t} F_t{}^{h} - U_{jt}{}^{h} F_i{}^{t} = 0, \tag{11}$$

dir.

p_i, 1-form, q^h herhangi bir kontravaryant vektör alanı ve F_{ji} anti-simetrik bir tensörün bileşenleri olmak üzere

$$S_{ji}{}^{h} = \delta^h_j\, p_i - \delta^h_i\, p_j - 2F_{ji}\, q^h\,, \tag{12}$$

şeklinde bir burulma tensörü ele alınırsa, D konneksiyonuna semi-simetrik metrik F-konneksiyon denir.

D konneksiyonu semi-simetrik ve metrik konneksiyon ise bu durumda

$$U_{ji}{}^{h} = \delta^h_j\, p_i - g_{ji}\, p^h + F_i{}^{h}\, q_j + F_j{}^{h}\, q_i - F_{ji}\, q^h, \tag{13}$$

elde edilir. Bu bölümde (7)'i sağlayan D konneksiyonu için konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ji}{}^{h} = \left\{ {h \atop ji} \right\} + \delta_j^h\, p^i - g_{ji}\, p^h + F_j{}^h\, q_i + F_i{}^h\, q_j - F_{ji}\, q^h, \tag{14}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada

$$p_i = -q^t F_{ti}, \qquad q_i = p^t F_{ti}\,, \tag{15}$$

dir.

Önerme. g_{ij} Hermitsel metrik tensörüne ve $F_i{}^h$ kompleks yapısına sahip bir Kaehler manifoldunda p_i ve q_i formları (15) daki gibi tanımlanmış olsun. Bu durumda semi-simetrik metrik F-konneksiyonu D nin katsayıları (14) şeklindedir.

Semi-simetrik metrik F-konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} L_{kji}{}^{h} = R_{kji}{}^{h} &+ \delta_k^h(p_i p_j - g_{ji}p_t p^t - q_i q_j - F_{ji}p_t q^t - \nabla_j p_i) \\ &+\delta_j^h(-p_i p_k + g_{ki}p_t p^t + q_i q_k + F_{ki}p_t q^t + \nabla_k p_i) \\ &+g_{ij}(p^h p_k - q_k q^h - \nabla_k p^h) + g_{ik}(q^h q_j - p^h p_j + \nabla_j p^h) + 2F_{jk}(-p^h q_i + q^h p_i) \\ &+F_{ik}(p^h q_j + p_j q^h - \nabla_j q^h) + F_{ji}(p_k q^h + p^h q_k - \nabla_k q^h) \\ &+F_k{}^h(q_i p_j + q_j p_i - g_{ji}p^t q_t - F_{ji}q_t q^t - \nabla_j q_i) \\ &+F_j{}^h(-q_i p_k - q_k p_i + g_{ki}q_t p^t + F_{ki}q_t q^t + \nabla_k q_i) + F_i{}^h(\nabla_k q_j - \nabla_j q_k), \end{aligned} \tag{16}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada p_{ij} ve q_{ij} tensörleri

$$p_{ji} = \nabla_j p_i - p_j p_i + q_j q_i + \frac{1}{2}p_t\, p^t g_{ji}\,, \tag{17}$$

$$q_{ji} = \nabla_j q_i - p_j q_i + p_i q_j + \frac{1}{2}p_t\, p^t F_{ji}\,, \tag{18}$$

dir. Eğer semi-simetrik metrik F-konneksiyonlu uzayın eğrilik tensörü $L_{kji}{}^{h} = 0$ ise $p_{ij} = p_{ji}$ ve $q_{ij} + q_{ji} = 0$ olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca Kaehler manifoldunda ($n \geq 4$) için $L_{kji}{}^{h} = 0$ ise manifoldun Bochner eğriliğinin sıfır olduğu gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde, semi-simetrik metrik F-konneksiyonlu uzayların yaklaşık Kaehler uzayı ve Kaehler uzayı olması ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

SEMI-SYMMETRIC METRIC F-CONNECTION SPACES

SUMMARY

In literature semi-symmetric metric F-connection spaces have been interested by many authors [1-3].

In this study, the semi-symmetric metric F-connections, which were studied by Yano and Imai at (3), were examined in general. In these spaces, after giving the definitions of an almost complex structures, an almost Hermitian structure, Kaehlerian structure, it has been shown that, if the curvature tensor equals to zero then Bochner curvature tensor also becomes zero.

Then, some basic theorems about the conditions under which a semi-symmetric F-connection space turns out to be an almost Kaehlerian space or a Kaehlerian space, have been stated and proved.

Also, the definition of Riemannian space, and properties related to these spaces are given.

Supposing that M_n is a Riemannian manifold, a tensor $F_i^{\ j}$ of order $(1,1)$ is an almost complex structure on M_n. If the tensor $F_i^{\ j}$ satisfies the condition

$$F_i^{\ j} F_j^{\ k} = -\delta_i^k, \tag{1}$$

then $(M_n, F_i^{\ j})$ is called an almost complex space.

If M_n admits an almost complex structure $F_i^{\ j}$ and the metric tensor g_{ij} of M_n satisfies

$$g_{ij} F_h^{\ i} F_k^{\ j} = g_{hk}, \tag{2}$$

then the $(F_i^{\ j}, g_{hk})$ is called an almost Hermitian structure on M_n. In this context an almost Hermitian structure $F_i^{\ j}$ (respectively,space) is a Kaehlerian structure (respectively, space) if the tensor $F_i^{\ j}$ satisfies

$$\nabla_k F_i^{\ j} = 0, \tag{3}$$

for all i, j, k and it is called an almost Kaehlerian structure, if the tensor $F_i^{\ j}$ satisfies the relation

$$F_{hij} = \nabla_h F_{ij} + \nabla_i F_{jh} + \nabla_j F_{hi} = 0. \tag{4}$$

and also it will be called an almost semi-Kaehlerian structure if the tensor $F_i^{\ j}$ satisfies

$$F_i = -\nabla_j F_i^{\ j} = 0. \tag{5}$$

In this section, the definition of the torsion tensor is given by means of an almost complex structure and Bochner curvature.

In the second section the definitions of semi-symmetric connection and semi-symmetric metric F-connection were given at first.

Supposing that M_n is an n-dimensional differentiable manifold having the Riemannian metric g, ∇ is the Riemanniann connection and D is any lineer connection with components $\Gamma_{ji}{}^{h}$, the torsion tensor of the connection D for any arbitrary vector component p_j on M_n is defined as follows.

$$T_{jk}{}^{i} = p_j\, \delta^i_k - p_k\, \delta^i_j\,. \tag{6}$$

Now, this connection is called a semi-symmetric connection.

If D satisfies

$$D_k\, g_{ij} = 0\,, \qquad D_j\, F_i{}^{h} = 0, \tag{7}$$

then D is called a metric F-connection.

Let $\left\{ {h \atop ij} \right\}$ be the coefficients of ∇ Riemannienn connection and $\Gamma_{ij}{}^{h}$ of D.

If the coefficients of D are in the form of

$$\Gamma_{ji}{}^{h} = \left\{ {h \atop ji} \right\} + U_{ji}{}^{h}\,, \tag{8}$$

where $\left\{ {h \atop ij} \right\}$ is the coefficients of ∇ Riemannienn connection then the torsion tensor $S_{ji}{}^{h}$ of the connection, D is given by

$$S_{ji}{}^{h} = U_{ji}{}^{h} - U_{ij}{}^{h}\,, \tag{9}$$

If D is a metric connection then it is satisfied that

$$U_{kj}{}^{t}\, g_{ti} + U_{ki}{}^{t}\, g_{tj} = 0. \tag{10}$$

Moreover, if D is a metric F-connection then, in this case we have

$$U_{ji}{}^{t} F_t{}^{h} - U_{jt}{}^{h} F_i{}^{t}\,, = 0. \tag{11}$$

An affine connection having the torsion tensor $S_{ji}{}^{h}$ satisfying

$$S_{ji}{}^{h} = \delta^h_j\, p_i - \delta^h_i\, p_j - 2F_{ji}\, q^h\,, \tag{12}$$

where p_i is a 1-form and q^h a contravariant vector field, is called a semi symmetric connection. If D is a semi-symmetric and metric connection then we obtain that

$$U_{ji}{}^{h} = \delta^h_j\, p_i - g_{ji}\, p^h + F_i{}^{h}\, q_j + F_j{}^{h}\, q_i - F_{ji}\, q^h\,, \tag{13}$$

where $p^h = p_t g^{th}$, $\qquad$ and $q_i = q^t g_{ti}\,.$

In this section, the coefficients of the connections satisfying (7) are obtained in the form of

$$\Gamma_{ji}{}^{h} = \left\{ {h \atop ji} \right\} + \delta_j^h\, p^{i} - g_{ji}\, p^{h} + F_j{}^{h}\, q_i + F_i{}^{h}\, q_j - F_{ji}\, q^{h}\,, \tag{14}$$

where

$$p_i = -F_{ti} q^t, \qquad q_i = F_t p^t\,. \tag{15}$$

Proposition. In a Kaehler manifold with Hermitian metric tensor g_{ij} and complex structure tensor $F_i{}^{h}$, a semi-symmetric metric F-connection is given by (14) with p_i and q_i satisfying (15).

In the space with semi-symmetric metric F-connection the curvature tensor is obtained as

$$\begin{aligned} L_{kji}{}^{h} = {} & R_{kji}{}^{h} + \delta_k^h(p_i p_j - g_{ji} p_t p^t - q_i q_j - F_{ji} p_t q^t - \nabla_j p_i) \\ & + \delta_j^h(-p_i p_k + g_{ki} p_t p^t + q_i q_k + F_{ki} p_t q^t + \nabla_k p_i) \\ & + g_{ij}(p^h p_k - q_k q^h - \nabla_k p^h) + g_{ik}(q^h q_j - p^h p_j + \nabla_j p^h) + 2F_{jk}(-p^h q_i + q^h p_i) \\ & + F_{ik}(p^h q_j + p_j q^h - \nabla_j q^h) + F_{ji}(p_k q^h + p^h q_k - \nabla_k q^h) \\ & + F_k{}^{h}(q_i p_j + q_j p_i - g_{ji} p^t q_t - F_{ji} q_t q^t - \nabla_j q_i) \\ & + F_j{}^{h}(-q_i p_k - q_k p_i + g_{ki} q_t p^t + F_{ki} q_t q^t + \nabla_k q_i) + F_i{}^{h}(\nabla_k q_j - \nabla_j q_k)\,, \end{aligned} \tag{16}$$

where the tensors p_{ij} and q_{ij} are in the form

$$p_{ji} = \nabla_j p_i - p_j p_i + q_j q_i + \frac{1}{2} p_t p^t g_{ji}\,, \tag{17}$$

$$q_{ji} = \nabla_j q_i - p_j q_i + p_i q_j + \frac{1}{2} p_t p^t F_{ji}\,, \tag{18}$$

If the curvature tensor of semi-symmetric metric F-connection space is $L_{kji}{}^{h} = 0$ then $p_{ij} = p_{ji}$ and $q_{ij} + q_{ji} = 0$.

