Değişken Viskoziteli Akışkanla Dolu Öngerilmeli Elastik Tüplerde Dalga Yayılımı

Hilmi Demiray
Işık Üniversitesi, Matematik Bölümü
Şile-İstanbul (demiray@isikun.edu.tr)

Özet: Bu çalışmada, aortu ön gerilmeli ince elastik tüp, kanı da değişken viskoziteli ve sıkıştırılamayan bir Newtoniyen akışkan kabul ederek, böyle bir ortamda uzun dalga yaklaşımı ve indirgeyici pertürbasyon yöntemini kullanarak zayıf nonlineer dalgaların yayılımı problemi incelenmiştir. Pertürbasyon açılımının en düşük mertebeli terimini yöneten evolüsyon denkleminin Korteweg-deVries- Burgers (KdV-B) denklemi olduğu gösterilmiş ve bu evolüsyon denklemine ilerleyen dalga çözümü aranmış ve çözümün soliter bir dalga ve Burger şokunun kombinezonundan ibaret olduğu gösterilmiştir.

Abstract: Treating the artery as an initially stressed thin elastic tube and the blood as an incompressible Newtonian fluid of variable viscosity, we studied the propagation of weakly nonlinear waves in such a copmposite medium by use of the reductive perturbation method in the long wave approximation. The governing equation for the lowest order term in the perturbation expansion is shown to be Korteweg-de Vries-Burgers (KdV-B) equation and the progressive wave type of solution to this evolution equation is obtained.

1. Giriş

Biyomekanikte geniş uygulama alanı bulması nedeniyle içi akışkan ile dolu elastik veya viskoelastik tüplerde dalga yayılımı problemi Thomas Young (1773-1829) zamanından beri üzerinde çalışılan bir konudur. Bu konuda yapılmış çalışmaları üç ana başlık altında toplamak mümkündür. Bunlar:

(i) Lineerleştirilmiş alan denklemlerini kullanarak dispersiyon bağıntısını elde etmek ve bazı akım parametrelerine dalga frekansının etkilerini incelemektir.

(ii) Nonlinear alan denklerinin kullanarak bu tip yapılarda şok oluşumunu incelemektir. Bu konuda yapılan çalışmalar oldukça sınırlı kalmıştır.

(iii) Alan denklemlerindeki nonlineeritenin sonlu fakat küçük olduğu hali inceleyen çalışmalardır. Bu yaklaşımda nonlineerite ile dispersiyonun birbirini dengelemesine yönelik çalışmalar yapılmaktadır. Burada esas denklemlerden hareketle yeni evolüsyon denklemleri türetilerek bunların çözümü aranmaktadır. Bu konuda literatürde yer alan çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bunlar arasında Johnson [1], Hashizume [2], Yomosa [3], Demiray [4] ve Antar ve Demiray [5]. Bütün bu ve benzeri çalışmalarda kan ideal akışkan olarak ele alınmış viskoz etkiler pek hesaba katılamamıştır. Bunun esas sebebi nonlineer problemlerin çözümünde tüpe teğet yöndeki sınır koşullarını sağlamadaki zorluktur. Bu zorluğa kısmen olsun çözüm getirebilmek amacıyla sınır tabakası yaklaşımına gidilmiştir. (Johson [1], Antar ve Demiray [5]).

Aslında kan, sıkıştırılamayan ve Newtoniyen olmayan bir akışkandır. Kanda bu özelliği sağlayan parametreler alyuvarlar ve onların deforme olabilme özelliğidir. Dairesel kesitli bir boru içerisinde kan akımı incelendiğinde eksenel yöndeki hız dağılımının boru cidarında sıfır merkezde ise en büyük değer aldığı ve parabolik bir dağılım sergilediği görülür (Poiseuille akımı). Bernoulli denkleminden görülebileceği gibi böyle bir hızı dağılımı, radyal doğrultuda ve merkeze doğru bir basınç gradyantı oluşturur. Sonuçta bu basınç gradyantı etkisiyle alyuvarlar merkeze doğru gider ve tüp civarında alyuvar konstantrasyonu (hematokrit oranı) düşer;bu ise damar yüzeyine yak ın yerlerde viskozitenin daha küçük merkez bölgelerde ise daha büyük olmasını sağlar. Ayrıca deneysel çalışmalar (Fung [6]), kayma hızının (shear rate) artmasıyla viskozitenin küçüldüğünü göstermektedir. İşte bu iki etki göz önüne alındığında, boru içerisindeki akım halinde kan, viskozitesi radyal doğrultuda değişen Newtoniyen bir akışkan olarak işleme sokulabileceği söylenebilir.

