



## SANKİ-BİR-BOYUTLU KAVİTASYONLU DAİMİ LÜLE AKIŞLARININ ZAMANA GÖRE KARARLILIĞI

Şenay Pasinlioğlu\*  
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

Can Fuat Delale†  
Işık Üniversitesi, İstanbul

### ÖZET

*Bu çalışmada, kabarcıklı sıvılarda sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu daimi lüle akışı çözümlerinin, kabarcık/kabarcık etkileşmeleri de gözönünde bulundurularak, zamana göre kararlılığı incelenmiştir. Bunun için homojen kabarcıklı sıvı akışı modeli kullanılarak, sanki-bir-boyutlu daimi olmayan kavitasyonlu lüle akış denklemleri kabarcık dinamiği yasasıyla birleştirilerek (iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi) model denklemler inşa edilmiştir. Başlangıç dağılımları, giriş koşulları ve lüle geometrisi, lülide kavitasyon oluşacak şekilde alınmıştır. Çeşitli varsayımlar altında önerilen model denklem sistemi, genelleştirilmiş özdeğer probleminde dönüştürülmüş ve lülenin belli bölgeleri için özdeğerler hesaplanmıştır. Özdeğer problemindeki denklem sisteminin tüm katsayılarının hemen hemen sabit olduğu lüle giriş bölgesinde, normal mod analizi yöntemiyle problem kesin olarak çözülmüştür. Çeşitli akış parametrelerinin (kavitasyon sayısı, vs.) için kararlılık diyagramları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, kavitasyonlu daimi lüle akışı çözümlerinin sadece çok küçük dalga sayıları için zamana göre kararlı olduğunu göstermiştir.*

### GİRİŞ

Kavitasyon, yani başlangıçta homojen olan bir sıvıda buhar boşluklarının görülmesi olayı, değişik durumlarda oluşabilir. Kaviteasyon, oldukça düşük basınçlar altında sıvı ortamın faz geçişi yoluyla iki-fazlı sıvı-kabarcık karışımına dönüşümü olarak tanımlanabilir. Bu faz geçişi, sıvının durgun ya da akış halinde olduğu durumlarda meydana gelebilir. Kaviteasyon olayına, genellikle, sıvı basıncını yaklaşık olarak sabit bir sıcaklıkta sıvının doyma basıncının altına düşürmekle erişilir. Akış halindeki bir sıvıda, özellikle, sıvı akışının küçük kesitlerden büyük hızla geçişi kaviteasyon olayını doğurmaktadır. Bir su türbini, gemi pervanesi, su pompası vb. kaviteasyona elverişli koşullar altındadır. Kaviteasyonlu akışlarda sıvı içindeki kabarcıklar yeterli derecede düşük bir basınç bölgesine taşındığında, adeta patlarcasına büyüyerek makro boyutlara erişir ve yeniden yüksek basınç bölgesine taşındıklarında şiddetli bir şekilde büzülürler. Kaviteasyon buhar boşluklarının sıvıda doğup kaybolmaları son derece yüksek frekanslarla tekrarlanır ve buhar boşluklarının yok olması sırasında, çevredeki sıvının hücumu sonucu şok dalgaları oluşur ve bu dalgalar boru cidarı, makina pervanesi gibi katı cisim üzerinde darbe etkisi yaratır. Sonucunda bu elemanların darbelere maruz kaldığı bölgeler aşınır.

\* Öğr. Gör. Dr., Matematik. Müh. Böl., E-posta: pasinliogl@itu.edu.tr

† Prof. Dr., Makine Müh. Böl., E-posta: delale@isikun.edu.tr

Kavitasyon konusundaki literatür çok zengin olmasına karşın, verilen bir akış hali için kavitasyonun fiziksel mekanizması tam olarak anlaşılmış değildir. Konunun belli başlı kitapları arasında [16], [14], [11] ile [5] sayılabilir. Ayrıca, bazı ayrıntılar için [19] ile [18]'in derleme makalelerine de başvurulabilir. Kavitasyon, kuramsal olarak modellenmesi zor bir olaydır. Daimi olmayan kavitasyonlu akışların sayısal simülasyonu için genellikle homojen iki-fazlı akış modeli kullanılır. Bu akışlar için, geometrik açıdan en basit konfigürasyonu kavitasyonlu yakınsak-ıraksak lüle akışları oluşturur. Yakınsak-ıraksak bir lüleden geçen kabarcıklı sıvı akış modeli ilk kez barotropik bir bağıntı kullanılarak incelenmiştir [23]. Problem, daimi olmayan etkiler gözönüne alınarak [12]'de yeniden ele alınmış, fakat kabarcık dinamiği ihmal edilmiştir. Kavitasyonlu akışlar için kabarcık dinamiği yasası ile lüle akış denklemlerini birlikte düşünmek zorunludur. Klasik Rayleigh-Plesset denklemi ile tanımlanan küresel kabarcık dinamiği yasasını akış denklemlerine bağlayan sürekli bir kabarcıklı karışım akış modeli [20]'de önerilmiştir. Bu model kullanılarak, sanki-bir-boyutlu yakınsak-ıraksak lülelerdeki kabarcıklı kavitasyonlu daimi akışların çözümleri [10] ile [9]'da incelenmiştir. Daimi akış çözümlerinin yanısıra, patlayan çözümler de bulunmuştur. Bu modelin daimi olmayan akış hallerinde incelenmesi, özellikle deneylerde gözlenen bazı kavitasyonlu akış rejimlerinin (örneğin salınım yapan kavitasyon akışları, kavitasyonlu akışlarda şok dalgaları oluşumu, vb.) yorumlanmasına yol açmıştır ([8]). Özellikle, [10] ile [9]'da lüle geometrisi ve diğer parametreler sabit alınıp sadece bir parametrenin belirli bir aralıkta değiştirilmesi durumunda, sanki-bir-boyutlu lülelerde daimi akış çözümlerinin var olduğu gösterilmiştir. Bu parametre, genellikle, başlangıçtaki giriş hacimsel kabarcık oranı ya da giriş kavitasyon sayısı  $\sigma_i$  olarak seçilir. Parametrelerden herhangi birinin belirli bir kritik değerinin altında ya da üzerinde değiştirilmesi durumunda, daimi akış çözümlerinde kararsızlıklar görülür. Bu nedenle, daimi akış çözümlerinin var olduğu durumda, bu çözümlerin zamana bağlı kararlılığının incelenmesinde yarar vardır.