Moreover, in a Kaehlerien manifold for $(n \geq 4)$, if $L_{kji}{}^{h} = 0$ then it can be shown that the Bochner curvature of the manifold is also zero.

In the third section, the theorems, related to the fact that the semi-symmetric metric F-connection spaces become an almost Kaehlerian space and a Kaehlerian space, are stated and proved.

1 BÖLÜM

1.1 GİRİŞ

1854 yılında Riemann herhangi bir koordinat sistemindeki koordinatları x^i ve $x^i + dx^i$ olan birbirine çok yakın iki nokta arasındaki sonsuz küçük ds mesafe yi, g_{ij} katsayıları x^i koordinatlarının fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlamıştır

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.1.1}$$

Burada g_{ij} katsayıları Riemann metriği olarak adlandırılır. Böyle bir metrik ile karakterize edilen uzaya Riemann uzayı ve Riemann metriğine dayanan geometriye de Riemann geometrisi denir [4] ,[5].

Tanım 1.1.1. g_{ij} metrik tensörü ile verilmiş bir M_n Riemann uzayında bu metrik tensörle uyumlu, Γ^i_{jk} ve $\Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 'lar sırasıyla x ve x' koordinatlarının fonksiyonları olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^k}{\partial x'^{\beta}} = \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\gamma}} \tag{1.1.2}$$

denklemini sağlayan bir ve yalnız bir konneksiyon vardır. Burada adı geçen Γ fonksiyonlarına konneksiyon katsayıları denir [5].

Özel olarak Γ^i_{jk} konneksiyonu Riemann konneksiyonu (Levi-Civita) ise bu durumda

$$g^{ih} g_{jh} = \delta^i_j, \qquad \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} = g^{ij}[jk, h], \qquad [jk, h] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kh}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h}\right) \tag{1.1.3}$$

dir.

Burada $[jk,h]$ ifadesine 1. cins, $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ ifadesine ise 2. cins Christoffel sembolü denir. Görüldüğü gibi Chiristoffel sembolleri alt iki indise göre simetriktir. Bir Riemann uzayında g_{ij} metrik tensörü ile bağdaşan bir ve yalnız bir ∇ Riemann konneksiyonu vardır [5].

Tanım 1.1.2. M bir Haussdorff uzayı olsun. M nin her p komşuluğunun uygun bir U civarını, R^n nin açık bir V alt cümlesine tasvir eden bir φ homeomorfizması varsa, M ye n-boyutlu topolojik manifold ve (U,φ) çiftine de p nin bir koordinat komşuluğu denir.

M bir topolojik manifold olsun. A indis cümlesi, U_α da A yardımı ile belirlenmiş açık cümleler ailesi olmak üzere, M üzerinde bir $S = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}\}$ kolleksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu kolleksiyona M üzerinde n-boyutlu diferansiyellenebilir bir yapı oluşturur denir [6].

i) $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$

ii) Herhangi bir $\alpha,\beta \in A$ için $f_{\beta\alpha}$ ve $f_{\alpha\beta}$ fonksiyonları

$$f_{\beta\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \; : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset R^n \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset R^n$$

$$f_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} \; : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset R^n \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset R^n$$

diferansiyellenebilir tasvirdir.

iii) $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ailesi (i) ve (ii) koşullarına göre maksimaldir.

M_n, C^∞ sınıfından ve yerel ifadesi

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n). \tag{1.1.4}$$

ile verilen bir Riemann metriğiyle belirlenmiş diferansiyellenebilen bir manifold olsun. M_n üzerindeki $\Gamma_{jk}{}^i$ konneksiyon katsayıları simetrik ve antisimetrik kısımlarına ayrıştırılabilir. $\Gamma_{jk}{}^i$ konneksiyon katsayılarının simetrik kısmını $\Lambda_{jk}{}^i$ ve antisimetrik kısmını da $\Omega_{jk}{}^i$ ile ifade edersek;

$$\Lambda_{jk}{}^i = \Gamma_{(jk)}^{\,i} = \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}{}^i + \Gamma_{kj}{}^i) \tag{1.1.5}$$

$$\Omega_{jk}{}^i = \Gamma_{[jk]}^{\,i} = \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}{}^i - \Gamma_{kj}{}^i) \tag{1.1.6}$$

şeklinde olur, burada $\Lambda_{jk}{}^{i}$ konneksiyon katsayısı, $\Omega_{jk}{}^{i}$ ise bir tensördür ve bu tensör konneksiyonun burulma tensörü adını alır. (1.1.5) ve (1.1.6) denklemlerinden

$$\Gamma_{jk}{}^{i} = \Lambda_{jk}{}^{i} + \Omega_{jk}{}^{i} \tag{1.1.7}$$

yazılır.

v^i bir kontravaryant vektör alanı, v_i bir kovaryant vektör alanı ve $T_{ji}{}^{h}$ da bir tensör alanının bileşenleri olmak üzere bu büyüklüklerin bir ∇ konneksiyonuna göre kovaryant türevleri sırasıyla

$$\nabla_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^h \Gamma_{hj}{}^{i}, \tag{1.1.8}$$

$$\nabla_j v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - v_k \Gamma_{ij}{}^{k}, \tag{1.1.9}$$

$$\nabla_k T_{ji}{}^{h} = \frac{\partial T_{ji}{}^{a}}{\partial x^k} + T_{ij}{}^{a}\, \Gamma_{ka}{}^{h} - T_{ai}{}^{h}\, \Gamma_{kj}{}^{a} - T_{ja}{}^{h}\, \Gamma_{ki}{}^{a}, \tag{1.1.10}$$

şeklindedir [7,8].

Ayrıca (1.1.3) ve (2.1.3) dan kolayca görüleceği gibi g_{ij} metrik tensörünün Levi-Civita konneksiyonuna göre kovaryant türevi

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} a \\ kj \end{matrix} \right\} g_{ai} - \left\{ \begin{matrix} a \\ ki \end{matrix} \right\} g_{aj} = 0, \tag{1.1.11}$$

olarak elde edilir.

Bir M_n manifoldunun eğrilik tensörü, en genel haliyle

$$L_{kji}{}^{h} = \partial_k \Gamma_{ji}{}^{h} - \partial_j\, \Gamma_{ki}{}^{h} + \Gamma_{kt}{}^{h} \Gamma_{ji}{}^{t} - \Gamma_{jt}{}^{h}\, \Gamma_{ki}{}^{t}, \quad (\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}) \tag{1.1.12}$$

şeklindedir, burada $\Gamma_{ji}{}^{h}$ fonksiyonları ikinci cins Christoffel sembolleri olan $\left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\}$ lerle yer değiştirirse, g_{ij} metrik tensörü ile verilen bir Riemann uzayının Riemann-Christoffel eğrilik tensörü,

$$R_{kji}{}^{h} = \partial_k \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} - \partial_j \left\{ \begin{matrix} h \\ ki \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ka \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a \\ ji \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} h \\ ja \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a \\ ki \end{matrix} \right\}, \tag{1.1.13}$$

şekline dönüşür [7].

M_n üzerinde, v^h bir kontravaryant vektör alanının, w_i bir kovaryant vektör alanının, f bir skaler fonksiyonunun, $T_{ji}{}^{h}$ $(1,2)$ tipinde herhangi bir tensör alanının ve $S_{ji}{}^{h}$ da burulma tensörünün bileşenlerini göstersin. Bu durumda $L_{kji}{}^{h}$ eğrilik tensörü aşağıdaki Ricci özdeşliklerini sağlar:

$$\nabla_k \nabla_j v^h - \nabla_j \nabla_k v^h = R_{kji}{}^h v^i - 2S_{kj}{}^t \nabla_t v^h, \tag{1.1.14}$$

$$\nabla_k \nabla_j \omega_i - \nabla_j \nabla_k \omega_i = -R_{kji}{}^h w_h - 2S_{kj}{}^t \nabla_t w_i, \tag{1.1.15}$$

$$\nabla_j \nabla_i f - \nabla_i \nabla_j f = -2S_{ji}{}^h \nabla_h f, \tag{1.1.16}$$

$$\nabla_l \nabla_k T_{ji}{}^h - \nabla_k \nabla_l T_{ji}{}^h = R_{lkt}{}^h T_{ji}{}^t - R_{lkj}{}^t T_{ti}{}^h - R_{lki}{}^t T_{jt}{}^h - 2S_{lk}{}^t \nabla_t T_{ji}{}^h. \tag{1.1.17}$$

Özel olarak M_n uzayı Riemann uzayı ise $S_{kj}{}^t = 0$ olacağından Riemann uzayı ile ilgili Ricci özdeşliklerine ulaşılır.

(1.1.13) den Riemann-Christoffel eğrilik tensörünün

$$R_{kji}{}^h = -R_{jki}{}^h\,, \tag{1.1.18}$$

$$R_{kji}{}^h + R_{jik}{}^h + R_{ikj}{}^h = 0\,, \tag{1.1.19}$$

özelliklerine sahip olduğu görülür.

Dördüncü dereceden R_{kjih} kovaryant eğrilik tensörü

$$R_{kjih} = R_{kji}{}^a\, g_{ah}\,, \tag{1.1.20}$$

şeklinde tanımlanmıştır ve aşağıdaki özellikleri sağlar [7]:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad R_{kjih} + R_{jikh} + R_{ikjh} = 0\,,\\
&(2) \qquad R_{kjih} = -R_{jkih}\,,\\
&(3) \qquad R_{kjih} = -R_{kjhi}\,,\\
&(4) \qquad R_{kjih} = R_{ihkj}\,,\\
&(5) \qquad R_{kkih} = -R_{kjhh} = 0\,.
\end{aligned} \tag{1.1.21}$$

(1) özdeşliğine birinci Bianchi özdeşliği denir. Ayrıca, eğrilik tensörünün Riemann konneksiyonuna göre kovaryant türevi

$$\nabla_l R_{kji}{}^h + \nabla_k\, R_{jli}{}^h + \nabla_j\, R_{lki}{}^h = 0\,, \tag{1.1.22}$$

ikinci Bianchi özdeşliğini sağlar [7].

(1.1.13) de h ve k indisleri üzerine daraltma yapılırsa

$$R_{ji} = R_{aji}{}^{a} \,, \tag{1.1.23}$$

şeklinde tanımlanan Ricci tensörüne ulaşılır, buradan

$$R_{ji} = R_{aji}{}^{a} = g^{ab}\, R_{ajib} = g^{ba}\, R_{ibaj} = g^{ba}\, R_{bija} = R_{ij} \,, \tag{1.1.24}$$

eşitliğinden Ricci tensörünün simetrik olduğu görülür. Ricci tensörü yardımıyla Riemann uzayının skaler eğriliği

$$R = g^{ji} R_{ji} \,, \tag{1.1.25}$$

şeklinde tanımlanır.

g metriğine sahip bir M_n Riemann uzayının eğrilik tensörü

$$R_{kjih} = 0 \,, \tag{1.1.26}$$

koşulunu sağlıyorsa Riemann uzayına düz uzay denir.