İşte bu çalışmada, aortu ön gerilmeli ince elastik bir tüp, kanı da değişken viskoziteli ve sıkıştırılamayan bir Newtoniyen akışkan kabul ederek, böyle bir ortamda uzun dalga yaklaşımı ve indirgeyici pertürbasyon yöntemini kullanarak zayıf nonlineer dalgaların yayılımı problemi incelenmiştir. Pertürbasyon açılımının en düşük mertebeli terimini yöneten evolüsyon denkleminin Korteweg-deVries- Burgers (KdV-B) denklemi olduğu gösterilmiş ve bu evolüsyon denklemine ilerleyen dalga çözümü aranmış ve çözümün soliter bir dalga ve Burger şokunun kombinezonundan ibaret olduğu gösterilmiştir.

2. Temel Denklemler

2.1. Tüp denklemleri

Bu kısımda içi değişken viskoziteli akışkan ile dolu ön gerilmeli bir tüpün hareket denklemleri verilecektir. Bu amaçla, başlangıç yarıçapı R_0 olan sonsuz uzunluklu bir tüpün P_0 iç basıncı ve N_0 eksenel yüküne maruz kaldığını düşünelim. Böyle bir statik şekil değiştirmeden sonraki yarıçapı r_0;eksenel yöndeki germeyi ise λ_z ile gösterelim. Kan akımı sırasında böyle bir statik yer değiştirme üzerine radyal doğrultuda $u^*(z^*,t^*)$ eksenel yer değiştirmesinin eklendiğini düşünelim. Damarın dış yataklama koşulları nedeniyle eksenel yöndeki yer değiştirmesinin etkisi ihmal edilecektir. Buna göre tüp üzerindeki bir noktanın yer değiştirme vektörü

$$r=(r_0+u^*)e_r+z^* e_z,\quad z^*=\lambda_z Z^*, \tag{1}$$

şeklinde verilebilir. Burada e_r, e_θ, e_z silindirik koordinatlarda baz vektörünü, Z^* şekil değiştirmeden önceki, z^* şekil değiştirmeden sonraki eksenel koordinatı ve t^*da zaman parametresini göstermektedir.

Teğetsel ve yanal yöndeki germeler

$$\lambda_1=\lambda_z\left[1+\left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2},\quad \lambda_2=\lambda_\theta+u^*/R_0 \tag{2}$$

şeklinde verilir. Burada $\lambda_\theta=r_0/R_0$ statik şekil değiştirmeden sonraki yanal yöndeki germeyi karakterize etmektedir.

Tüp üzerinde seçilecek bir elemanın hareket denklemi aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$-\frac{\mu}{\lambda_z R_0}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_2}+\mu\frac{\partial}{\partial z^*}\left\{\frac{\partial u^*/\partial z^*}{\left[1+\left(\partial u^*/\partial z^*\right)^2\right]^{1/2}}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_1}\right\}$$

$$+\frac{P_r^*}{HR_0}\left(r_0+u^*\right)\left[1+\left(\partial u^*/\partial z^*\right)^2\right]^{1/2}=\frac{\rho_0}{\lambda_z}\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}}. \tag{3}$$

Burada Σ tüp malzemesinin şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunu, μ malzemesinin kayma modülünü, H tüpünün başlangıç kalınlığını ve P_r^* da akışkan tarafından tüpe uygulanan reaksiyon kuvvetini göstermektedir.

2.2. Akışkan denklemleri

Giriş kısmında ifade edildiği gibi kan sıkıştırılamayan Non-Newtoniyen bir akışkandır. Bununla birlikte, daha önce açıklanan sebeplerden dolayı kan değişken viskoziteli bir akışkan olarak işleme sokulacaktır. Ancak, nonlinear denklemler halinde çeperdeki kaymasız sınır koşullarını sağlatmadaki güçlükler nedeniyle damar çeperinde viskozitenin sıfır, merkezde ise en büyük değeri aldığı kabul edilecektir.