Bu çalışmada, kabarcıklı sıvılarda kavitasyonlu daimi lüle akışı çözümlerinin kararlılığı problemi ele alınmıştır. Bu problemin amacı, yakınsak-ıraksak bir lülide sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu daimi kabarcıklı akış çözümlerinin, kabarcık/kabarcık etkileşimleri ([13],[9]) de gözönünde bulundurularak, zamana göre kararlılığını incelemektir. Bunun için homojen kabarcıklı sıvı akışı modeli kullanılarak, sanki-bir-boyutlu daimi olmayan kavitasyonlu lüle akış denklemleri kabarcık dinamiği yasasıyla birleştirilerek (iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi) model denklemler inşa edilmiştir. Kabarcıkların oluşumu (çekirdekleşme ve kabarcık bölünmesi [6, 4, 3]) ve birleşmesi ihmal edilmiştir. Tüm sönüm mekanizmaları, viskoz yutulma biçiminde tek bir sönüm katsayısı olarak ele alınmış, kabarcıkların büyüme ve büzülmelerinde kabarcık içindeki gaz için politropik yasa kullanılmıştır. Başlangıç dağılımları, giriş koşulları ve lüle geometrisi, lülide kavitasyon oluşacak şekilde alınmıştır. Kavitasyonlu akışı modellemek için [22], [20], [19] tarafından önerilen, [10], [9] ve [8] tarafından geliştirilen, daimi olmayan sanki-bir-boyutlu lüle akış denklemleri ile küresel kabarcık dinamiğini birbirine bağlayan model denklemler kullanılmıştır. Bu varsayımlar altında önerilen model denklem sistemi, akış hızı ve kabarcık yarıçapı için iki evrim denkleminde indirgenmiştir. Evrim denklemleri, daimi olmayan akış baz alınarak pertürbe edilmiş, kabarcık yarıçapı ve akış hızı pertürbasyonları için kuple lineer kısmi diferensiyel denklem sistemi elde edilmiştir ([1]). Kuple lineer denklem sistemi genelleştirilmiş özdeğer problemine dönüştürülmüştür. Lülelerde en önemli bölgeler giriş ve boğaz bölgeleridir. Eğer verilen bir akış, lülenin giriş bölgesinde kararlı değilse, lülenin tamamında da kararlı olmayacaktır. Bu yüzden kararlılık problemi için lülenin önce giriş bölgesini incelemek gereklidir. Elde edilen denklem sistemindeki katsayıların, lülenin giriş bölgesinde hemen hemen sabit olduğu gösterilebilir ([1]). Dolayısıyla, zamana bağlı kararlılık problemini lüle giriş bölgesinde normal mod analizi yöntemiyle kesin olarak çözmek olasıdır. Elde edilen özdeğer problemi, denklem sistemindeki tüm katsayılarının hemen hemen sabit olduğu lüle giriş bölgesinde, normal mod analizi yöntemiyle problem kesin olarak çözülmüştür. Çeşitli akış parametrelerinin (kavitasyon sayısı, hacimsel kabarcık oranı, vs.) k dalga sayısı ile değişimi için kararlılık diyagramları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, kavitasyonlu daimi lüle akışı çözümlerinin sadece çok küçük dalga sayıları için zamana göre kararlı olduğunu göstermiştir. Lüle giriş

bölgesi için kararlılık diyagramlarındaki kararlı bölgelerin türbülanslı cidar kayma gerilmesi etkisi gözönünde bulundurulduğunda genişlediği görülmüştür. Kabarcık/kabarcık etkileşme parametresinin değişimiyle kararlılık bölgeleri üzerinde önemli bir değişim gözlenmemiştir.

### Kavitasyonlu kabarcıklı sıvı akışları için model denklemler

Bu bölümde, sanki-bir-boyutlu yakınsak-ıraksak bir lülede kavitasyonlu daimi olmayan akışlar için model denklemler göz önünde bulundurulacak, başlangıç ve sınır koşulları ile lüle geometrisi, lülede kavitasyon oluşacak tarzda ele alınacaktır. Kavitasyonlu akışı modellemek için [22] ve [20], [19]'da önerilen, [10], [9] ile [8] tarafından geliştirilen, daimi olmayan sanki-bir-boyutlu lüle akış denklemleri ile küresel kabarcık dinamiğini birbirine bağlayan model denklemler kullanılacaktır. Kabarcıklı karışımın sanki-bir-boyutlu lüle akışı için süreklilik ve momentum denklemleri

$$(1) \quad A' \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} (\rho' u' A') = 0$$

$$(2) \quad \rho' \frac{du'}{dt'} = - \frac{\partial p'}{\partial x'} - \frac{P'}{A'} \tau_w'$$

ve karışım yoğunluğu

$$(3) \quad \rho' = \rho_0' (1 - \beta)$$

biçiminde yazılabilir. (1)-(3) denklemlerinde  $u'$  akış hızını,  $p'$  karışım basıncını,  $\rho'$  karışım yoğunluğunu,  $\rho_0'$  sıkıştırılmaz varsayılan sıvının sabit yoğunluğunu,  $\beta$  hacimsel kabarcık oranını, ve  $\tau_w'$  türbülanslı cidar kayma gerilmesini göstermektedir. Ayrıca  $A'$  lüle kesit alanını,  $P'$  ıslak kesit çevresini,  $x'$  lüle eksen koordinatını (orijin boğazda olacak şekilde) ve  $t'$  gerçek zamanı göstermektedir. Momentum denklemi (2)'de viskoz ile yerçekimi terimleri ihmal edilmiş olup  $d/dt' = \partial/\partial t' + u' \partial/\partial x'$  materyal türevi göstermektedir. Eğer kabarcıkların oluşumu (çekirdekleşme ve kabarcık bölünmesi [6], [4], [3]) ve birleşmesi ihmal edilirse, karışımın birim hacimdeki kabarcık sayısı yoğunluğu  $n'$  hacimsel kabarcık oranı  $\beta$  cinsinden

$$(4) \quad n' = \eta_0' (1 - \beta)$$

olarak ifade edilebilir. Burada  $\eta_0'$  sıvının birim hacimdeki kabarcık yoğunluğu sayısıdır ve akış boyunca sabittir. Ayrıca, yarıçapı  $R'$  olan küresel kabarcıklardan oluşan karışımda,  $\beta$  hacimsel kabarcık oranı

$$(5) \quad \beta = \frac{4}{3} \pi R'^3 n' = \frac{(4/3) \pi R'^3 \eta_0'}{1 + (4/3) \pi R'^3 \eta_0'}$$

olarak tanımlıdır. (4) ve (5) denklemlerinden

$$(6) \quad \frac{R'^3 (1 - \beta)}{\beta} = \frac{3}{4 \pi \eta_0'} = \text{sabit}$$

bağıntısı elde edilir. Burada küresel kabarcık dinamiği için kabarcıkların birbirleriyle etkileşimini göz önünde bulunduran

$$(7) \quad \frac{p'_v - p'_g}{\rho'_i} = \frac{[1 + (2/3)\pi\eta'_0(3\Lambda^2 - 1)R'^3]}{[1 + (4/3)\pi\eta'_0 R'^3]} R' \frac{d^2 R'}{dt'^2} + \frac{3}{2} \frac{[1 + (8/3)\pi\eta'_0(2\Lambda^2 - 1)R'^3 + (16/9)\pi^2\eta'_0{}^2\Lambda^2 R'^6]}{[1 + (4/3)\pi\eta'_0 R'^3]} \left(\frac{dR'}{dt'}\right)^2 + \frac{2S'}{\rho'_i R'} + \frac{4\mu'_{eff}}{\rho'_i R'} \frac{dR'}{dt'} - \frac{p'_{gl}}{\rho'_i} \left(\frac{R'_0}{R'}\right)^{3k}$$

iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi kullanılacaktır ([9]). (7) denkleminde S' yüzey gerilim katsayısını,  $\rho'_v$ ' kabarcığın kısmi buhar basıncını,  $p'_{gl}$ ' kabarcığın lüle girişindeki kısmi gaz basıncını, k politropik üssü (sabit sıcaklıkta hal değişimi için  $k=1$ , izentropik hal değişimi için  $\gamma$  adyabatik üs olmak üzere  $k=\gamma$  olur),  $\mu'_{eff}$  viskoz yutulma şeklinde tüm sönüm

mekanizmalarını betimleyen karışımın efektif viskozitesini,  $\Delta r'$  kabarcıklar arası etkileşme erimi olmak üzere ([13], [9])

$$(8) \quad \Lambda = \frac{\Delta r'}{R'}$$

bağıntısı ile tanımlanan  $\Lambda$  ise kabarcık/kabarcık etkileşim parametresini göstermektedir. Önce akış hızı, karışım yoğunluğu, karışım basıncı ve kabarcık içindeki gaz ve buharın kısmi basınçları

$$(9) \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho'_i} = 1 - \beta, \quad p = \frac{p'}{p'_i}, \quad p_v = \frac{p'_v}{p'_i}, \quad p_g = \frac{p'_g}{p'_i}, \quad u = \frac{u'}{\sqrt{p'_i/\rho'_i}}$$

şeklinde boyutsuzlaştırılır. Burada  $p'_i$  lüle giriş basıncını ve  $\sqrt{p'_i/\rho'_i}$  karakteristik hızı göstermektedir. Ayrıca  $x'$  eksen koordinatı,  $H'_i$  (lüle giriş yüksekliği olarak seçilebilir) karakteristik bir makroölçek uzunluğu ile,  $A'$  kesit alanı  $A'_i$  lülenin giriş kesit alanı ile,  $t'$  zaman koordinatı  $\Theta' = \frac{H'_i}{\sqrt{p'_i/\rho'_i}}$  karakteristik akış zamanı ile,  $R'$  kabarcık yarıçapı  $R'_i$  karakteristik mikroölçek uzunluğu (lüle girişindeki kabarcık yarıçapı)

$$(10) \quad x = \frac{x'}{H'_i}, \quad A = \frac{A'}{A'_i}, \quad t = \frac{t'}{\Theta'} = \frac{\sqrt{p'_i/\rho'_i} t'}{H'_i}, \quad R = \frac{R'}{R'_i}$$

biçiminde boyutsuzlaştırılır ([2]). (1)-(7) denklemleri bu boyutsuzlaştırmalarla

$$(11) \quad \rho = 1 - \beta$$

$$(12) \quad A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u A) = 0$$

$$(13) \quad \rho \frac{du}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} - C_w \varphi \rho u^2$$

$$(14) \quad R^3 \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) = \frac{1-\beta_i}{\beta_i} = \kappa_i^3$$

$$(15) \quad \frac{p_v - p_g}{L^2} = \frac{[1 + (3\Lambda^2 - 1)(R/\kappa_i)^3 / 2]}{[1 + (R/\kappa_i)^3]} R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{[1 + 2(2\Lambda^2 - 1)(R/\kappa_i)^3 + \Lambda^2 (R/\kappa_i)^6]}{[1 + (R/\kappa_i)^3]^2} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{S_0}{L^2 R} + \frac{4}{L^2 (Re) R} \frac{dR}{dt} - \frac{p_{gl}}{L^2 R^{3k}}$$

normalize şeklini alır. Burada  $u$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $\beta$  ve  $R$  sırasıyla, boyutsuz akış hızını, karışım basıncını, karışım yoğunluğunu, hacimsel kabarcık oranını ve kabarcık yarıçapını göstermektedir. Ayrıca,  $L$  mikro ile makro boyutlar arasındaki oran

$$(16) \quad L = \frac{R'_i}{H'_i},$$

$C_w$  cidar kayma gerilmesi katsayısı

$$(17) \quad C_w = \frac{\tau'_w}{(1/2)\rho' u'^2},$$

$\varphi$  ıslanan çevrenin kesit alanına oranını betimleyen boyutsuz katsayı

$$(18) \quad \varphi = \frac{H'_i P'}{2A'},$$

$\kappa_i$  hacimsel kabarcık oranını betimleyen bir parametre

$$(19) \quad \kappa_i^3 = \frac{1-\beta_i}{\beta_i},$$

$S_0$  boyutsuz yüzey gerilim katsayısı

$$(20) \quad S_0 = \frac{2S'}{\rho'_i R'_i}$$

ve  $\mu'_{eff}$  tüm sönüm katsayısı olmak üzere  $Re$  tipik Reynolds sayısı

$$(21) \quad Re = \frac{\rho'_i H'_i \sqrt{P'_i / \rho'_i}}{\mu'_{eff}}$$

olarak tanımlıdır. Yukarıdaki (11)-(15) denklemleri  $p$ ,  $\rho$ ,  $\beta$ ,  $u$ ,  $R$  bilinmeyenler ve  $A = A(x)$  verilen kesit alanı değişimi olmak üzere kaviteyonlu daimi olmayan lüle akışları için model denklemleri oluştururlar.

### Akış hızı ve kabarcık yarıçapı için evrim denklemleri

(11), (12) ve (14) denklemleri arasında hacimsel kabarcık oranı  $\beta$  ile karışım yoğunluğu  $\rho$  yok edilirse,

$$(22) \quad \frac{dR}{dt} - \frac{R}{3\beta(1-\beta)} \frac{d\beta}{dt} = \frac{dR}{dt} - \frac{R}{3\beta A} \frac{\partial}{\partial x}(uA) = 0$$

denklemleri elde edilir. Ayrıca (15) iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi  $x$ 'e göre türetilip, (22) denkleminden de  $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{dR}{dt})$  ve  $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{d^2R}{dt^2})$  kısmi türev ifadeleri elde edildiğinde, (13) momentum

denklemleri ile aralarında  $p$  basıncı yok edilebilir. Daha sonra birtakım düzenlemeler yapılarak kabarcık yarıçapı  $R(x,t)$  ve akış hızı  $u(x,t)$  için

$$(23) \quad \frac{\partial R}{\partial t} = -u \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{3R^2} (R^3 + \kappa_i^3) \left[ \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u + \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

ve

$$(24) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t)$$

evrim denklemleri elde edilir. Burada yerel ani ivmesi  $a(x, t)$

$$(25) \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + g(R, \frac{\partial R}{\partial x}, x) \frac{\partial a}{\partial x} + h(R, \frac{\partial R}{\partial x}, x) a = s(R, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, x)$$

lineer kısmi diferansiyel denklemini sağlar. Yukarıdaki  $g$ ,  $h$ , ve  $s$  fonksiyonları sırasıyla

$$(26) \quad g(R, \frac{\partial R}{\partial x}, x) = \frac{F_1(R)}{F_2(R)} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx},$$

$$(27) \quad h(R, \frac{\partial R}{\partial x}, x) = \frac{F_1(R)}{F_2(R)} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{F_7(R)}{F_2(R)} + \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right),$$