(1.1.22) de yani, 2. Bianchi özdeşliğinde l ve h indisleri üzerinde daraltma yapılırsa

$$\nabla_l R_{kji}{}^{l} = \nabla_k\, R_{ji} - \nabla_j\, R_{ki} \,, \tag{1.1.27}$$

elde edilir. (1.1.27) denklemi g^{ji} ile çarpılırsa

$$g^{ji} \nabla_l\, R_{kji}{}^{l} = \nabla_k\, R - \nabla_j\, R_k^{\;j} \,, \tag{1.1.28}$$

bulunur. (1.1.18) denklemi kullanılırsa

$$-g^{ji} \nabla_l\, R_{jki}{}^{l} = \nabla_k\, R - \nabla_j\, R_k^{\;j} \,, \tag{1.1.29}$$

bulunur. Buradan da (1.1.21) kullanılarak

$$-g^{ji} g^{lm} \nabla_l R_{jkmi} = \nabla_k R - \nabla_j R_k^j \,,$$

$$g^{lm} \nabla_l R_{jkm}{}^{j} = \nabla_k R - \nabla_j R_k^{\;j} \,,$$

$$\nabla_l R_{km} g^{lm} = \nabla_k R - \nabla_j R_k^{\;j} \,,$$

$$2 \nabla_l R_k^l = \nabla_k R \,, \tag{1.1.30}$$

bağıntısı elde edilir.[7]

1.2 Kompleks ve Kaehler Uzaylar

Tanım 1.2.1. *I bir reel V vektör uzayının birim dönüşümü olmak üzere, V vektör uzayı üzerinde yaklaşık yapı, $J^2 = -I$ eşitliğini sağlayan bir lineer endomorfizmadır.*

Tanım 1.2.2. *M_n, n-boyutlu differansiyellenebilen bir reel manifold olsun. M_n üzerinde bir J tensör alanı, her $x \in M_n$ için, $T_x(M)$ teğet uzayının $J^2 = -I$ koşulunu sağlayan bir endomorfizması ise J ye yaklaşık kompleks yapı denir [8], [9].*

M_n üzerinde $(1,1)$ tipinde tanımlı olan bir $F_i^{\ j}$ tensörü

$$F_i^{\ j} F_j^{\ k} = -\delta_i^k \,, \tag{1.2.1}$$

koşulunu sağlarsa $F_i^{\ j}$ tensörüne yaklaşık kompleks yapı ve $(M_n, F_i^{\ j})$ ikilisine yaklaşık kompleks uzay denir.

Eğer M_n üzerinde bir yaklaşık kompleks $F_i^{\ j}$ yapısı varsa ve g_{ij} Riemann metrik tensörü

$$g_{ij} F_h^{\ i} F_k^{\ j} = g_{hk} \,, \tag{1.2.2}$$

koşulunu sağlarsa $(F_i^{\ j}, g_{hk})$ çiftine M_n üzerinde yaklaşık Hermitsel yapı denir.

Eğer M_n üzerinde $F_i^{\ j}$ Hermitsel yapısı, her i, j, k için

$$\nabla_k F_i^{\ j} = 0 \,, \tag{1.2.3}$$

bağıntısını sağlıyorsa $F_i^{\ j}$ yaklaşık kompleks yapısına Kaehler yapı denir.

$F_i^{\ j}$ bir yaklaşık kompleks yapı ve g_{ij} de metrik tensörün bileşenleri olmak üzere F^{ij} ve F_{ij} tensörleri

$$F_{jh}\, F_i^{\ j} = -F_{hj}\, F_i^{\ j} = -g_{ih} \,, \tag{1.2.4}$$

$$F^{ij} = g^{ih} F_h^{\ j}, \qquad F_{ij} = g_{jk} F_i^{\ k} \,, \tag{1.2.5}$$

şeklinde tanımlanır. F^{ij} ve F_{ij} tensörleri anti-simetrik tensörlerdir.

Yaklaşık $F_i{}^j$ Hermitsel yapısı

$$F_{hij} = \nabla_h F_{ij} + \nabla_i F_{jh} + \nabla_j F_{hi} = 0\,, \tag{1.2.6}$$

bağıntısını sağlıyorsa $F_i{}^j$ tensörüne yaklaşık Kaehler yapı denir. Bu özelliğin geçerli olduğu uzaya da yaklaşık Kaehler uzayı denir.

Tanım 1.2.3. Eğer yaklaşık Hermitsel yapı olan F_i^j tensörü $F_i = -\nabla_j F_i^j = 0$ koşulunu sağlıyorsa o zaman bu yapıya yaklaşık semi-Kaehler yapı denir.

F_i^j yaklaşık kompleks yapısı için burulma tensörü

$$N_{ij}{}^k = F_i{}^h(\nabla_h F_j{}^k - \nabla_j F_h{}^k) - F_j^h(\nabla_h F_i{}^k - \nabla_i F_h{}^k)\,, \tag{1.2.7}$$

ile tanımlanır.

Eğer $N_{ij}{}^k = 0$ ise $F_i{}^j$ yaklaşık kompleks yapısına integre edilebilir denir.

Bir M_n Kaehler Manifoldunda Ricci özdeşliği

$$\nabla_k \nabla_j F_i{}^h - \nabla_j \nabla_k F_i{}^h = R_{kjt}{}^h F_i^t - R_{kji}{}^t F_t{}^h\,, \tag{1.2.8}$$

kullanılarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir [7]:

$$\begin{aligned}
&R_{kjt}{}^h\, F_i{}^t - R_{kji}{}^t\, F_t{}^h = 0\,, && R_{kji}{}^h + R_{kjs}{}^t\, F_i{}^s\, F_t{}^h = 0\,,\\
&R_{kjht}\, F_i{}^t - R_{kjit}\, F_h{}^t = 0\,, && R_{kjih} - R_{kjst}\, F_i{}^s\, F_h{}^t = 0\,,\\
&R_j{}^t F_t{}^h - R_t{}^h F_j{}^t = 0\,, && R_j{}^h + R_s{}^t\, F_i{}^s + F_t{}^h = 0\,,\\
&R_{jt}\, F_i{}^t + R_{it}\, F_j{}^t = 0\,, && R_{ji} - R_{ts}\, F_j{}^t\, F_i{}^s = 0\,.
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

$H_i{}^h$ tensörü

$$2H_i{}^h = -R_{kji}{}^h F^{kj}\,, \tag{1.2.10}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$
\begin{aligned}
&H_{ih} = H_i{}^t g_{th}\,, \qquad 2H_{ih} = -R_{tsih}F^{ts} = -R_{ihts}F^{ts}\,,\\
&H_{ih} = R_{tihs}F^{ts}\,, \qquad R_{ji} = H_{js}F_i{}^s\,,\\
&H_{ji} = -R_{jt}F_i{}^t\,, \qquad H_{ts}F^{ts} = R\,,\\
&\nabla_j H_{ih} + \nabla_i H_{hj} + \nabla_h H_{ji} = 0\,,\\
&2\nabla_t H_i^t = (\nabla_t R)F_i^t\,, \qquad (1.2.11)
\end{aligned}
$$

bağıntıları elde edilir.

1.3 Bochner Eğrilik Tensörü

Bir M_n uzayı üzerinde $R_{kji}{}^h$ Riemann, R_{ji} Ricci eğrilik tensörlerini ve R de skaler eğriliği göstermek üzere Bochner eğrilik tensörü [3]

$$
\begin{aligned}
B_{kji}{}^h = {} & R_{kji}{}^h + \delta_k^h L_{ji} - \delta_j^h L_{ki} + L_k{}^h g_{ji} - L_j{}^h g_{ki} + F_k{}^h M_{ji} - F_j{}^h M_{ki}\\
& + M_k{}^h F_{ji} - M_j{}^h F_{ki} - 2(M_{kj}F_i{}^h + F_{kj}M_i{}^h), \qquad (1.3.1)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanır. Burada L_{ji} ve M_{ji} tensörleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$L_{ji} = -\frac{1}{n+4}R_{ji} + \frac{1}{2(n+2)(n+4)}Rg_{ji} \qquad (1.3.2)$$

$$M_{ji} = -L_{jt}F_i{}^t, \qquad (1.3.3)$$

$$M_{ji} = -\frac{1}{n+4}H_{ji} + \frac{1}{2(n+2)(n+4)}RF_{ji}, \qquad (1.3.4)$$

$$L_k{}^h = L_{kt}g^{th}, \qquad M_k{}^h = M_{kt}g^{th}. \qquad (1.3.5)$$

$$g^{ji}L_{ji} = -\frac{1}{2(n+2)}R \qquad (1.3.6)$$

$$F^{ji}M_{ji} = -\frac{1}{2(n+2)}R \qquad (1.3.7)$$

$B_{kjih} = B_{kji}{}^t g_{th}$ şeklinde tanımlı olduğundan (1.3.2) ve (1.3.3) ile verilen L_{ji} ve

M_{ji} tensörlerini kullanarak (1.3.1) ifadesi

$$B_{kjih} = R_{kjih} + g_{kh}L_{ji} - g_{jh}L_{ki} + L_{kh}g_{ji} - L_{jh}g_{ki} + F_{kh}M_{ji} - F_{jh}M_{ki}$$
$$+ M_{kh}F_{ji} - M_{jh}F_{ki} - 2(M_{kj}F_{ih} + F_{kj}M_{ih}) \tag{1.3.8}$$

olarak bulunur. Ayrıca, Bochner eğrilik tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$B_{kjih} = -B_{jkih}, \qquad B_{kjih} = -B_{kjhi}\,, \tag{1.3.9}$$

$$B_{kjih} + B_{jikh} + B_{ikjh} = 0\,, \tag{1.3.10}$$

$$B_{kjih} = B_{ihkj}, \tag{1.3.11}$$

$$B_{kjih} + B_{jikh} + B_{ikjh} = 0\,, \tag{1.3.12}$$

$$B_{tji}{}^{t} = 0, \tag{1.3.13}$$

$$B_{kjt}{}^{h}F_{i}{}^{t} - B_{kji}{}^{t}F_{t}{}^{h} = 0\,. \tag{1.3.14}$$

2 BÖLÜM

2.1 Semi-simetrik Metrik F -Konneksiyonlu Uzaylar

Tanım 2.1.1. M_n , n-boyutlu diferansiyellenebilen g Riemann metriğine sahip bir manifold olsun ve ∇, M üzerinde Riemann konneksiyonu, D de herhangi bir lineer konneksiyonu göstersin. M_n üzerinde herhangi bir p_j vektör bileşeni için D konneksiyonunun burulma tensörü

$$T_{jk}{}^{i} = p_j\, \delta^i_k - p_k\, \delta^i_j, \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu konneksiyona semi-simetrik konneksiyon denir [3].