Akışkan hareketinin eksenel simetrik olduğu varsayılırsa böyle bir akışkana ait hareket denklemleri aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial t^*}+V_r^*\frac{\partial V_r^*}{\partial r}+V_z^*\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}+\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial \bar{P}}{\partial r}$$

$$-\hat{\nu}\gamma(r)\left(\frac{\partial^2 V_r^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_r^*}{\partial r}-\frac{V_r^*}{r^2}+\frac{\partial^2 V_r^*}{\partial z^{*2}}\right)-2\hat{\nu}\gamma'(r)\frac{\partial V_r^*}{\partial r}=0,$$

$$\frac{\partial V_z^*}{\partial t^*}+V_r^*\frac{\partial V_z^*}{\partial r}+V_z^*\frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}+\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial \bar{P}}{\partial z^*}$$

$$-\hat{\nu}\gamma(r)\left(\frac{\partial^2 V_z^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_z^*}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_z^*}{\partial z^{*2}}\right)-\hat{\nu}\gamma'(r)\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}+\frac{\partial V_z^*}{\partial r}\right)=0,$$

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial r}+\frac{V_r^*}{r}+\frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}=0 \text{ (sıkışmazlık)} \tag{4}$$

ve sınır koşulları

$$V_r^*\Big|_{r=r_f}=\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+V_z^*\Big|_{r=r_f}\frac{\partial u^*}{\partial z^*},$$

$$P_r^*=\frac{\lambda_z}{\lambda_1}\left[\bar{P}-2\rho_f\hat{\nu}\gamma(r)\frac{\partial V_r^*}{\partial r}+\rho_f\hat{\nu}\gamma(r)\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}+\frac{\partial V_z^*}{\partial r}\right)\right]\Bigg|_{r=r_f}, \tag{5}$$

şeklinde verilir. Burada V_r^*, V_z^* akışkanın radyal ve eksenel doğrultudaki hız bileşenlerini, $\bar{P}$ akışkanın basınç fonksiyonunu, ρ_f akışkanın kütle yoğunluğunu, $\hat{\nu}$ kinematik viskoziteyi ni ve $\gamma(r)$ de değişken viskoziteyi göstermekte olup

$$\mu_\nu(r)=\rho_f\hat{\nu}\gamma(r), \qquad r_f=r_0+u^*, \tag{6}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Daha önce ifade edildiği gibi damar çeperinde viskozite sıfır ve merkez kısmında da en büyük değeri aldığı kabul edilmişti. Buna göre viskozite fonksiyonu aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\gamma(r)=1-\frac{r}{R_0+u^*}. \tag{7}$$

Denklemlerin çözümüne geçmeden önce onları boyutsuz hale getirmek uygun olacaktır. Bu amaçla aşağıdaki boyutsuz büyüklükler sunulmuştur.

$$t^*=\left(\frac{R_0}{c_0}\right)t, \quad r=R_0x, \quad z^*=R_0z, \quad u^*=R_0u, \quad V_r^*=c_0V_r$$

$$V_z^*=c_0V_z, \quad x_f=\lambda_\theta+u, \quad m=\frac{\rho_0H}{\rho_fR_0}, \quad c_0^2=\frac{\mu H}{\rho_fR_0},$$

$$P_r^*=\frac{\lambda_z}{\lambda_1}\rho_f c_0^2 p_r, \quad \bar{P}=\rho_f c_0^2\bar{p}, \quad \hat{\nu}=c_0R_0\bar{\nu} \tag{8}$$

Burada c_0 Moens-Korteweg dalga hızı olarak bilinir. (8) ifadesi (3)-(6) da yerine konacak olursa aşağıdaki boyutsuz alan denklemleri elde edilir:

$$p_r=\frac{m}{\lambda_z(\lambda_\theta+u)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{\lambda_z(\lambda_\theta+u)}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_2} \tag{9}$$

$$-\frac{1}{(\lambda_\theta+u)}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{\left[1+(\partial u/\partial z)^2\right]^{1/2}}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_1}\frac{\partial u}{\partial z}\right\},$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial x}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}+\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$$

$$-\bar{\nu}\gamma(x)\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial V_r}{\partial x}-\frac{V_r}{x^2}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}\right)-2\bar{\nu}\gamma'(x)\frac{\partial V_r}{\partial x}=0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$$