$$(28) \quad \begin{aligned} s(R, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, x) = & - \left\{ u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right. \\ & + \left[ \frac{F_1(R)}{F_2(R)} u \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{F_4(R)}{F_2(R)} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{F_4(R)}{F_2(R)} u \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{F_5(R)}{F_2(R)} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ & + \frac{F_6(R)}{F_2(R)} \frac{\partial R}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left[ \frac{F_7(R)}{F_2(R)} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) - 3 \frac{F_3(R) F_5(R)}{R F_2(R)} \right] \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{F_4(R)}{F_2(R)} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\ & + \left[ \frac{F_8(R)}{F_2(R)} u \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{F_9(R)}{F_2(R)} u \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 + \frac{F_5(R)}{F_2(R)} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{F(R)}{F_2(R)} u \right] \frac{\partial u}{\partial x} \\ & + \left[ \frac{F_6(R)}{F_2(R)} u^2 \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 - 3 \frac{F_3(R) F_5(R)}{R F_2(R)} u \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right. \\ & + \frac{F_1(R)}{F_2(R)} u^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{F_{10}(R)}{F_2(R)} \left. \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{F_9(R)}{F_2(R)} u^2 \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + u^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right. \\ & \left. + \frac{F_5(R)}{F_2(R)} u \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{[\partial p_v / \partial x + \kappa_i^3 C_w \rho u^2 / (R^3 + \kappa_i^3)]}{F_2(R)} \right\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır. (26)-(28) denklemlerindeki  $F_j, j=1,2,\dots,10$  fonksiyonları [1]'de

tanımlanmıştır. (23)-(25) denklemleri, verilen bir lüle geometrisi için, başlangıçtaki kabarcık yarıçapı ve akış hızı dağılımı ve belirlenen sınır koşulları ile birlikte çözülür. Bu durumda diğer hidrodinamik değişkenler bu çözümle ilişkilendirilerek elde edilir. Özellikle, basınç alanı

$$(29) \quad \begin{aligned} p = p_v - \frac{L^2 \kappa_i^6}{18R^4} & \left[ (6\Lambda^2 - 1)(R/\kappa_i)^6 + (6\Lambda^2 - 2)(R/\kappa_i)^3 - 1 \right] \left[ \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u + \frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 \\ & - \frac{L^2 \kappa_i^3}{6R} \left[ 2 + (3\Lambda^2 - 1)(R/\kappa_i)^3 \right] \left[ \frac{\partial a}{\partial x} + \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) a + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ & \left. + u^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right] - \frac{S_0}{R} + \frac{P_{\text{atm}}}{R^{3k}} - \frac{4\kappa_i^3}{3(R\epsilon)R^3} \left[ 1 + (R/\kappa_i)^3 \right] \left[ \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u + \frac{\partial u}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

bağıntısı ile bulunur. Son olarak  $\beta$  hacimsel kabarcık oranı ve  $\rho$  karışım yoğunluğu

$$(30) \quad \beta = 1 - \rho = \frac{R^3}{R^3 + \kappa_i^3}$$

bağıntılarıyla hesaplanır.

### Sanki-bir-boyutlu kaviteasyonlu daimi lüle akışlarının kararlılığı

Bu bölümde, (23) ve (24) evrim denklemleri kullanılarak sanki-bir-boyutlu kaviteasyonlu daimi lüle akışları için model denklemlerin çözümlerinin zamana bağlı kararlılığı incelenecektir. [10] ile [9], lüle geometrisi ve diğer parametreler sabit alınıp sadece bir parametrenin belirli bir aralıkta değiştirilmesi durumunda, sanki-bir-boyutlu lülelerde daimi akış çözümlerinin var olduğunu göstermişlerdir. Bu parametre, genellikle, giriş başlangıç hacimsel kabarcık oranı  $\beta_i$  veya

$$(31) \quad \sigma_i = \frac{p_i' - p_v'}{(1/2)\rho_i' u_i'^2} = \frac{1 - p_v}{(1/2)u_i^2}$$

ile tanımlanan giriş başlangıç kaviteasyon sayısı  $\sigma_i$  olarak seçilir. Burada  $u_i'$  ve  $u_i$ , sırasıyla, boyutlu ve boyutsuz lüle girişindeki akış hızlarıdır. Parametrelerden herhangi birinin belirli bir kritik değerinin altında ya da üzerinde değiştirilmesi durumunda daimi akış çözümlerinde kararsızlıklar görülür. Bu nedenle, daimi akış çözümlerinin var olduğu durumda, bu çözümlerin zamana bağlı kararlılığının incelenmesinde yarar vardır. Sanki-bir-boyutlu kaviteasyonlu daimi lüle akışlarının zamana bağlı kararlılığını incelemek için önce daimi olmayan lüle akışı için elde (23) ve (24) evrim denklemlerine daimi akışlardaki  $\bar{u}(x)$  akış hızı ve  $\bar{R}(x)$  kabarcık yarıçapı alanları baz alınarak,

$$(32) \quad u = \bar{u}(x)[1 + \varepsilon w(x, t)]$$

$$(33) \quad R = \bar{R}(x)[1 + \varepsilon \phi(x, t)]$$

şeklinde zamanla değişen  $w$  ve  $\phi$  (her ikisi de  $O(1)$  mertebesinde) yerel pertürbasyonları uygulanır. (32) ve (33) denklemlerindeki  $\varepsilon > 0$  parametresi  $o(1)$  mertebesinde dir. Buradaki  $\bar{u}$  ve  $\bar{R}$  değişkenleri, daimi lüle akışı denklemlerinin çözümlerinden elde edilmiştir ([9]). (23) ve (24) evrim denklemlerine verilen pertürbasyonlar uygulanıp birtakım düzenlemeler yapıldığında  $w(x, t)$  ve  $\phi(x, t)$  için

$$(34) \quad A_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + A_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + A_5 \frac{\partial w}{\partial x} + A_6 \frac{\partial w}{\partial t} + A_7 \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_8 w + A_9 \phi = 0$$

$$(35) \quad C_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + C_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + C_5 \frac{\partial w}{\partial x} + C_6 \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} + C_7 w + C_8 \phi = 0$$

denklemleri elde edilir. (34) ve (35) denklemlerinde,  $\lambda_i = (1 - \beta_i)u_i$  ve  $(\bar{u}A - \lambda_i) \neq 0$  olmak üzere

$$(36) \quad C_1 = \bar{u} \frac{A_1}{A_7}, C_2 = \bar{u} \frac{A_2}{A_7}, C_3 = \bar{u} \frac{A_3}{A_7}, C_4 = \bar{u} \frac{A_4}{A_7}, C_5 = \bar{u} \frac{A_5}{A_7} + \frac{\bar{u}^2 A}{3(\bar{u}A - \lambda_4)},$$

$$C_6 = \bar{u} \frac{A_6}{A_7}, C_7 = \bar{u} \frac{A_8}{A_7}, C_8 = \bar{u} \frac{A_9}{A_7} - \frac{\lambda_i}{\bar{u}A - \lambda_i} \left[ \frac{d\bar{u}}{dx} + \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \right]$$

biçimindedir ve  $A_j, j = 1, \dots, 9$  katsayıları [1]'de tanımlanmıştır. (34) ve (35)

denklemlerindeki  $A_j, j = 1, \dots, 9$  ve  $C_j, j = 1, \dots, 8$  katsayıları, daimi akışlardaki  $\bar{u}(x)$  akış hızı (veya  $\bar{r}(x)$  kabarcık yarıçapı)  $A(x)$  lüle alanı ve türevlerinin fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir.

