

RİJİT DAİRESEL BİR PANÇLA BASTIRILMIŞ, ELASTİK YARIM DÜZLEME TAM YAPIŞIK TABAKANIN SÜRTÜNMELİ DEĞME PROBLEMİ

İsa ÇÖMEZ

Ragıp ERDÖL

KTÜ Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, 61080, TRABZON

ÖZET

Bu çalışmada elastik yarım düzleme tam yapışık tabakanın sürtünmeli değme problemi Elastisite Teorisine göre çözülmüştür. Tabaka dairesel panç aracılığıyla tekil yükle bastırılırken, pança aynı zamanda yatay bir kuvvet etki ettirilmiştir. Panç ile tabaka arasındaki sürtünme etkisi dikkate alınmıştır. Problem integral dönüşüm tekniği ve sınır şartlarının kullanılmasıyla değme uzunluğunun ve değme gerilmesinin bilinmeyen olduğu ikinci tür bir tekil integral denkleme indirgenmiştir. Tekil integral denklemin sayısal çözümü, denge ve uygunluk şartları da dikkate alınarak, Jacobi Polinomları formülasyonu ve Gauss-Jacobi İntegrasyon formülasyonu ile ayrı ayrı gerçekleştirilmiş, sürtünmeli ve sürtünmesiz durumda değme uzunlukları, değme gerilmesi, normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri bulunmuştur.

ABSTRACT

In this study, frictional contact problem for a layer bonded to a homogeneous substrate is considered according to the theory of elasticity. The layer is indented by a rigid cylindrical stamp subjected to concentrated normal and tangential forces. The friction between the layer and the stamp is taken into account. The problem is reduced to a singular integral equation of the second kind in which the contact pressure function and the contact area are the unknown by using integral transform technique and the boundary condition of the problem. The singular integral equation is solved numerically both the Jacobi Polynomials and Gauss-Jacobi Integration formula, considering equilibrium and consistency conditions. Numerical results for the contact pressures, the contact areas, the normal stresses and the shear stresses are given, in the case of friction and frictionless.

1.GİRİŞ

Çoğu yapıların ve mekanik sistemlerin elemanları birbirleri ile değme halindedir. Bu değmenin karakteri, değme elemanlarında meydana gelen deformasyonlar, değme uzunlukları, değme gerilmesi dağılımı yapının davranışında önemli rol oynamaktadır.

Sürtünmesiz değme problemine ait günümüze kadar bir çok çalışma yapılmıştır. Elastik yarım düzleme oturan tabakanın sürtünmesiz değme problemi [1]'de verilmiştir. [2]'de aynı problem tabakanın fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden olması halinde çözülmüştür. Bu iki çalışmada tabaka yayılı yüklerle yüklenmiştir. [3]'de değişik geometrilerdeki rijit pançla yüklenmiş, elastik yarım düzleme tam yapışık, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın değme problemi ele alınmıştır. Elastik yarım düzlem üzerine oturan yayılı yüklerle bastırılmış iki elastik tabakanın, sürtünmesiz, sürekli ve süreksiz değme problemi [4]'de incelenmiştir. [5]'de alttan tam bağlı tabakaya oturan ve rijit eğrisel bir pançla bastırılmış diğer bir tabakanın değme problemi ele alınmıştır.

Değme problemi, temas eden yüzeylerdeki sürtünme kuvvetlerinin ihmal edildiği sürtünmesiz değme problemi olarak ele alınıp problemin çözümü kolaylaştırılır. Pratikte yüzeyler asla sürtünmesiz değildir ve sürtünmesiz sınırlaması kaldırılmalıdır.