$$-\bar{\nu}\gamma(x)\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial V_z}{\partial x}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)-\bar{\nu}\gamma'(x)\left(\frac{\partial V_r}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)=0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial x}+\frac{V_r}{x}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0,\quad \gamma(x)=1-\frac{x}{\lambda_\theta+u}, \tag{12}$$

ve sınır koşulları

$$V_r\Big|_{x=\lambda_\theta+u}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}V_z\Big|_{x=\lambda_\theta+u},$$

$$p_r=\left[\bar{p}(x)-2\bar{\nu}\gamma(x)\frac{\partial V_r}{\partial x}+\bar{\nu}\gamma(x)\left(\frac{\partial V_r}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\right]\Big|_{x=\lambda_\theta+u}. \tag{13}$$

Genel olarak, şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu Σ, λ_1 ve λ_2 germelerinin fonksiyonudur. Burada yapacağımız çalışmalarda u cinsinden kuvadratik nonlineeriteye gereksinim duyulacağından p_r aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$p_r=\beta_1 u+\frac{m}{\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha_0\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\beta_2 u^2. \tag{14}$$

Burada α_0, β_1 ve β_2 katsayıları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$\alpha_0=\frac{1}{\lambda_\theta}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_1}\Big|_{u=0},$$

$$\beta_1=\frac{1}{\lambda_\theta\lambda_z}\left(\frac{\partial^2\Sigma}{\partial u^2}-\frac{1}{\lambda_\theta}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial u}\right)\Big|_{u=0},\ \beta_2=\frac{1}{2\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial^3\Sigma}{\partial u^3}\Big|_{u=0}-\frac{\beta_1}{\lambda_\theta}. \tag{15}$$

3. Uzun Dalga Yaklaşımı

Bu kısımda, ön gerilmeli ve içerisinde değişken vizkoziteli akışkan bulunan elastik bir tüp içerisinde küçük fakat sonlu nonlineer dalgaların yayılım problemi incelenecektir. Bunun için uzun dalga yaklaşımı varsayımı altında indirgenmiş perturbasyon yöntemi kullanılacak (Jeffrey ve Kawahara [7]) ve aşağıdaki gerilmiş koordinatlar kullanılacaktır.

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(z - gt), \qquad \tau = \varepsilon^{3/2} gt. \tag{16}$$

Burada ε bir küçüklük parametresi ve g ise uzun dalga yaklaşımı halinde faz hızıdır. Alan büyüklüklerinin aşağıdaki gibi bir pertürbasyon serisine açıldığı

$$V_r = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{1/2+n} V_r^{(n)}(\xi,\tau,x), \qquad V_z = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n} V_z^{(n)}(\xi,\tau,x), \qquad u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n} u_n(\xi,\tau)$$

$$p_r = p_r^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n} p_r^{(n)}(\xi,\tau), \qquad \overline{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n} \overline{p}_n(\xi,\tau,x), \tag{17}$$

ve viskozitenin de $\varepsilon^{1/2}$ mertebesinde olduğu ($(\overline{\nu} = \varepsilon^{1/2}\nu)$ düşünülürse aşağıdaki denklem takımı elde edilir.

$O(\varepsilon)$ denklemler

$$\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x} = 0, \quad -g\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \overline{p}_1}{\partial \xi} - \nu\left(1 - \frac{x}{\lambda_0}\right)\left(\frac{\partial^2 V_z^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial x}\right) + \frac{\nu}{\lambda_0}\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial x} + \frac{V_r^{(1)}}{x} + \frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \qquad p_r^{(1)} = \beta_1 u_1, \tag{18}$$

ve sınır koşulları

$$\overline{p}_1\Big|_{x=\lambda_0} = \beta_1 u_1, \quad V_r^{(1)}\Big|_{r=\lambda_0} = -g\frac{\partial u_1}{\partial \xi}. \tag{19}$$