### Lüle giriş bölgesi için normal mod analizi

Lülelerde en önemli bölgeler giriş ve boğaz bölgeleridir. Eğer verilen bir akış, lülenin giriş bölgesinde kararlı değilse, lülenin tamamında da kararlı olmayacaktır. Bu yüzden kararlılık problemi için lülenin önce giriş bölgesini incelemek gereklidir. (34) ve (35) denklem sistemindeki  $A_j, j = 1, \dots, 9$  ve  $C_j, j = 1, \dots, 8$  katsayılarının, lülenin giriş bölgesinde hemen hemen sabit olduğu gösterilebilir ([1]). Dolayısıyla, zamana bağlı kararlılık problemini lüle giriş bölgesinde normal mod analizi yöntemiyle kesin olarak çözmek olasıdır.  $k$  pertürbasyon dalga sayısı,  $\omega$  açılal frekans,  $w$  ve  $\phi$ , sırasıyla, pertürbasyon akış hızı ve yarıçapı genliği olmak üzere (34) ve (35) denklemlerine

$$(37) \quad w = \hat{w} e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{ve} \quad \phi = \hat{\phi} e^{i(kx - \omega t)}$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$(38) \quad L\omega^2 + M\omega + N = 0$$

dispersiyon bağıntısı elde edilir. Yukarıdaki (38) bağıntısında  $L, M$  ve  $N$  katsayıları pertürbasyon dalga sayısı  $k$ 'nin karmaşık değerlikli fonksiyonları olup

$$(39) \quad L = L_R + iL_I = (A_6 - A_2 k^2) + iA_4 k$$

$$(40) \quad M = M_R + iM_I$$

$$= [(A_4 C_8 - A_5 - A_9 C_4 - A_7 C_6)k + (A_1 + A_7 C_2)k^3]$$

$$+ i[(A_8 - A_6 C_8 + A_9 C_6) + (A_2 C_8 - A_3 - A_7 C_4 - A_9 C_2)k]$$

ve

$$(41) \quad N = N_R + iN_I$$

$$= [(A_8 C_8 - A_9 C_7) + (A_7 C_5 + A_9 C_3 - A_3 C_8)k^2 - A_7 C_1 k^4]$$

$$+ i[(A_5 C_8 - A_7 C_7 - A_9 C_5)k + (A_7 C_3 + A_9 C_1 - A_1 C_8)k^3]$$

olarak tanımlanır. Burada  $R$  ve  $I$  indisleri, sırasıyla, reel ve sanal kısımları göstermektedir. Zamana bağlı kararlılık için  $k$  dalga sayısı reel,  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  açılal frekansı da kompleks sayı olarak alınır. Sistemin kararlılığı için  $\omega_i$  sanal kısmı negatif olmalıdır. (38) dispersiyon bağıntısından  $\omega$  için 4. dereceden

$$(42) \quad \varepsilon_4 \omega_I^4 + \varepsilon_3 \omega_I^3 + \varepsilon_2 \omega_I^2 + \varepsilon_1 \omega_I + \varepsilon_0 = 0$$



cebrîk denklemi elde edilir. Buradaki  $\varepsilon_j$  katsayılarının  $k'$  ya bağlı ifadeleri [1]'de tanımlanmıştır. Ayrıca  $\varepsilon_j, j = 0, \dots, 4$  katsayılarının  $k'$ 'nin çift fonksiyonları olduğu ispatlanabilir. Bu yüzden (42) denklemi ile verilen  $\omega_j$  'nın işaretini incelemek için yalnızca  $k > 0$  durumunu incelemek yeterli olacaktır. Bu  $k$  değerlerini bulmak için önce,  $k^2$  'ye göre 5. dereceden bir polinom olan  $\varepsilon_0$  'ın pozitif reel  $k_j, j \leq 5$  kökleri bulunur ki bu  $k_j, j \leq 5$  noktalarında  $\omega_j$  sıfırdır. Sonra  $\varepsilon_1 / \varepsilon_4$  'ün işaretinin yardımıyla, her  $k_j, j \leq 5$  'in en yakın civarında  $\omega_j$  'nın işareti bulunur. Daha sonra elde edilen bu  $k_j$  köklerinin fiziksel olanları belirlenir. Bunun için, lüle akış denklemlerindeki  $\mu'_{eff} / \mu'_i$  sönüm katsayısı artırılarak kararlı bölgenin artıp artmadığı incelenir. Eğer verilen bir kök için sönüm katsayısı artırıldığında kararlı bölge genişliyorsa, bu kök fiziksel bir köktür. Böylece  $\omega_j$  'nın işaretinden, sanki bir boyutlu kavitasyonlu daimi lüle akışlarının kararlı olduğu bölgeler belirlenir ve çeşitli akış parametreleri için kararlılık diyagramları elde edilir.

### Kararlılık diyagramları ve sonuçlar

Sayısal sonuçlar için su/su buharı-hava iki-fazlı sıvı/kabarcık karışımı ele alınmıştır. Kabarcıkların içindeki su buharı-hava gaz karışımının izotermal olarak genişlediği ve sıkıştırıldığı varsayılarak suyun sıcaklığı  $20^\circ\text{C}$  alınmıştır. Kabarcıkların içindeki kısmi buhar basıncı  $p'_v = 0.0234$  bar, yüzey gerilim katsayısı  $S' = 7.1 \times 10^{-3}$  N/m ve suyun viskozitesi  $\mu'_i = 10^{-3}$  kg/m-s olarak alınmıştır. Lüle giriş basıncı  $p'_i = 1.013$  bar değerinde sabit tutulmuştur. Geometrik özellikleri Şekil 1 ve Şekil 2'de gösterilen ve kesit alanı

$$(43) \quad A(x) = 1 - 0.25 \exp \left[ - \left( \frac{x - 150L}{30L} \right)^2 \right]$$

olan yakınsak-ıraksak bir lüle kullanılmıştır ([12]). Cidar kayma gerilmesi katsayısı  $C_w$ , türbülanslı akış durumunda ([17])

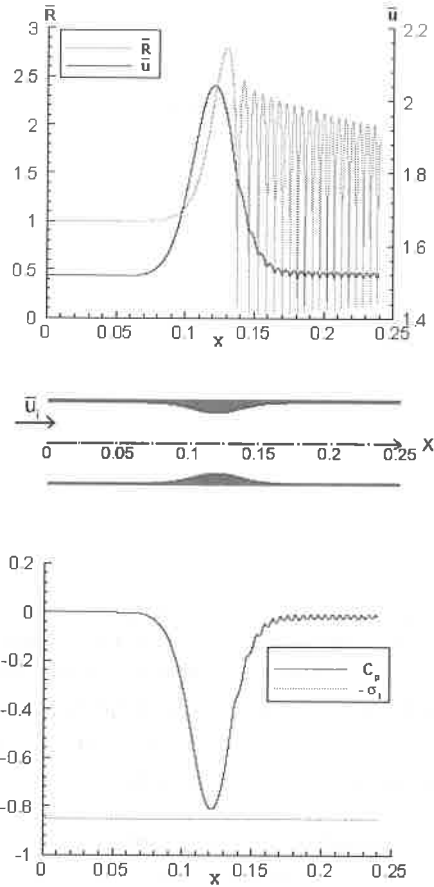
$$(44) \quad \frac{1}{C_w^{1/2}} = 1.768 \ln \left[ (\text{Re}_f) C_w^{1/2} \right] - 0.94$$

kullanılarak hesaplanmıştır (ideal akış durumunda  $C_w = 0$  değerindedir). Buradaki  $\text{Re}_f$  Reynolds sayısı, (21) denklemi ile verilen  $\text{Re}$  Reynolds sayısı ile