Tanım 2.1.2. $M_n, (n = 2m, m = 1, 2, 3, ...)$ üzerinde, katsayıları $\Gamma_{ji}{}^{h}$ olan bir D afin konneksiyonunu gözönüne alalım. Eğer D koneksiyonu

$$D_k\, g_{ij} = 0\,, \qquad D_j\, F_i{}^{h} = 0 \tag{2.1.2}$$

koşullarını sağlıyorsa D ye metrik F-konneksiyon denir. $\left\{ {h \atop ij} \right\}$, ∇ Riemann konneksiyon katsayıları ve $\bar{\Gamma}_{ji}{}^{h}$ lar semi-simetrik metrik F konneksiyonu D nin konneksiyon katsayıları olsun. Eğer D konneksiyonuna ait katsayılar en genel haliyle

$$\bar{\Gamma}_{ji}{}^{h} = \left\{ {h \atop ji} \right\} + U_{ji}{}^{h} \tag{2.1.3}$$

şeklinde ele alınırsa, D konneksiyonun burulma tensörü $S_{ji}{}^{h}$

$$S_{ji}{}^{h} = \bar{\Gamma}_{ji}{}^{h} - \bar{\Gamma}_{ij}{}^{h} = U_{ji}{}^{h} - U_{ij}{}^{h} \tag{2.1.4}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, (2.1.4) bağıntısından burulma tensörünün alt iki indise göre anti-simetrik olduğu görülür

$$S_{ji}{}^{h} = -(U_{ij}{}^{h} - U_{ji}{}^{h}) = -S_{ji}{}^{h}\,. \tag{2.1.5}$$

Teorem 2.1.1. D konneksiyonu (2.1.2) koşullarını sağlarsa

$$U_{kj}{}^{t}\, g_{ti} + U_{ki}{}^{t}\, g_{tj} = 0 \tag{2.1.6}$$

dir.

İspat. $D_k\, g_{ij} = 0$ olduğu için,

$$\begin{aligned} D_k\, g_{ij} &= \partial_k g_{ij} - \bar{\Gamma}_{ki}^{\ h}\, g_{hj} - \bar{\Gamma}_{kj}^{\ h}\, g_{ih} \\ &= \partial_k g_{ij} - g_{hj} \left\{ \begin{matrix} h \\ ki \end{matrix} \right\} - g_{ih} \left\{ \begin{matrix} h \\ kj \end{matrix} \right\} - U_{ki}{}^{h}\, g_{hj} - U_{kj}{}^{h}\, g_{ih} \\ &= \nabla_k g_{ij} - U_{ki}{}^{h} g_{hj} - U_{kj}{}^{h} g_{ih} = 0\,. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

∇ Riemann konneksiyonu için $\nabla_k g_{ij} = 0$ olduğundan

$$U_{ki}{}^{h}\, g_{hj} + U_{kj}{}^{h}\, g_{ih} = 0 \tag{2.1.8}$$

elde edilir.

$U_{kji} = U_{kj}^{\ t}\, g_{ti}$ şeklinde tanımlanırsa, (2.1.5) den

$$U_{kij} + U_{kji} = 0 \tag{2.1.9}$$

bulunur ve buradan U_{kji} tensörünün son iki indise göre yani, i ve j indislerine göre anti-simetrik olduğu görülür.

(2.1.9) denklemi g^{kh} ile çarpılırsa

$$U^{\,h}_{\ \,ij} = -U^{\,h}_{\ \,ji} \tag{2.1.10}$$

bulunur. $S_{ij}^{\ h}$ tensörü

$$S_{ij}^{\ h} = S_{ijk}\, g^{kh} \tag{2.1.11}$$

olarak tanımlanır ve (2.1.4) denklemi g^{kh} ile çarpılırsa

$$S_{jik} = U_{jik} - U_{ijk} \tag{2.1.12}$$

elde edilir.

(2.1.9) ve (2.1.11) denklemleri kullanılarak $S_{jik} + S_{kji} + S_{kij}$ toplamı hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} S_{jik} + S_{kji} + S_{kij} &= U_{jik} - U_{ijk} + U_{kji} - U_{jki} + U_{kij} - U_{ikj} \\ &= U_{jik} - U_{jki} = U_{jik} + U_{jik} \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

elde edilir ve buradan

$$S_{jik}+S_{kji}+S_{kij}=2U_{jik} \tag{2.1.14}$$

bulunur. (2.1.14) denklemi g^{kh} ile çarpılırsa

$$U_{ji}{}^{h}=\frac{1}{2}(S_{ji}{}^{h}+S^{h}{}_{ji}+S^{h}{}_{ij}) \tag{2.1.15}$$

bulunur.

Teorem 2.1.2. Eğer D konneksiyonu bir semi-simetrik metrik F- konneksiyonu ise, yani $D_jF_i{}^h=0$ ise

$$U_{ji}{}^{t}\,F_t{}^{h}-U_{jt}{}^{h}\,F_i{}^{t}=0 \tag{2.1.16}$$

dir.

İspat.
$$\begin{aligned} D_jF_i{}^h &= \partial_jF_i{}^h-\bar{\Gamma}_{ji}^{\,t}F_t{}^h+\bar{\Gamma}_{jt}^{\,h}F_i{}^t \\ &= \partial_jF_i{}^h-\left(\left\{ {t \atop ji} \right\}+U_{ji}{}^t\right)F_t{}^h+\left(\left\{ {h \atop jt} \right\}+U_{jt}{}^h\right)F_i{}^t \\ &= \nabla_jF_i{}^h-U_{ji}{}^tF_t{}^h+U_{jt}{}^hF_i{}^t=0\,. \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

M_n nin Kaehler manifoldu olması özelliği ve (2.1.2) kullanılırsa ispat tamamlanır.

p_i 1-form, q^h bir kontravaryant vektör alanı ve F_{ji} anti-simetrik bir tensörün bileşenleri olmak üzere

$$S_{ji}{}^{h}=\delta_j^h\,p_i-\delta_i^h\,p_j-2F_{ji}\,q^h \tag{2.1.18}$$

şeklinde bir burulma tensörü ele alınırsa, D konneksiyonuna semi-simetrik metrik F- konneksiyon denir. [3]

(2.1.18) denklemi g_{hk} ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} S_{jik} &= S_{ji}{}^h\,g_{hk}=\delta_j^h\,p_i\,g_{hk}-\delta_i^h\,p_j\,g_{hk}-2F_{ji}\,q_k \\ &= p_i\,g_{jk}-p_j\,g_{ik}-2F_{ji}\,q_k \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde S_{kij} tensörü

$$S_{kij}=\delta_k^h\,p_i\,g_{hj}-\delta_i^h\,p_k\,g_{hj}-2F_{ki}\,q_j=p_i\,g_{kj}-p_k\,g_{ij}-2F_{ki}\,q_j\,,$$

belirlenip, $S_{kij}\,g^{kh}=S^h{}_{ij}$ özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} S^h{}_{ij} &= S_{kij}\,g^{kh}=p_ig_{kj}g^{kh}-p_kg_{ij}g^{kh}-2F_{ki}q_jg^{kh} \\ &= p_j\delta_j^h-p^hg_{ij}-2F^h{}_iq_j \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

bulunur. (2.1.19) denkleminde i ve j indislerinin yerleri değistirilirse ${S^h}_{ji}$ tensörü

$$ {S^h}_{ji} = p_j \delta_i^h - p^h g_{ji} - 2{F^h}_j q_i \tag{2.1.20} $$

şeklinde elde edilir. (2.1.18), (2.1.19) ve (2.1.20) kullanılarak

$$ \frac{1}{2}({S_{ji}}^h + {S^h}_{ij} + {S^h}_{ji}) = \frac{1}{2}\,(2\,\delta_j^h\,p_i - 2\,p^h\,g_{ij} - 2\,F_{ji}\,q^h - 2\,{F^h}_i\,q_j - 2\,{F^h}_j\,q_i) \tag{2.1.21} $$

ve elde edilir. Böylece, (2.1.15) den

$$ {U_{ji}}^h = \delta_j^h\,p_i - g_{ji}\,p^h + {F_i}^h\,q_j + {F_j}^h\,q_i - F_{ji}\,q^h \tag{2.1.22} $$

bulunur. Burada, $p^h = p_t\,g^{th}$, $q_i = q^t\,g_{ti}$ dir.

D konneksiyonu semi-simetrik, metrik F- konneksiyonu olduğundan (2.1.22) yardımıyla aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$ {U_{ji}}^t\,{F_t}^h = (\delta_j^t\,p_i - g_{ji}\,p^t + {F_j}^t\,q_i + {F_i}^t\,q_j - F_{ji}\,q^t)\,{F_t}^h, \tag{2.1.23} $$

$$ {U_{jt}}^h\,{F_i}^t = (\delta_j^h\,p_t - g_{jt}\,p^h + {F_j}^h\,q_t + {F_t}^h\,q_j - F_{jt}\,q^h)\,{F_i}^t\,. \tag{2.1.24} $$