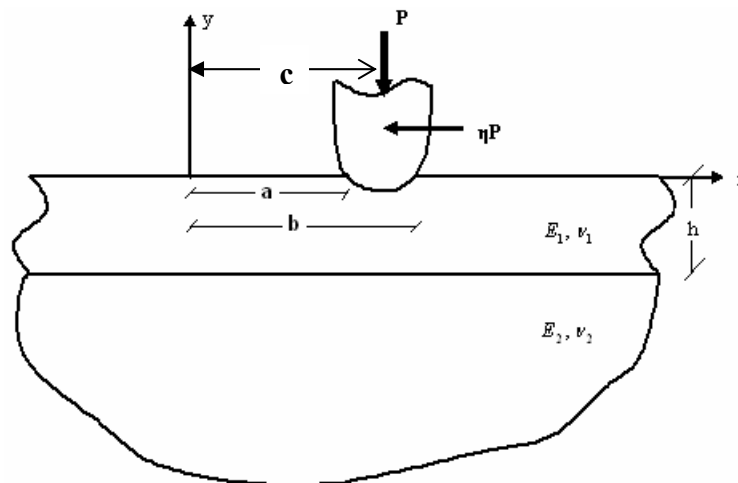
[6]'da dairesel pançla elastik yarım düzlemin sürtünmeli değme problemi, [7]'de değişik profillerdeki rijit pançla fonksiyonel derecelendirilmiş elastik yarım düzlemin sürtünmeli değme ve çatlak problemi incelenmiştir. [8]'de rijit zemine tam bağlı dairesel pançla bastırılan tabakanın sürtünmeli değme problemi incelenmiştir. [9]'da aynı problem tabakanın rijit zemine serbestçe oturduğu durum için de çözülmüştür.

[10]'da elastik yarım düzleme oturan ve yayılı yüklerle bastırılan tabakanın sürtünmeli değme problemi incelenmiştir. [11]'de elastik yarım düzleme tam yapışık ve dairesel pançla bastırılan tabakanın sürtünmeli değme problemi incelenmiştir. [12] ve [13]'de yine yarım düzleme tam yapışık; daire, parabol, üçgen, dikdörtgen profillerindeki rijit pançla yüklü, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmeli değme problemi ele alınmıştır.

Bu çalışmada, dairesel rijit bir pançla bastırılmış, elastik yarım düzleme tam yapışık tabakanın sürtünmeli değme problemi Elastisite Teorisi ve integral dönüşüm tekniği kullanılarak çözülmüştür. Panç ile elastik tabaka arasında sürtünme göz önüne alınmıştır. Panç P tekil yüküyle bastırılırken, yatayda da $Q = \eta P$ lik yatay kuvvet etki ettirilmektedir.

Tabakanın kütle kuvveti dikkate alınmamıştır.

2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU



Şekil1. Problemin geometrisi

Problemde pañç ile tabaka $x = a$ ve $x = b$ aralığında temas halindedir. Pañç merkezinin y eksenine uzaklığı “ c ” olarak alınmıştır. Tabaka x eksenine boyunca $(-\infty, +\infty)$ aralığında uzanmaktadır ve elastik yarım düzleme tam yapışmıştır. Bünye denklemleri ve yer değiştirme, şekil değiştirme bağıntıları yardımıyla gerilmeleri yer değiştirmeler cinsinden yazmak mümkündür.

Kütle kuvvetlerinin olmadığı durumda iki boyutlu Navier denklemleri

$$(\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right] + \mu_i \nabla^2 u_i = 0 \quad (1a)$$

$$(\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right] + \mu_i \nabla^2 v_i = 0 \quad (1b)$$

olarak bulunur. u_i ve v_i ($i = 1, 2$) sırasıyla x , y doğrultularındaki yer değiştirme bileşenlerini ifade etmektedir. λ Lamé sabitini, μ kayma modülünü göstermektedir.

$u_i(x, y)$ ve $v_i(x, y)$ yer değiştirme bileşenleri Fourier dönüşümü şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_i(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2a)$$

$$v_i(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2b)$$

Burada $\phi_i(\alpha, y)$ ve $\psi_i(\alpha, y)$ sırasıyla $u_i(x, y)$ ve $v_i(x, y)$ yer değiştirme bileşenlerinin ters Fourier dönüşüm fonksiyonlarıdır.