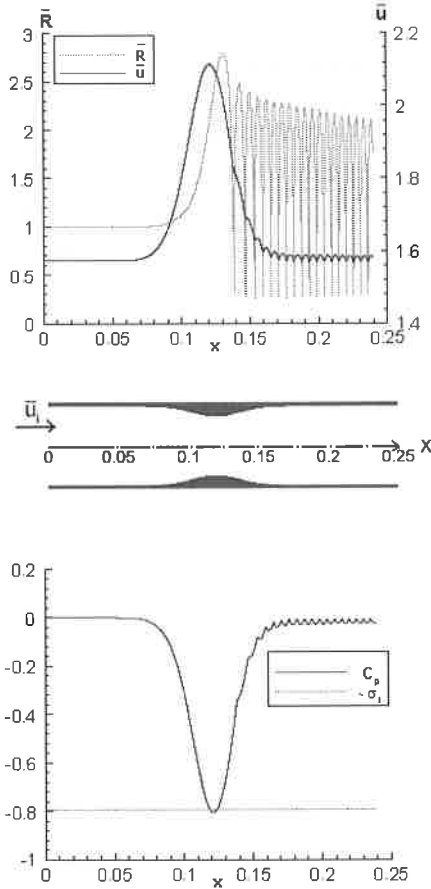
$$(45) \quad \text{Re}_f = 2uA(\text{Re}) \frac{\mu'_{eff}}{\mu'_i}$$

bağıntısıyla ilişkilendirilebilir. Lüle giriş kabarcık yarıçapı  $R'_{i0} = 40 \mu\text{m}$  ve  $L = 8 \times 10^{-4}$  olarak alınmıştır. Lüle girişinde kabarcık/kabarcık etkileşmesi ihmal edilebildiğinden, kabarcık/kabarcık etkileşme parametresi  $\Lambda = 1$  varsayılmıştır. Hem ideal akış, hem de türbülanslı akış durumunda lüle giriş hacimsel kabarcık oranı  $\beta_i = 10^{-3}$  ve  $\sigma_i$  kavitasyon sayısı 0.7 ile 1.0 arasında değiştirilmiştir. Sanki-bir-boyutlu daimi lüle akışları için model denklemlerin çözümlerinin, ancak  $\sigma_i$  kavitasyon sayısının  $\sigma_{ic}$  kritik değeri üzerinde (ya da  $\beta_i$  lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının  $\beta_{ic}$  kritik değerinin altında) mevcut olduğu bilinmektedir ([10], [9]). Yukarıda belirtilen koşullar altında ideal akış durumunda  $\mu'_{eff} / \mu'_i = 1$

iken  $\sigma_{ic} = 0.78$ ,  $\mu'_{eff} / \mu_l = 30$  iken  $\sigma_{ic} = 0.72$ ; türbülanslı cidar kayma gerilmesi gözönüne alındığında  $\mu'_{eff} / \mu_l = 1$  iken  $\sigma_{ic} = 0.78$ ,  $\mu'_{eff} / \mu_l = 30$  iken  $\sigma_{ic} = 0.76$  olduğu sonucu bulunur. Daimi akışlardaki  $\bar{u}(x)$  akış hızı,  $\bar{R}(x)$  kabarcık yarıçapı ve  $C_p(x)$  basınç katsayısının kavitsiyonsuz ( $\sigma_i > -(C_p)_{min}$ ) ve kavitsiyonlu ( $\sigma_i < -(C_p)_{min}$ ) kabarcıklı akışlardaki değişimi, sırasıyla, Şekil 1 ve Şekil 2'de görülmektedir. Buradaki  $(C_p)_{min}$ , minimum basınç katsayısını göstermektedir (bu durumda türbülanslı cidar kayma gerilmesinin etkisi ihmal edilmiştir). Yapılan bu çalışmada, yukarıda belirtilen varsayımlar altında  $\varepsilon_0(k_j) = 0$  denklemi için üç adet  $k_j$  kökü bulunmuş ve bu  $k_j; j=1,2,3$  köklerinin ayırdığı bölgelerde  $\omega_l$  ' ların işaretleri incelenmiştir. Ancak bulunan bu  $k_j; j=1,2,3$  değerleri için  $\omega_l$  'nın işareti uyumlu olmamıştır. Yani (42) denkleminin köklerinde dallanmalar meydana gelmiştir.

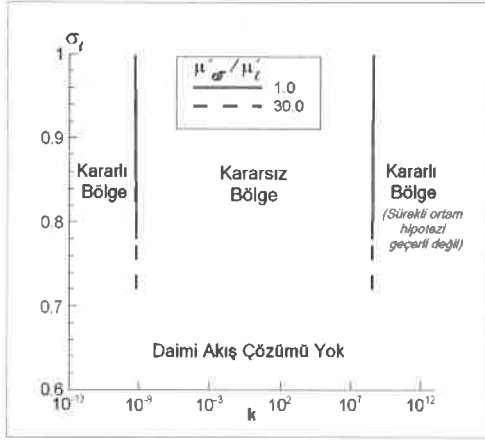


Şekil 1: Hava kabarcıkları içeren suyun daimi akışında kavitsiyonsuz kabarcık yarıçapı ve akış hızının (üst şekil), ve basınç katsayısının (alt şekil), (43) denklemiyle kesit alanı verilen lülenin (orta şekil) eksen koordinatı boyunca değişimleri. Burada sönüm katsayısı  $\mu'_{eff} / \mu_l = 1.0$ , kabarcık/kabarcık etkileşim parametresi  $\Lambda = 1.0$ , giriş kabarcık yarıçapı  $R'_i = 40 \mu m$ , mikrodan makroya ölçek oranı  $L = 8 \times 10^{-4}$ , giriş basıncı  $p'_i = 1.013$  bar, giriş hacimsel kabarcık oranı  $\beta'_i = 10^{-3}$  ve kavitsiyon sayısı  $\sigma_i = 0.85$  olarak alınmıştır.