(2.1.23) dan (2.1.24) denklemi çıkarılıp (2.1.16) yardımı ile

$$ \begin{aligned} {U_{ji}}^t\,{F_t}^h - {U_{jt}}^h\,{F_i}^t &= p_i\,{F_j}^h - g_{ji}\,p^t\,{F_t}^h - \delta_j^h\,q_i - \delta_i^h\,q_j - F_{ji}\,q^t\,{F_t}^h - \delta_j^h\,p_t\,{F_i}^t \\ &\quad + p^h\,g_{jt}\,{F_i}^t - {F_j}^h\,q_t\,{F_i}^t - {F_t}^h\,q_j\,{F_i}^t + F_{jt}\,{F_i}^t\,q^h \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.25} $$

bağıntısı elde edilir. (2.1.25) denklemi $g^{j\,l}$ ile çarpılırsa

$$ \begin{aligned} & p_i\,{F_j}^h\,g^{j\,l} - p^t\,g_{ji}\,{F_t}^h\,g^{j\,l} - \delta_j^h\,q_i\,g^{j\,l} - F_{ji}\,q^t\,{F_t}^h\,g^{jl} - \delta_j^h\,p_t\,{F_i}^t\,g^{j\,l} \\ & \quad + p^h\,g_{jt}\,{F_i}^t\,g^{j\,l} - F_j^h\,q_t {F_i}^t\,g^{j\,l} + F_{jt}\,{F_i}^t\,q^h\,g^{j\,l} = 0\,, \end{aligned} \tag{2.1.26} $$

daha sonra (2.1.26) denklemi g_{hl} ile çarpılırsa

$$ \begin{aligned} & p_i\,{F_j}^h\,g^{j\,l}\,g_{hl} - p^t\,g_{ji}\,{F_t}^h\,g^{j\,l}\,g_{hl} - \delta_j^h\,q_i\,g^{j\,l}\,g_{hl} - F_{ji}\,q^t\,{F_t}^h\,g^{j\,l}\,g_{hl} \\ & - \delta_j^h\,p_t\,{F_i}^t\,g^{j\,l}\,g_{hl} + p^h\,g_{jt}\,{F_i}^t\,g^{jl}\,g_{hl} - {F_j}^h\,q_t\,{F_i}^t\,g^{j\,l}\,g_{hl} + F_{jt}\,{F_i}^t\,q^h\,g^{j\,l}\,g_{hl} = 0\,, \end{aligned} \tag{2.1.27} $$

denklemi elde edilir. Buradan da

$$p^t F_t{}^j g_{ji} + q^t F_t{}^h F_{hi} + n\,(p_t F_i{}^t + q_i) = 0\,,$$

$$p^t F_{ti} + q_l g^{lt} F_t{}^h F_{hi} + n(p_t F_i{}^t + q_i) = 0\,,$$

$$p^t F_{ti} + q_l g^{lt} F_t{}^h F_{hi} + n(p_t F_{im} g^{mt} + q_i) = 0\,,$$

$$(1-n)p^t F_{ti} + q_i n + q_l F_{hi} F^{lh} = 0\,,$$

$$(1-n)p^t F_{ti} + (n-1)q_i = 0 \tag{2.1.28}$$

bulunur. (2.1.28) denklemi kullanılarak q_i ve p_i formları arasındaki bağıntı aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$(1-n)p^t F_{ti} = (1-n)\,q_i\,,$$

$$q_i = p^t F_{ti}\,. \tag{2.1.29}$$

(2.1.29) denkleminin her iki yanı önce g^{ij}, daha sonra da $F_j{}^m$ ile çarpılırsa

$$q_i g^{ij} F_j{}^m = p^t F_t{}^j F^m_j = -\delta^m_t p^t$$

$$= -p^m \tag{2.1.30}$$

bulunur. (2.1.30) denklemi g_{mk} ile çarpılırsa

$$p^m g_{mk} = -q^j g_{mk} F_j{}^m = -q^j F_{jk}$$

elde edilir. Buradan da

$$p_k = -q^j F_{jk} \tag{2.1.31}$$

bulunur.

Elde edilen sonuçlar (2.1.3) denkleminde yerine konursa D semi-simetrik metrik F-konneksiyonu için konneksiyon katsayıları

$$\bar{\Gamma}_{ji}{}^h = \left\{ {h \atop ji} \right\} + \delta^h_j p^i - g_{ji} p^h + F_j{}^h q_i + F_i{}^h q_j - F_{ji} q^h \tag{2.1.32}$$

şeklini alır. Böylece aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

Önerme 2.1.1. g_{ij} Hermitsel metrik tensörüne ve $F_i{}^h$ kompleks yapısına sahip bir Kaehler manifoldunda p_i ve q_i (2.1.29) ve (2.1.31) deki gibi tanımlanmış 1-formlar olsun. Bu durumda semi-simetrik metrik F konneksiyonu D nin katsayıları (2.1.32) şeklindedir.

2.2 Semi-Simetrik Metrik F-konneksiyonlu Uzaylarda Eğrilik Tensörü

Bir M_n manifoldunun eğrilik tensörü en genel haliyle, (1.1.12) şeklinde ele alınırsa

$$L_{kji}{}^{h} = \partial_k \bar{\Gamma}_{ji}{}^{h} - \partial_j \bar{\Gamma}_{ki}{}^{h} + \bar{\Gamma}_{kt}{}^{h}\, \bar{\Gamma}_{ji}{}^{t} - \bar{\Gamma}_{jt}{}^{h}\, \bar{\Gamma}_{ki}{}^{t} \tag{2.2.1}$$

ve $\bar{\Gamma}_{ki}{}^{h}$ fonksiyonları icin (2.1.3) kullanılırsa, bu takdirde semi-simetrik metrik-F konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} L_{kji}{}^{h} = {} & \partial_k\left(\left\{ {h \atop ji} \right\} + U_{ji}{}^{h}\right) - \partial_j\left(\left\{ {h \atop ki} \right\} + U_{ki}{}^{h}\right) \\ & +\left(\left\{ {h \atop kt} \right\} + U_{kt}{}^{h}\right)\left(\left\{ {t \atop ji} \right\} + U_{ji}{}^{t}\right) - \left(\left\{ {h \atop jt} \right\} + U_{jt}{}^{h}\right)\left(\left\{ {t \atop ki} \right\} + U_{ki}{}^{t}\right) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

$$\begin{aligned} L_{kji}{}^{h} = {} & \partial_k\left\{ {h \atop ji} \right\} - \partial_j\left\{ {h \atop ki} \right\} + \left\{ {h \atop kt} \right\}\left\{ {t \atop ji} \right\} - \left\{ {h \atop jt} \right\}\left\{ {t \atop ki} \right\} + \partial_k U_{ji}{}^{h} - \partial_j U_{ki}{}^{h} \\ & + \left\{ {h \atop kt} \right\} U_{ji}{}^{t} + \left\{ {t \atop ji} \right\} U_{kt}{}^{h} + U_{kt}{}^{h} U_{ji}{}^{t} - \left\{ {h \atop jt} \right\} U_{ki}{}^{t} - \left\{ {t \atop ki} \right\} U_{jt}{}^{h} \\ & - U_{jt}{}^{h} U_{ki}{}^{t} - \left\{ {t \atop kj} \right\} U_{ti}{}^{h} + \left\{ {t \atop kj} \right\} U_{ti}{}^{h} \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

şeklinde bulunur. (2.2.3) de Riemann manifoldunun eğrilik tensörü tanımı ile M_n manifoldunun eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} L_{kji}{}^{h} = {} & R_{kji}{}^{h} + \left(\partial_k U_{ji}{}^{h} + \left\{ {h \atop kt} \right\} U_{ji}{}^{t} - \left\{ {t \atop kj} \right\} U_{ti}{}^{h} - \left\{ {t \atop ki} \right\} U_{jt}{}^{h} \right) \\ & - \left(\partial_j U_{ki}{}^{h} - \left\{ {t \atop kj} \right\} U_{ti}{}^{h} - \left\{ {t \atop ji} \right\} U_{kt}{}^{h} + \left\{ {h \atop jt} \right\} U_{ki}{}^{t} \right) + U_{kt}{}^{h} U_{ji}{}^{t} - U_{jt}{}^{h} U_{ki}{}^{t} \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

haline gelir, bu son ifade yeniden düzenlenirse

$$L_{kji}{}^{h} = R_{kji}{}^{h} + \nabla_k U_{ji}{}^{h} - \nabla_j U_{ki}{}^{h} + U_{kt}{}^{h} U_{ji}{}^{t} - U_{jt}{}^{h} U_{ki}{}^{t} \tag{2.2.5}$$

elde edilir.

(2.2.5) için gerekli olan (2.1.22) nin ∇ konnenksiyonuna göre kovaryant türevleri alınırsa

$$\nabla_k U_{ji}{}^{h} = \delta_j^h \nabla_k p_i - g_{ji} \nabla_k p^h + F_j{}^{h} \nabla_k q_i + F_i{}^{h} \nabla_k q_j - F_{ji} \nabla_k q^h \,, \tag{2.2.6}$$

$$\nabla_j U_{ki}{}^h = \delta_k^h \nabla_j p_i - g_{ki} \nabla_j p^h + F_k{}^h \nabla_j q_i + F_i{}^h \nabla_j q_k - F_{ki} \nabla_j q^h \tag{2.2.7}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}\nabla_k U_{ji}{}^h - \nabla_j U_{ki}{}^h &= \delta_j^h \nabla_k p_i - \delta_k^h \nabla_j p_i - g_{ji} \nabla_k p^h + g_{ki} \nabla_j p^h + F_j{}^h \nabla_k q_i \\ &\quad -F_k{}^h \nabla_j q_i + F_i{}^h (\nabla_k q_j - \nabla_j q_k) - F_{ji} \nabla_k q^h + F_{ki} \nabla_j q^h\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

bulunur. Ayrıca, $(U_{kt}{}^h U_{ji}{}^t)$ ve $(U_{jt}{}^h U_{ki}{}^t)$ ifadeleri ayrı ayrı hesaplanırsa ;

$$\begin{aligned}U_{kt}{}^h U_{ji}{}^t &= (\delta_k^h p_i p_j - \delta_k^h p_t g_{ji} p^t - \delta_k^h q_i q_j - \delta_k^h q_i q_j - \delta_k^h F_{ji} p_t q^t) \\ &\quad +(-g_{kj} p^h p_i + g_{ji} p^h p_k - F_{jk} p^h q_i - F_{ik} p^h q_j + F_{ji} p^h q_k) \\ &\quad +(F_k{}^h q_j p_i - F_k{}^h g_{ji} q_t p^t + F_k{}^h q_i p_j + F_k{}^h p_i q_j - F_k{}^h F_{ji} q_t q^t) \\ &\quad +(F_j{}^h q_k p_i - g_{ji} q_k q^h - \delta_j^h q_k q_i - \delta_i^h q_k q_j + F_{ji} q_k p^h) \\ &\quad +(-F_{kj} q^h p_i - g_{ji} q_k q^h - g_{kj} q^h q_i - g_{ik} q^h q_j + F_{ji} p_k q^h)\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

ve

$$\begin{aligned}U_{jt}{}^h U_{ki}{}^t &= (\delta_j^h p_i p_k - \delta_j^h p_t g_{ki} p^t - 2\delta_j^h q_i q_k - \delta_j^h F_{ki} p_t q^t) \\ &\quad +(-g_{jk} p^h p_i + g_{ki} p^h p_j - F_{kj} p^h q_i - F_{ij} p^h q_k + F_{ki} p^h q_j) \\ &\quad +(F_j{}^h q_k p_i - F_j{}^h g_{ki} q_t p^t + F_j{}^h q_k p_i + F_j{}^h p_i q_k - F_j{}^h F_{ki} q_t q^t) \\ &\quad +(F_k{}^h q_j p_i - g_{ki} q_j q^h - \delta_k^h q_j q_i - \delta_i^h q_k q_j + F_{ki} q_j p^h) \\ &\quad +(-F_{jk} q^h p_i - g_{ki} q_j q^h - g_{jk} q^h q_i - g_{ij} q^h q_k + F_{ki} p_j q^h)\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