$O(\varepsilon^2)$ denklemler

$$-g\frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \overline{p}_2}{\partial x} - \nu\left(1 - \frac{x}{\lambda_0}\right)\left(\frac{\partial^2 V_r^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial x} - \frac{V_r^{(1)}}{x^2}\right) + 2\frac{\nu}{\lambda_0}\frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial x} = 0,$$

$$-g\frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial \xi} + g\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial \tau} + V_r^{(1)}\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial x} + V_z^{(1)}\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial \xi}$$

$$+\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial \xi} - \nu\left(1 - \frac{x}{\lambda_0}\right)\left(\frac{\partial^2 V_z^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_z^{(1)}}{\partial \xi^2}\right) - \frac{\nu u_1}{\lambda_0^2}x\left(\frac{\partial^2 V_z^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\nu}{\lambda_0}\left(\frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial x}\right) - \frac{\nu u_1}{\lambda_0^2}\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial V_r^{(2)}}{\partial x} + \frac{V_r^{(2)}}{x} + \frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial \xi} = 0,$$

$$p_r^{(2)} = \beta_1 u_2 + \left(\frac{mg^2}{\lambda_\infty \lambda z} - \alpha_0\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \beta_2 u_1^2. \tag{20}$$

ve sınır koşulları

$$[\bar{p}_2 + u_1 \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} - 2\nu(1 - \frac{x}{\lambda_0}) \frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial x} \Big]\Big|_{x=\lambda_0} (\frac{mg^2}{\lambda_\infty \lambda z} - \alpha_0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \beta_1 u_2 + \beta_1 u_1^2,$$

$$V_r^{(2)}\Big|_{x=\lambda_0} + u_1 \frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial x}\Big|_{x=\lambda_0} = -g \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + g \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + V_z^{(1)}\Big|_{x=\lambda_0} \frac{\partial u_1}{\partial \xi}. \tag{21}$$

3.1 Alan Denklemlerinin Çözümü

(18) de verilen diferansiyel denklem takımının (19) sınır koşulları altındaki çözümü

$$u_1 = U(\xi,\tau), \qquad \bar{p}_1 = \beta_1 U(\xi,\tau), \qquad V_z^{(1)} = \frac{\beta_1}{g} U(\xi,\tau)$$

$$V_r^{(1)} = -\frac{\beta_1}{2g} \frac{\partial U}{\partial \xi} x, \qquad \beta_1 = 2g^2/\lambda_0, \tag{22}$$

şeklinde verilebilir. Burada U(ξ,τ) bilinmeyen bir fonksiyon olup yönetici denklem daha sonra elde edilecektir. (20) de verilen denklem takımının (21) sınır koşulları altındaki çözümünden de

$$\bar{p}_2 = -\frac{\beta_1}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} x^2 + \frac{\nu \beta_1}{\lambda_0 g} \frac{\partial U}{\partial \xi} x + p_2(\xi,\tau),$$

$$V_z^{(2)} = -\frac{\beta_1}{4g} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} x^2 + w_2(\xi,\tau),$$

$$V_r^{(2)} = \frac{\beta_1}{16g} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} x^3 - \frac{1}{2} \frac{\partial w_2}{\partial \xi} x, \tag{23}$$

bulunur. Burada $p_2(\xi,\tau)$ ve $w_2(\xi,\tau)$ bilinmeyen iki yeni fonksiyon olup yönetici denklemler yüksek mertebeden açılımlardan elde edilecektir. (23) çözümü (21) de kullanılırsa $U(\xi,\tau)$ için aşağıdaki evolüsyon denklemi elde edilir.

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} - \mu_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \mu_3 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0, \tag{24}$$

Burada μ, μ_2 ve μ_3 katsayıları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

$$\mu_1 = (\frac{5}{2\lambda_0} + \frac{\beta_2}{\beta_1}), \qquad \mu_2 = \frac{\nu}{2g}, \qquad \mu_3 = (\frac{\lambda_0^2}{16} + \frac{m}{4\lambda_z} - \frac{\alpha_0}{2\beta_1}). \tag{25}$$

(24) ile verilen evolüsyon denklemi Korteweg-deVries- Burgers (KdV-B) denklemi olarak bilinir ve nonlineerite, dispersiyon ve dissipasyonun kombine etkilerini karakterize eder. (25) denkleminden görülebileceği gibi viskozite katsayısı ν'nün sıfır olması halinde evolüsyon denklemi bilinen Korteweg-deVries denklemine dönüşür.