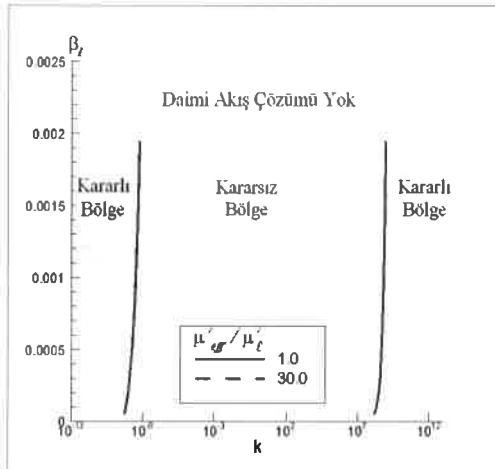
Şekil 2: Hava-su buharı içeren suyun daimi akışında kavitasyonlu kabarcık yarıçapı ve akış hızının (üst şekil), ve basınç katsayısının (alt şekil), (43) denklemiyle kesit alanı verilen lülenin (orta şekil) eksen koordinatı boyunca değişimleri. Burada sönüm katsayısı  $\mu'_{eff}/\mu'_t = 1.0$ , kabarcık/kabarcık etkileşim parametresi  $\Lambda = 1.0$ , giriş kabarcık yarıçapı  $R'_i = 40 \mu m$ , mikrodan makroya ölçek oranı  $L = 8 \times 10^{-4}$ , giriş basıncı  $p'_i = 1.013$  bar, giriş hacimsel kabarcık oranı  $\beta_i = 10^{-3}$  ve kavitasyon sayısı  $\sigma_i = 0.79$  olarak alınmıştır.

Bulunan bu  $k_j; j=1,2,3$  köklerinin fiziksel olanlarının belirlenmesi için, lüle akış denklemlerindeki  $\mu'_{eff}/\mu'_t$  sönüm katsayısı artırılarak kararlı bölgelerin genişleyip genişlemediği incelenmiştir. Sonuç olarak bu kriterle göre sadece  $k_1 \ll 1$  ve  $k_3 \gg 1$  köklerinin fiziksel olduğu bulunmuştur ([1]). Yapılan bu hesaplamalar sonucu elde edilen kararlılık bölgeleri, aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir. Şekil 3, yukarıda belirtilen koşullar altında  $\sigma_i$  kavitasyon sayısının ideal akış durumunda,  $k$  dalga sayısına karşı değişimini göstermektedir. Bu şekilden de açıkça görüldüğü gibi, burada kritik bir kavitasyon sayısının ( $\mu'_{eff}/\mu'_t = 1.0$  için  $\sigma_{ic} = 0.76$ ,  $\mu'_{eff}/\mu'_t = 30.0$  için  $\sigma_{ic} = 0.72$ ) altında daimi akış çözümlerinin olmadığı görülmektedir.



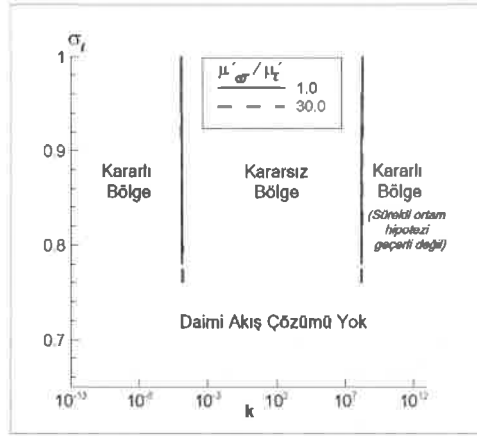
Şekil 3: Karışımın ideal akış durumunda sönüm katsayısının ( $\mu'_{eff}/\mu'_{el}$ ) farklı değerleri için (1.0 ve 30.0) lüle girişindeki kaviteasyon sayısının ( $\sigma_t$ ) pertürbasyon dalga sayısı ( $k$ ) değişimi ve kararlılık bölgeleri.

Kritik kaviteasyon sayısının üzerinde elde edilen daimi akış çözümleri ise, pertürbasyonun yalnızca çok küçük dalga sayıları ya da çok büyük dalga sayıları için kararlı çözümler elde edilmiştir. Ancak çok büyük dalga sayıları için sürekli ortam hipotezi geçerli olmadığından, bu bölgenin kararlılığı da safdışı bırakılmıştır. Sönüm katsayısı  $\mu'_{eff}/\mu'_{el}$  artırıldığında kararlılık diyagramındaki kararlı bölgelerde, bu durumda, önemli bir değişim görülmemektedir. Ancak kritik kaviteasyon sayısının değerinde değişme olmaktadır. Şekil 4, yukarıda belirtilen koşullar altında  $\beta_i$  hacimsel kabarcık oranının ideal akış durumunda,  $k$  dalga sayısına karşı değişimini göstermektedir. Şekilden görüldüğü gibi, pertürbasyonun yalnızca çok küçük dalga sayıları ya da çok büyük dalga sayıları için kararlı çözümler elde edilmiştir.



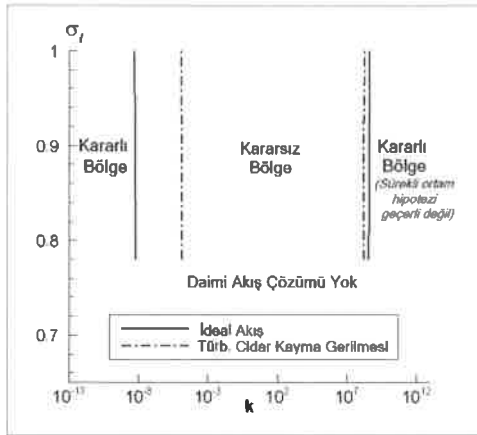
Şekil 4: Karışımın ideal akış durumunda sönüm katsayısının ( $\mu'_{eff}/\mu'_{el}$ ) farklı değerleri için (1.0 ve 30.0) lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının ( $\beta_i$ ) pertürbasyon dalga sayısı ( $k$ ) değişimi ve kararlılık bölgeleri.

Ancak çok büyük dalga sayıları için sürekli ortam hipotezi geçerli olmadığından, bu bölgenin kararlılığı da safdışı bırakılmıştır. Sönüm katsayısı  $\mu'_{eff}/\mu'_i$  artırıldığında kararlılık diyagramındaki kararlı bölgelerde, bu durumda, önemli bir değişim görülmektedir. Şekil 5, türbülanslı durumda  $\sigma_i$  kaviteasyon sayısının  $\mu'_{eff}/\mu'_i$  sönüm katsayısının farklı değerleri için,  $k$  dalga sayısı ile değişimini göstermektedir. Türbülanslı durumda da sönüm katsayısının kararlılık bölgesine önemli bir etkisi görülmektedir. Ancak kritik kaviteasyon sayısının değerini değiştirmektedir.



Şekil 5: Karışımın türbülanslı cidar kayma gerilmesinin gözönüne alındığı durumda sönüm katsayısının ( $\mu'_{eff}/\mu'_i$ ) farklı değerleri (1.0 ve 30.0) için lüle girişindeki kaviteasyon sayısının ( $\sigma_i$ ) pertürbasyon dalga sayısı ( $k$ ) değişimi ve kararlılık bölgeleri.

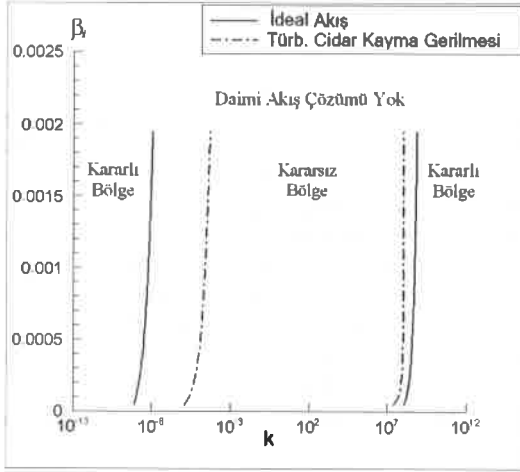
Bununla beraber türbülanslı cidar kayma gerilmesinin etkisi gözönüne alındığında, Şekil 6'da görüldüğü gibi kararlılık bölgesi genişlemektedir.