bulunur. (2.2.9) ve (2.2.10) denklemlerinin farkları alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}(U_{kt}{}^h U_{ji}{}^t) - (U_{jt}{}^h U_{ki}{}^t) &= \delta_k^h (p_i p_j - g_{ji} p_t p^t - q_i q_j - F_{ji} p_t q^t) \\ &\quad +\delta_j^h (-p_i p_k + g_{ki} p_t p^t + q_i q_k + F_{ki} p_t q^t) \\ &\quad +g_{ij} (p^h p_k - q_k q^h) + g_{ik} (q^h q_j - p^h p_j) + F_{jk} (-2p^h q_i + 2q^h p_i) \\ &\quad +F_{ik} (p^h q_j + p_j q^h) + F_{ji} (p_k q^h + p^h q_k) \\ &\quad +F_k{}^h (q_j p_i - g_{ji} p^t q_t + q_i p_j - F_{ji} q_t q^t) \\ &\quad +F_j{}^h (-q_i p_k - q_k p_i + g_{ki} q_t p^t + F_{ki} q_t q^t)\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

sonucuna ulaşılır. Bulunan ifadeler denklem (2.2.5) de yerine konulursa ${L_{kji}}^h$ eğrilik tensörü

$$
\begin{aligned}
{L_{kji}}^h = {R_{kji}}^h &+ \delta_k^h(p_i p_j - g_{ji} p_t p^t - q_i q_j - F_{ji} p_t q^t - \nabla_j p_i) \\
&+\delta_j^h(-p_i p_k + g_{ki} p_t p^t + q_i q_k + F_{ki} p_t q^t + \nabla_k p_i) \\
&+g_{ij}(p^h p_k - q_k q^h - \nabla_k p^h) + g_{ik}(q^h q_j - p^h p_j + \nabla_j p^h) + 2F_{jk}(-p^h q_i + q^h p_i) \\
&+F_{ik}(p^h q_j + p_j q^h - \nabla_j q^h) + F_{ji}(p_k q^h + p^h q_k - \nabla_k q^h) \\
&+{F_k}^h(q_i p_j + q_j p_i - g_{ji} p^t q_t - F_{ji} q_t q^t - \nabla_j q_i) \\
&+{F_j}^h(-q_i p_k - q_k p_i + g_{ki} q_t p^t + F_{ki} q_t q^t + \nabla_k q_i) + {F_i}^h(\nabla_k q_j - \nabla_j q_k)
\end{aligned}
\tag{2.2.12}
$$

şeklini alır. Ayrıca (2.1.29) ve (2.1.31) denklemlerinin sonucu olarak elde edilen $q_i\, p^i = 0$ ve $q^t\, q_t = p_t\, p^t$ bağıntıları (2.2.12) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa semi-simetrik metrik$F$- konneksiyonlu bir M_n uzayının eğrilik tensörü

$$
\begin{aligned}
{L_{kji}}^h = {R_{kji}}^h &- \delta_k^h(\nabla_j p_i - p_i p_j + q_j q_i + \frac{1}{2} p_t p^t g_{ji}) \\
&+\delta_j^h(\nabla_k p_i - p_i p_k + q_i q_k + \frac{1}{2} p_t q^t g_{ki}) \\
&-g_{ji} g^{th}(\nabla_k p_t - p_k p_t - p_t p_k + q_k q_t + \frac{1}{2} p_t p^t g_{kt}) \\
&+g_{ki} g^{th}(\nabla_j p_t + q_t q_j - p_t p_j + \frac{1}{2} p_t p^t g_{jt}) \\
&-{F_k}^h(\nabla_j q_i - q_i p_j - q_j p_i + \frac{1}{2} p_t p^t F_{ji}) \\
&+{F_j}^h(\nabla_k q_i - q_i p_k - q_k p_i + \frac{1}{2} p_t p^t F_{ki}) \\
&-F_{ji} g^{th}(\nabla_k q_t - q_t p_k - q_k p_t + \frac{1}{2} p_t p^t F_{kt}) \\
&+F_{ki} g^{th}(\nabla_j q_t - q_t p_j - q_j p_t + \frac{1}{2} p_t p^t F_{jt} \\
&+{F_j}^h(\nabla_k q_j - \nabla_j q_k) - 2F_{kj}(p_i q^h - q_i p^h)
\end{aligned}
\tag{2.2.13}
$$

şeklinde bulunur. (2.2.13) denkleminde hesaplarda kolaylık sağlanması için p_{ji} ve q_{ji} tensörleri aşağıdaki şekillerde tanımlanırsa,

$$p_{ji} = \nabla_j p_i - p_j p_i + q_j q_i + \frac{1}{2} p_t p^t g_{ji}\,, \tag{2.2.14}$$

$$q_{ji} = \nabla_j q_i - p_j q_i + p_i q_j + \frac{1}{2} p_t p^t F_{ji} \tag{2.2.15}$$

M_n uzayının eğrilik tensörü

$$L_{kji}{}^h = R_{kji}{}^h - \delta_k^h p_{ji} + \delta_j^h p_{ki} - p_k^h g_{ji} + p_j^h g_{ki} - F_k{}^h q_{ji}$$

$$+F_j{}^h q_{ki} - q_k^h F_{ji} + q_j^h F_{ki} + (\nabla_k q_j - \nabla_j q_k) F_i{}^h - 2F_{kj}(p_i q^h - q_i p^h) \tag{2.2.16}$$

olarak bulunur.

(2.2.14) ve (2.2.15) denklemleri ile tanımlanan p_{ij} ve q_{ij} tensörleri tanımından aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

(2.2.14) denklemi $F^t{}_i$ ile çarpılıp düzenlenirse

$$F^t{}_i p_{jt} = \nabla_j (F^t{}_i p_t) - p_j p_t F^t{}_i + q_j q_t F^t{}_i + \frac{1}{2} p_t p^t g_{jt} F^t{}_i \tag{2.2.17}$$

$$= \nabla_j (p_t F_{mi} g^{mt}) - p_j p^t F_{ti} + +q_j q^t F_{ti} + \frac{1}{2} p_t p^t F_{ji} \tag{2.2.18}$$

$$= \nabla_j (p^m F_{mi}) - p_j q_i + q_j(-p_i) + \frac{1}{2} p_t p^t F_{ji} \tag{2.2.19}$$

$$= \nabla_j q_i - p_j q_i - q_j p_i + \frac{1}{2} p_t p^t F_{ji} \tag{2.2.20}$$

ve buradan

$$q_{ji} = \ F^t{}_i \, p_{jt} \tag{2.2.21}$$

bulunur. (2.2.15) denklemi $F^t{}_i$ ile çarpılırsa

$$F^t{}_i q_{jt} = \nabla_j (F^t{}_i q_t) - p_j q_t F^t{}_i - q_j p_t F^t{}_i + \frac{1}{2} p_t p^t F_{jt} F^t{}_i \tag{2.2.22}$$

$$= -\nabla_j p_i - p_j(-p_i) - q_j q^i + \frac{1}{2} p_t p^t (-g_{ji}) \tag{2.2.23}$$

$$= -(\nabla_j p^i - p_j p_i + q_j q_i + \frac{1}{2} p_t p^t g_{ji}) \tag{2.2.24}$$

ve buradan da

$$p_{ji} = \ -F^t{}_i \, q_{jt} \tag{2.2.25}$$

bulunur. Burada $p_h{}^k = p_{kt} g^{th}$ ve $q_h{}^k = q_{kt} g^{th}$ eşitlikleri kullanılmıştır.

(2.2.16) denkleminde

$$\alpha_{kj} = -(\nabla_k q_j - \nabla_j q_k)\,, \quad \beta_i^h = 2(p_i \, q^h - q_i \, p^h) \tag{2.2.26}$$

$$\beta_{ih} = \beta_i^h \, g_{ih} = 2(p_i q_h - p_h q_i) \tag{2.2.27}$$

olarak alınırsa, eğrilik tensörü ${L_{kji}}^h$

$$
\begin{aligned}
{L_{kji}}^h = {R_{kji}}^h - \delta_k^h p_{ji} + \delta_j^h p_{ki} - p_k^h g_{ji} + p_j^h g_{ki} - {F_k}^h q_{ji} \\
+{F_j}^h q_{ki} - q_k^h F_{ji} + q_j^h F_{ki} - \alpha_{kj} {F_i}^h - F_{kj} \beta_i^h ,
\end{aligned}
\tag{2.2.28}
$$

şeklini alır. (2.2.28) den yararlanarak ${L_{kji}}^l$ için yazılan ifade g_{lh} ile çarpılırsa M_n uzayının kovaryant eğrilik tensörü

$$
\begin{aligned}
{L_{kji}}^l g_{lh} = {R_{kji}}^l g_{lh} - \delta_k^l p_{ji} g_{lh} + \delta_j^l p_{ki} g_{lh} + p_k^l g_{ji} g_{lh} - p_j^l q_{ki} g_{lh} + {F_k}^l q_{ji} g_{lh} \\
- {F_j}^l q_{ki} g_{lh} + q_k^l F_{ji} g_{lh} - q_j^l F_{ki} g_{lh} - \alpha_{kj} {F_i}^l g_{lh} - F_{kj} \beta_i^h g_{lh}
\end{aligned}
\tag{2.2.29}
$$

ve daha sonra (2.2.26), (2.2.27) ifadeleri yerine konulursa

$$
\begin{aligned}
L_{kjih} = R_{kjih} - p_{ji} g_{hk} + p_{ki} g_{jh} - p_{kh} g_{ji} + p_{jh} g_{ki} \\
-F_{kh} q_{ji} + F_{jh} q_{ki} - F_{ji} q_{kh} + F_{ki} q_{jh} - \alpha_{kj} F_{ih} - \beta_{ih} F_{kj}
\end{aligned}
\tag{2.2.30}
$$

haline gelir.