3.2. İlerleyen dalga çözümü

Bu alt kısımda (24) ile verilen KdV-B denklemi için

$$U = V(\zeta), \qquad \zeta = \beta(\xi - c\tau) \tag{26}$$

şeklinde bir çözüm aranacaktır. Burada α, β bilinmeyen iki sabit olup evolüsyon denkleminin çözümünden elde edilecektir. (26) ifadesi (24) de yerine konursa

$$-cV' + \mu_1 VV' - \mu_2 \beta V'' + \mu_3 \beta^2 V''' = 0 \tag{27}$$

elde edilir. Burada $(\ )'$ ilgili büyüklüğün ζ 'ya göre türevini ifade etmektedir. (27) ifadesi ζ 'ya göre integre edilirse

$$-cV + \frac{\mu_1}{2} V^2 - \mu_2 \beta V' + \mu_3 \beta^2 V'' = \mathrm{A}. \tag{28}$$

Burada A bir bilinmeyen olup çözüm sonucunda bulunacaktır.

Bu çalışmada (28) denklemine, a_0, a_1 ve a_2 birer sabit olmak üzere

$$V = a_0 + a_1 \tanh\zeta - a_2 \tanh^2\zeta \tag{29}$$

şeklinde bir çözüm aranacaktır. (29) ifadesi (28) denkleminde yerine konursa a_0, a_1 ve a_2 katsayılarının aşağıdaki biçimde olması gerektiği görülebilir

$$a_0 = \frac{c}{\mu_1} + \frac{3\mu_2^2}{25\mu_1\mu_3}, \qquad a_1 = -\frac{12\mu_2}{5\mu_1}\beta$$

$$a_2 = \frac{12\mu_3}{\mu_1}\beta^2, \qquad \beta = \mp\frac{\mu_2}{10\mu_3}$$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2\mu_1}\left[-c^2 + \left(\frac{6\mu_2^2}{25\mu_3}\right)^2\right] \tag{30}$$

Böylece, nihai çözüm aşağıdaki şekilde verilebilir

$$V = \frac{c}{\mu_1} + \frac{3\mu_2^2}{25\mu_1\mu_3}(\sec h^2\zeta - 2\tanh\zeta),$$

$$\zeta = \frac{\mu_2}{10\mu_3}(\xi - c\tau). \tag{31}$$

Bu ifadelerden görüleceği gibi dalga hızı genliğe bağlıdır. Bu nedenle, genliği büyük olan dalgaların daha hızlı yayılacağı aşikardır.

4. Sonuç ve tartışma

Literatürde kanın mekanik davranışı konusunda ortaya atılan modellerin yetersizliği düşünülerek, çalışmada damar çeperinde sıfır ve merkezde en büyük değeri alan değişken viskoziteli bir Newton akışkan modeli sunulmuştur. Uzun dalga yaklaşımı kabulü altında alan büyüklükleri bir pertürbasyon servisine açılarak çeşitli mertebeden diferansiyel denklemi takımı ve ilgili sınır koşulları elde edilmiştir. Bu diferansiyel denklemlerin belirtilen sınır koşulları altında çözümünden evolüsyon denklemi olarak Korteweg-de Veries-Burgers denklemi elde edilmiş ve bu denkleme ilerleyen dalga çözümü verilmiştir.

Kaynaklar

[1] Johnson, R. S., "A nonlinear equation incorporating damping and dispersion", *J.Fluid Mechanics*, **42**, 49-60, 1970.

[2] Hashizume, J. "Nonlinear pressure waves in a fluid-filled elastic tube", *J. Physical Society of Japan*, **54**, 3305-3312, 1985.

[3] Yomosa, Y., "Solitary waves in large blood vessels", *J. Physical Society of Japan*, **56**, 506-520, 1987.

[4] Demiray, H., "Solitary waves in fluid-filled elastic tubes", *Bulletin of Mathematical Biology*, **58**, 939-955, 1996.

[5] Antar, N. and Demiray, H., "The boundary layer approximation and nonlinear waves in elastic tubes", *Int. J. Engr. Sci.*, **38**, 1441-1457, 2000.

[6] Fung, Y. C., "Biodynamics: Circulation", Springer Verlag, NewYork, 1984.

[7] Jeffrey, A. and Kawahara, T., "Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory", Pitman, Boston, 1981.