Şekil 6: Karışımın ideal akış ve türbülanslı cidar kayma gerilmesinin gözönüne alındığı hallerde lüle girişindeki kaviteasyon sayısının ( $\sigma_i$ ) pertürbasyon dalga sayısı ( $k$ ) değişimi ve kararlılık bölgeleri.

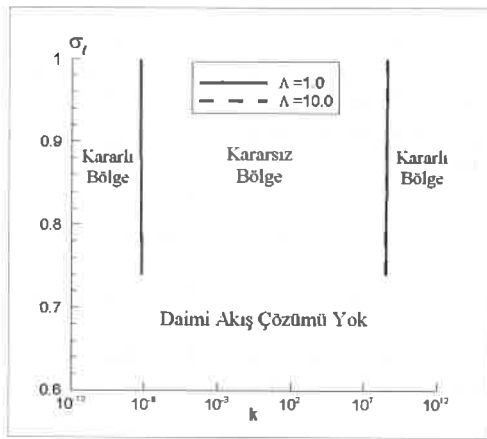
Bu durumda türbülansın etkisi yalnızca daimi akış için türbülanslı cidar kayma gerilmesi olarak gözönüne alınmıştır ve türbülanslı akış çalkantılarının kararlılığa etkisi gözönünde bulundurulmamıştır. Fiziksel olarak kararlı daimi akış çözümleri çok küçük dalga sayıları için gözlenmiştir. Burada kararlı bölge, türbülanslı durumda genişlemektedir.

Şekil 7, cidar kayma gerilmesinin etkisi gözönüne alındığında,  $\beta_i$  hacimsel kabarcık oranının  $k$  dalga sayısına karşı değişimini göstermektedir.



Şekil 7: Karışımın ideal akış ve türbülanslı cidar kayma gerilmesinin gözönüne alındığı hallerde lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının ( $\beta_i$ ) pertürbasyon dalga sayısı ( $k$ ) değişimi ve kararlılık bölgeleri.

Son olarak da kabarcık/kabarcık etkileşim parametresinin kararlılık bölgelerine etkisi incelenmiştir. Şekil 8'de görüldüğü gibi kabarcık/kabarcık etkileşim parametresinin değişimiyle kararlılık bölgeleri üzerinde önemli bir değişim gözlenmemiştir.



Şekil 8: Karışımın ideal akış durumunda kabarcık/kabarcık etkileşim parametresinin ( $\Lambda$ ) farklı değerleri için (1.0 ve 10.0) lüle girişindeki kaviteasyon sayısının ( $\sigma_i$ ) pertürbasyon dalga sayısı ( $k$ ) değişimi ve kararlılık bölgeleri.

Sonuç olarak, elde edilen kararlılık diyagramlarında, kavitasyon sayısının kritik bir değerin altında (ya da lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının kritik bir değerin üstünde) olduğu durumlarda, daimi akış çözümlerinin mevcut olmadığı görülmüştür. Daimi akış halinin mevcut olduğu hallerde, bu çözümlerin sadece çok küçük dalga sayıları için kararlı olduğu gözlemlenmiştir (aslında çok büyük dalga sayıları için de kararlı bölgeler bulunmuştur, ancak bu bölgelerde süreklilik hipotezi geçerliliğini yitirmektedir). Lüle giriş bölgesi için kararlılık diyagramlarındaki kararlı bölgeler, türbülanslı cidar kayma gerilmesi etkisiyle genişlemektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] Pasinlioğlu, Ş., Delale, C. F. ve Schnerr, G. H., *On the temporal stability of quasi-one-dimensional steady-state bubbly cavitating nozzle flow solutions*, IMA Journal of Applied Mathematics, 74, 230-249, doi: 10.1093/imamat/hxn036, 2009
- [2] Delale, C. F., Schnerr, G. H. ve Pasinlioğlu, Ş., *Model evolution equations for unsteady cavitating nozzle flows and their applications*, VI. International Symposium on Cavitation CAV2006, Wageningen, The Netherlands, September 2006
- [3] Delale, C. F., Okita, K. ve Matsumoto, Y., *Steady-State Cavitating Nozzle Flows with Nucleation*, ASME Journal of Fluids Engineering, 127, 770-777, 2005
- [4] Delale, C. F. ve Tunç, M., *A bubble fission model for collapsing cavitation bubbles*, Physics of Fluids, 16, 4200-4203, 2004
- [5] Franc, J.-P. ve Michel, J.-M., *Fundamentals of Cavitation*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands-2004
- [6] Brennen, C. E., *Fission of collapsing cavitating bubbles*, Journal of Fluid Mechanics, 472, 153-166, 2002
- [7] Drazin, P. G., *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press- 2002
- [8] Preston, A., Colonius, T. ve Brennen, C. E., *A numerical investigation of unsteady bubbly cavitating nozzle flows*, Physics of Fluids, 14, 300-311, 2002
- [9] Delale, C. F., Schnerr, G. H. ve Sauer, J., *Quasi-one-dimensional steady-state cavitating nozzle flows*, J. of Fluid Mechanics, 427, 167-204, 2001
- [10] Wang, Y.C. ve Brennen, C. E., *One-dimensional bubbly cavitating flows through a converging-diverging nozzle*, ASME J. of Fluids Engineering, 120, 166-170, 1998
- [11] Brennen, C. E., *Cavitation and bubble dynamics*, Oxford University Press-1995
- [12] Ishii, R., Umeda, Y., Murata, S. ve Shishido, N., *Bubbly flows through a converging-diverging nozzle*, Physics of Fluids, A 5, 1630-1643, 1993
- [13] Kubota, A., Kato, H. ve Yamaguchi, H., *A numerical study of unsteady cavitation on a hydraulic section*, Journal of Fluid Mechanics, 240, 59-96, 1992
- [14] Young, F. R., *Cavitation*, McGraw-Hill, London-1989
- [15] Drazin, P. G. ve Reid, W. H., *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press-1981
- [16] Hammitt, F. G., *Cavitation and Multiphase Flow Phenomena*, McGraw-Hill, New York-1980
- [17] Ward-Smith, A. J., *Internal Fluid Flow*, Clarendon Press-1980
- [18] Plesset, M. S. ve Prosperetti, A., *Bubble Dynamics and Cavitation*, Annual Review of Fluid Mechanics, 9, 145-185, 1977
- [19] van Wijngaarden, L., *One-Dimensional Flow of Liquids Containing Small Gas Bubbles*, Annual Review of Fluid Mechanics, 4, 369-396, 1972
- [20] van Wijngaarden, L., *On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles*, J. of Fluid Mechanics, 33, 465-474, 1968

- [21] Lin, C. C., *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press-1966
- [22] Kogarko, B. S. *On A model of a cavitating liquid*, Soviet Physics-Doklady, 6(4), 305-306, 1961
- [23] Tangren, R. F., Dodge, C. H. ve Seifert, H. S., *Compressibility effects in two-phase flow*, J. of Applied Physics, 20, 637-645, 1949