(2.2.30) denkleminde L_{kjih} eğrilik tensörü k ve j indisleri yer değiştirilerek hesaplanır (1.1.21) özellikleri kullanılırsa ilk iki indise göre anti-simetrik,

$$
\begin{aligned}
L_{jkih} &= -(R_{kjih} + p_{ji} g_{hk} - p_{ki} g_{jh} + p_{kh} g_{ji} - p_{jh} g_{ki} \\
&\quad + F_{kh} q_{ji} - F_{jh} q_{ki} + F_{ji} q_{kh} - F_{ki} q_{jh} + \alpha_{kj} F_{ih} + \beta_{ih} F_{kj}) \\
L_{kjih} &= -L_{jkih}
\end{aligned}
\tag{2.2.31}
$$

ve L_{kjih} eğrilik tensörünün son iki indise göre de anti-simetrik

$$
\begin{aligned}
L_{kjhi} &= -(R_{kjih} - p_{ji} g_{hk} + p_{ki} g_{jh} - p_{kh} g_{ji} + p_{jh} g_{ki} \\
&\quad - F_{kh} q_{ji} + F_{jh} q_{ki} - F_{ji} q_{kh} + F_{ki} q_{jh} - \alpha_{kj} F_{ih} - \beta_{ih} F_{kj}) \\
L_{kjih} &= -L_{kjhi}
\end{aligned}
\tag{2.2.32}
$$

olduğu görülür. Eğer M_n uzayının eğrilik tensörü ${L_{kji}}^h = 0$ ise

$$
\begin{aligned}
{R_{kji}}^h = \delta_k^h p_{ji} - \delta_j^h p_{ki} + p_k^h g_{ji} - p_j^h g_{ki} + {F_k}^h q_{ji} \\
-{F_j}^h q_{ki} + q_k^h F_{ji} - q_j^h F_{ki} + \alpha_{kj} {F_i}^h + F_{kj} \beta_i^h ,
\end{aligned}
\tag{2.2.33}
$$

bulunur ve buradan da

$$R_{kjih} = p_{ji}g_{hk} - p_{ki}g_{jh} + p_{kh}g_{ji} - p_{jh}g_{ki} + F_{kh}q_{ji} - F_{jh}q_{ki}$$
$$+F_{ji}q_{kh} - F_{ki}q_{jh} + \alpha_{kj}F_{ih} + \beta_{ih}F_{kj} \qquad (2.2.34)$$

elde edilir. (2.2.34) g^{kh} ile çarpılır ve (2.2.14), (2.2.15), (2.2.26) ve (2.2.27) kullanılırsa

$$R_{ji} = (n+1)p_{ji} + p_{ij} + p_k{}^k g_{ji} - p_t\, p^t\, g_{ji} - 2(p_i p_j + q_i q_j) \qquad (2.2.35)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$R_{ij} = (n+1)p_{ij} + p_{ji} + p_k^k g_{ij} - p_t p^t g_{ij} - 2(p_j p_i + q_j q_i) \qquad (2.2.36)$$

hesaplanır ve $R_{ji} = R_{ij}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$p_{ij} = p_{ji} \qquad (2.2.37)$$

elde edilir. $L_{kji}{}^h = 0$ kabulünden ve Riemann eğrilik tensörünün $R_{kjih} = R_{ihkj}$ özelliğinden

$$R_{kjih} - R_{ihkj} = F_{kh}(q_{ji} + q_{ij}) - F_{jh}(q_{ki} + q_{ik}) + F_{ji}(q_{kh} + q_{hk})$$
$$-F_{ki}(q_{jh} + q_{hj}) + F_{ih}(\alpha_{kj} - \beta_{kj}) - F_{kj}(\alpha_{ih} - \beta_{ih}) = 0 \qquad (2.2.38)$$

elde edilir ve buradan

$$F_{kh}(q_{ji} + q_{ij}) - F_{jh}(q_{ki} + q_{ik}) + F_{ji}(q_{kh} + q_{hk})$$
$$-F_{ki}(q_{jh} + q_{hj}) + F_{ih}(\alpha_{kj} - \beta_{kj}) - F_{kj}(\alpha_{ih} - \beta_{ih}) = 0 \qquad (2.2.39)$$

dir. (2.2.39) denklemi F^{kh} ile çarpılırsa

$$n(q_{ji} + q_{ij}) - F^{kh}F_{jh}(q_{ki} + q_{ik}) + F^{kh}F_{ji}(q_{kh} + q_{hk}) - F^{kh}F_{ki}(q_{jh} + q_{hj})$$
$$+F^{kh}F_{ih}(\alpha_{kj} - \beta_{kj}) - F^{kh}F_{kj}(\alpha_{ih} - \beta_{ih}) = 0 \qquad (2.2.40)$$

elde edilir. Burada F^{kh} tensörü için (1.2.4) ve (1.2.5) bağıntıları kullanılarak

$$n(q_{ji} + q_{ij}) - F^{kh}F_{jh}(q_{ki} + q_{ik}) + F^{kh}F_{ji}q_{kh} + F_{ji}F^{kh}q_{hk}$$
$$-F^{kh}F_{ki}(q_{jh} + q_{hj}) + F^{kh}F_{ih}(\alpha_{kj} - \beta_{kj}) - F^{kh}F_{ih}(\alpha_{kj} - \beta_{kj}) = 0\,, \qquad (2.2.41)$$

$$(n-2)(q_{ji}+q_{ij})=0 \tag{2.2.42}$$

ve buradan da

$$q_{ji}=-q_{ij} \tag{2.2.43}$$

elde edilir. O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz :

Teorem 2.2.1 Semi-simetrik metrik F- konneksiyonlu uzayın eğrilik tensörü $L_{kji}{}^{h}=0$ ise uzayın konneksiyon katsayılarında yer alan p_i ve q_i vektör bileşenleri cinsinden ifade edilen p_{ij} ve q_{ij} tensörleri (2.2.37) ve (2.2.43) bağıntılarını sağlar.

Diğer taraftan (2.2.42) den

$$p_{jt}\,F_i{}^t+p_{it}\,F_j{}^t=0 \tag{2.2.44}$$

ve buradan da

$$p_{ji}=p_{ts}\,F_j{}^t\,F_i{}^s \tag{2.2.45}$$

bulunur. (2.2.38) ve (2.2.42) den

$$(\alpha_{kj}-\beta_{kj})F_{ih}-F_{kj}(\alpha_{ih}-\beta_{ih})=0 \tag{2.2.46}$$

elde edilir. (2.2.45) F^{kj} ile çarpılırsa

$$(\alpha-\beta)F_{ih}-n(\alpha_{ih}-\beta_{ih})=0 \tag{2.2.47}$$

veya

$$\alpha_{ih}-\beta_{ih}=\frac{1}{n}(\alpha-\beta)F_{ih} \tag{2.2.48}$$

bulunur, (2.2.26), (2.2.27) kullanılırsa

$$\alpha=F^{kj}\,\alpha_{kj}=-2\nabla_t\,p^t \tag{2.2.49}$$

ve

$$\beta=F^{kj}\,\beta_{kj}=4p_t\,p^t \tag{2.2.50}$$

bulunur. (2.2.48) ve (2.2.49) dan

$$\alpha_{ih}-\beta_{ih}=-\frac{2}{n}\,(\nabla_t\,p^t+2\,p_t\,p^t)\,F_{ih} \tag{2.2.51}$$

bulunur. Diğer taraftan (2.2.15), (2.2.26), (2.2.42) den

$$\alpha_{ji}=-q_{ji}+p_t\,p^tF_{ji} \tag{2.2.52}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$F^{ji}\,q_{ji} = F^{ji}\,(-p_{jt}\,F_i{}^t) = p_t{}^t \tag{2.2.53}$$

dir ve (2.2.53) den

$$\alpha = -2\,p_t{}^t + n\,p_t\,p^t \tag{2.2.54}$$

bulunur. (2.2.52) ve (2.2.53) kullanılarak

$$\beta_{ji} = -2q_{ji} + p_t\,p^t F_{ji} + \frac{2}{n}(\nabla_t\,p^t + 2p_t\,p^t)F_{ji}$$

$$\beta_{ji} = -2q_{ji} + [\frac{2}{n}\,\nabla_t\,p^t + \frac{n+4}{n}\,p_t\,p^t]\,F_{ji} \tag{2.2.55}$$

elde edilir, buradan da

$$p_t{}^t = \nabla_t\,p^t + \frac{n}{2}\,p_t\,p^t\,,$$

$$\beta_{ji} = -2q_{ji} + \frac{2}{n}\,(p_t{}^t + 2\,p_t\,p^t)F_{ji} \tag{2.2.56}$$

bulunur. (1.1.21), (2.2.34), (2.2.36), (2.2.42) denklemleri kullanılarak

$$2(F_{kh}\,q_{ji} + F_{jh}\,q_{ik} + F_{ih}\,q_{kj} + F_{ji}\,q_{kh} + F_{ik}\,q_{jh} + F_{kj}\,q_{ih})$$

$$+F_{kh}\,\alpha_{ji} + F_{jh}\,\alpha_{ik} + F_{ih}\alpha_{kj} + \beta_{kh}\,F_{ji} + \beta_{jh}\,F_{ik} + \beta_{ih}\,F_{kj} = 0 \tag{2.2.57}$$

bağıntısı bulunur. (2.2.51) ve (2.2.55), (2.2.58) de yerine yazılırsa

$$[2\,p_t{}^t + (n+4)\,p_t\,p^t](F_{kh}\,F_{ji} + F_{jh}\,F_{ik} + F_{ih}\,F_{kj}) = 0$$

$$2\,p_t{}^t + (n+4)\,p_t\,p^t = 0\,. \tag{2.2.58}$$

elde edilir. (2.2.33) de denkleminde h ve k indisleri üzerinde daraltma yapılırsa

$$R_{ji} = n\,p_{ji}\,p_t{}^t\,g_{ji} - \alpha_{jt}\,F_i{}^t - \beta_{it}\,F_j{}^t$$

bulunur ve buradan da

$$R_{ji} = n\,p_{ji}\,p_t{}^t\,g_{ji} - (-2q_{jt} + p_s\,p^s\,F_{jt})\,F_i{}^t - [-2q_{it} + (\frac{2}{n}\,p_s{}^s + 2p_s\,p^s)\,F_{it}]\,F_j{}^t\,,$$

$$R_{ji} = (n+4)\,p_{ji} + (\frac{n-2}{n}\,p_t{}^t - \frac{n+4}{n}\,p_t\,p^t)\,g_{ji}\,,$$

$$R_{ji} = (n+4)\,p_{ji} + p_t{}^t\,g_{ji} \tag{2.2.59}$$

bağıntılarına ulaşılır. (2.2.59) denklemi g^{ji} ile çarpılırsa skaler eğrilik

$$R = 2(n+2)\,p_t{}^t \tag{2.2.60}$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$p_t{}^t = \frac{1}{2(n+2)} R \tag{2.2.61}$$

dir. (1.1.32) ve (1.1.33) den

$$p_{ji} = -L_{ji}\,, \tag{2.2.62}$$

$$q_{ji} = -M_{ji} \tag{2.2.63}$$

ifadeleri bulunur. (2.2.52), (2.2.59), (2.2.60) ve (2.2.61) kullanılarak

$$\alpha_{ji} = 2M_{ji} + p_t\, p^t F_{ji}\,,$$

$$\alpha_{ji} = 2M_{ji} - \frac{2}{n+4} p_t{}^t F_{ji}\,,$$

$$\alpha_{ji} = 2M_{ji} - \frac{R}{(n+2)(n+4)} F_{ji} \tag{2.2.64}$$

bulunur ve (2.2.55) ve (2.2.56) dan

$$\beta_{ji} = 2M_{ji} + \frac{2}{n}(p_t{}^t + 2p_t\, p^t) F_{ji}\,,$$

$$\beta_{ji} = 2M_{ji} + \frac{2}{n+4} p_t{}^t F_{ji}\,, \tag{2.2.65}$$

$$\beta_{ji} = 2M_{ji} + \frac{R}{(n+2)(n+4)} F_{ji} \tag{2.2.66}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$R_{kji}{}^h = -\delta_k^h L_{ji} + \delta_j^h L_{ki} - L_k{}^h g_{ji} + L_j{}^h g_{ki} - F_k{}^h M_{ji}$$

$$+F_j{}^h M_{ki} - M_k{}^h F_{ji} + M_j{}^h F_{ki} + 2(M_{kj} F_i{}^h + F_{kj} M_i{}^h),$$

$$B_{kji}{}^h = 0 \tag{2.2.67}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 2.2.2. (2.1.32) konneksiyonuna sahip n-boyutlu Kaehler uzayında ($n \geq 4$) için semi-simetrik metrik F -konneksiyonlu uzayın eğriliği sıfır ise uzayın Bochner eğriliği de sıfırdır.

3 BÖLÜM

3.1 Semi-Simetrik metrik F-konneksiyonlu Kaehler Uzaylar

Teorem 3.1.1. Semi-simetrik metrik F-konneksiyonlu uzaylar yaklaşık Kaehler uzaylardır, yani, bu uzaylar

$$F_{hij} = D_h F_{ij} + D_i F_{jh} + D_j F_{hi} = 0 \tag{3.1.1}$$

denklemini sağlar.

İspat. M_n, semi-simetrik F-konneksiyona sahip olduğundan, (2.1.2) kullanılır ve sırasıyla $D_h F_{ij}, \quad D_i F_{jh}, \quad D_j F_{hi}$ büyüklükleri hesaplanırsa

$$D_h F_{ij} = D_h(g_{jk} F_i{}^k) = g_{jk} D_h F_i{}^k, \tag{3.1.2}$$

$$D_i F_{jh} = D_i(g_{hk} F_j{}^k) = g_{hk} D_i F_j{}^k, \tag{3.1.3}$$

$$D_j F_{hi} = D_j(g_{ik} F_h{}^k) = g_{ik} D_j F_h{}^k \tag{3.1.4}$$

bulunur. Buradan da (3.1.1)

$$D_h F_{ij} + D_i F_{jh} + D_j F_{hi} = 0$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2. Semi-simetrik metrik F-konneksiyonlu uzaylarda yaklaşık Kaehler yapı integre edilebilir ise, yaklaşık yapı Kaehler yapıdır.

İspat. Yaklaşık kompleks $F_k{}^i$ yapısı, yaklaşık Kaehler yapısı olduğundan

$$D_h F_{ij} + D_i F_{jh} + D_j F_{hi} = 0 \tag{3.1.5}$$

ve

$$N_{ij}{}^k = F_i{}^h(D_h F_j{}^k - D_j F_h{}^k) - F_j{}^h(D_h F_i{}^k - D_i\, F_h{}^k) \tag{3.1.6}$$

dir. (3.1.6) denklemi g_{km} ile çarpılıp k üzerinden toplam alınırsa

$$F_i{}^h(D_h F_{jm} - D_j F_{hm}) - F_j{}^h(D_h F_{im} - D_i F_{hm}) = 0\,, \tag{3.1.7}$$

bulunur. (3.1.6) ve (3.1.7) den

$$D_h F_{ij} + D_i F_{jh} = -D_j F_{hi}\,, \tag{3.1.8}$$

$$D_h F_{jm} = -D_j F_{mh} - D_m F_{hj} = D_j F_{hm} - D_m F_{hj}\,, \tag{3.1.9}$$

$$D_h F_{im} = -D_i F_{mh} - D_m F_{hi} = D_i F_{hm} - D_m F_{hi} \tag{3.1.10}$$

elde edilir. Buradan da

$$F_i{}^h(-D_m F_{hj}) - F_j{}^h(-D_m F_{hi}) = 0 \tag{3.1.11}$$

bulunur. Denklem (3.1.11) i $F_n{}^i$ ile çarpıp i üzerinden toplarsak

$$F_n{}^i F_i{}^h(-D_m F_{hj}) - F_n{}^i F_j{}^h(-D_m F_{hi}) = 0 \tag{3.1.12}$$

ve $F_n{}^i F_i{}^h = -\delta_n^h$ olduğundan

$$D_m\, F_{nj} + F_n{}^i F_j{}^h(D_m\, F_{hj}) = 0 \tag{3.1.13}$$

elde edilir. $F_n{}^i$ yaklaşık Hermitsel yapı olduğu için $F_n{}^i F_j{}^h F_{hi} = F_{jn}$ dir. Buradan da

$$F_{hi} D_m(F_n{}^i F_i{}^h) = 0 \tag{3.1.14}$$

elde edilir ve

$$-D_m F_{nj} + D_m F_{jn} = 0 \tag{3.1.15}$$

bulunur. F_{nj} tensörleri anti-simetrik tensörler olduğundan (3.1.15) denkleminden

$$D_m F_{jn} = 0 \tag{3.1.16}$$

bulunur. (3.1.16) denklemi g^{nk} ile çarpılırsa

$$D_m F_j{}^k = 0 \tag{3.1.17}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.3. $F_i{}^j$ yaklaşık Hermitsel yapı

$$D_i F_{jk} = D_j F_{ik} = 0 \tag{3.1.18}$$

eşitliğini sağlarsa, $F_i{}^j$ bir Kaehler yapıdır.

İspat. F_{ij} tensörü anti-simetrik olduğu için

$$D_i F_{jk} + D_i F_{kj} = 0 \tag{3.1.19}$$

elde edilir. Denklem (3.1.18) ve (3.1.19) kullanılarak

$$D_i F_{jk} + D_k F_{ij} = 0 \tag{3.1.20}$$

elde edilir. İndisler devirsel olarak değiştirilirse

$$2(D_i F_{jk} + D_j F_{ki} + D_k F_{ij}) = 0\,, \tag{3.1.21}$$

$$2(D_i F_{jk} + D_i F_{kj} + D_j F_{ki}) = 0 \tag{3.1.22}$$

bulunur, (3.1.22) denkleminden (3.1.21) denklemi çıkarılırsa

$$D_i\, F_{kj} = 0\,,$$

ve buradan da

$$D_i\, g_{jm}\, F_k^{\ m} = 0 \tag{3.1.23}$$

bulunur. Denklem (3.1.23) g^{jt} ile çarpılırsa

$$g^{jt}\, D_i\, g_{jm}\, F_k^{\ m} = 0 \tag{3.1.24}$$

her t, i, k için

$$D_i\, F_k^{\ t} = 0 \tag{3.1.25}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.4. Eğer F_i^j yaklaşık kompleks yapısı

$$F^{ij}\, D^k\, D_k\, F_{ij} = 0 \tag{3.1.26}$$

koşulunu sağlarsa, $(D^k = g^{jk}\, D_j)$ $F_i^{\ j}$ yapısı Kaehlerdir.

İspat. $F_{ij}\, F^{hi} = -\delta_j^h$ olduğundan

$$F_{ij}\, F^{ij} = 2n \tag{3.1.27}$$

dir. (3.1.27) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$D_k\,(F_{ij}\, F^{ij}) = F_{ij}\,(D_k F^{ij}) = 0 \tag{3.1.28}$$

elde edilir. Buradan da

$$D^k\, D_k\, (F_{ij}\, F^{ij}) = F^{ij}\, D^k\, D_k\, F_{ij} + (D^k\, F^{ij})\, (D_k\, F_{ij}) = 0 \tag{3.1.29}$$

bulunur. (3.1.29) da (3.1.28) kullanılırsa $(D^k F^{ij})(D_k F_{ij}) = 0$ elde edilir ve buradan da

$$D_k F_{ij} = 0 \tag{3.1.30}$$

bulunur.

4 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Yano ve Imai'nin [3]'de ele aldığı semi-simetrik metrik F-konneksiyonlu uzaylar gözönüne alınıp, bu uzaylarda yaklaşık yapı, Hermitsel yapı, Kaehler yapı tanımları verilmiştir. g_{ij} Hermitsel metrik tensörüne ve $F_i{}^h$ kompleks yapısına sahip bir Kaehler manifoldunda p_i ve q_i formları (2.1.29) ve (2.1.31) deki gibi tanımlan formlar olmak üzere, semi-simetrik metrik F-konneksiyonu D nin katsayıları (2.1.32) deki gibi ve semi-simetrik metrik F-konneksiyonlu uzayın eğrilik tensörü de (2.2.12) şeklinde elde edilmiştir. Bu uzayın eğrilik tensörünün sıfır olması durumunda konneksiyon katsayılarında yer alan p_i ve q_i tensörleri cinsinden ifade edilen (2.2.14) ve (2.2.15) de tanımlanan p_{ij} ve q_{ij} tensörleri arasındaki bağıntılar bulunmuştur.

Uzayın eğrilik tensörünün sıfır olması durumunda Bochner eğrilik tensörünün de sıfır olacağı gösterilmiştir.

Ayrıca, semi-simetrik metrik F-konneksiyonlu uzayların hangi koşullar altında yaklaşık Kaehler uzayı ve Kaehler uzayı olacağı teoremlerle ifade ve ispat edilmiştir.

Bundan sonra yaklaşık Tachibana (nearly Kaehler) yapıları semi-simetrik metrik F-konneksiyonlu uzaylar için incelenebilir. Bu uzaylara ait metrik örnekleri araştırması yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] **Yano, K.**, 1970. On semi-symmetric metric connection, Type, Rev. *Roumanie Math. Prues Appl.*, **15**, 1579-1586

[2] **Liang, Y.X.**, 1988. On semi-symmetric and reccurent metric connection, *Type, Tensor, N.S.*,**55**, 107-112

[3] **Yano, K., Imai, T.**, 1975. On semi-symmetric metric F-connection, *Tensor, N.S.*,**29**, 134-138.

[4] **Weatherburn, C.E.,**, 1966. An introduction to Riemanian Geometry and The Tensor Calculus, *Cambrige University Press*, Cambrige.

[5] **Eisenhart, L.P.,**, 1927. Non-Riemanian Geometry. *American Mathematical Society, Colloquium Publications*, Volume $VIII$.

[6] **Carmo, M.P.do**, 1992. Riemanian Geometry. Mathematics: *Thory and Applications*. Boston, Mass.

[7] **Yano, K.,**, 1965. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces,*Pergamon Press*

[8] **Yano, K., Kon, M.,** 1984. *Structures on Manifolds World Scientific Pub.*

[9] **Kobayashi, S., Nomizu, K.,** 1969. Foundations of Differential Geometry, *Vol.2 Interscience Publishers*

ÖZGEÇMİŞ

12 Aralık 1979 yılında Mardin' in Ömerli ilçesinde doğdu. 1999 yılında İskenderun Cumhuriyet Lisesi' nden ve 2005 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik ve Fizik(İkinci Lisans) bölümlerinden mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'nde Yüksek Lisans programına başladı ve 2006 yılında aynı bölümde araştırma görevlisi olarak atandı. Halen aynı bölümde araştırma görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.