(2a,b) ifadelerinin gerekli türevleri alınıp (1a,b) denklemlerinde yerine yazılarak; Navier denklemleri, kısmi türevli diferansiyel denklem takımından adi diferansiyel denklem takımına dönüştürölür ve bu denklem takımının çözümü sonucunda yer değiştirme ifadeleri tabaka için

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(A_1 + B_1 y) e^{-\alpha y} + (C_1 + D_1 y) e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (3a)$$

$$v_1(x, y) = -\frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left[A_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} + y \right) B_1 \right] e^{-\alpha y} + \left[-C_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} - y \right) D_1 \right] e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (3b)$$

ve elastik yarım düzlem

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(C_2 + D_2 y) e^{|\alpha|y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (4a)$$

$$v_2(x, y) = -\frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|}{\alpha} \left[-C_2 + \left(\frac{\kappa_2}{|\alpha|} - y \right) D_2 \right] e^{|\alpha|y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (4b)$$

olarak bulunur. (3a,b) ve (4a,b) yer değiştirme ifadeleri bünye denklemlerinde yerlerine yazıldığında gerilme bileşenleri tabaka için

$$\frac{\sigma_{x1}(x, y)}{2\mu_1} = -\frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \left[A_1 e^{-\alpha y} + \left(\frac{\kappa_1 - 3}{2\alpha} + y \right) B_1 e^{-\alpha y} + C_1 e^{\alpha y} + \left(y - \frac{\kappa_1 - 1}{2\alpha} \right) D_1 e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (5a)$$

$$\frac{\sigma_{y1}(x, y)}{2\mu_1} = \frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \left[A_1 e^{-\alpha y} + \left(\frac{\kappa_1 + 1}{2\alpha} + y \right) B_1 e^{-\alpha y} + C_1 e^{\alpha y} + \left(y - \frac{\kappa_1 + 1}{2\alpha} \right) D_1 e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (5b)$$

$$\frac{\tau_{xy1}(x, y)}{2\mu_1} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \left[A_1 e^{-\alpha y} + \left(\frac{\kappa_1 - 1}{2\alpha} + y \right) B_1 e^{-\alpha y} - C_1 e^{\alpha y} - \left(y - \frac{\kappa_1 - 1}{2\alpha} \right) D_1 e^{\alpha y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (5c)$$

olarak bulunur. Elastik yarım düzlem için gerilme ifadeleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\sigma_{x2}(x, y)}{2\mu_2} = -\frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \left[C_2 e^{|\alpha|y} + \left(y - \frac{\kappa_2 - 3}{2|\alpha|} \right) D_2 e^{|\alpha|y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (6a)$$

$$\frac{\sigma_{y2}(x, y)}{2\mu_2} = \frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \left[C_2 e^{|\alpha|y} + \left(y - \frac{\kappa_2 + 1}{2|\alpha|} \right) D_2 e^{|\alpha|y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (6b)$$

$$\frac{\tau_{xy2}(x, y)}{2\mu_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha| \left[C_2 e^{|\alpha|y} + \left(y - \frac{\kappa_2 - 1}{2|\alpha|} \right) D_2 e^{|\alpha|y} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (6c)$$

Gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerinde geçen A_i, B_i, C_i, D_i bilinmeyen katsayılar olup problemin sınır şartlarından bulunacaktır.

κ bir malzeme sabitidir: Düzlem şekil değiştirme halinde $\kappa=(3-4\nu)$, düzlem gerilme halinde ise $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ olarak alınmaktadır. ν Poisson oranıdır.

3. SINIR ŞARTLARI VE İNTEGRAL DENKLEMİN ELDE EDİLMESİ

Probleme ait sınır şartları $y = 0$ ve $y = -h$ 'de aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{y1}(x, 0) = \begin{cases} -p(x) & a < x < b \\ 0 & x \leq a, \quad x \geq b \end{cases} \quad (7a)$$

$$\tau_{xy1}(x, 0) = \begin{cases} -\eta p(x) & a < x < b \\ 0 & x \leq a, \quad x \geq b \end{cases} \quad (7b)$$

$$\sigma_{y1}(x, -h) = \sigma_{y2}(x, -h) \quad -\infty < x < \infty \quad (7c)$$

$$\tau_{xy1}(x, -h) = \tau_{xy2}(x, -h) \quad -\infty < x < \infty \quad (7d)$$

$$u_1(x, -h) = u_2(x, -h) \quad -\infty < x < \infty \quad (7e)$$

$$v_1(x, -h) = v_2(x, -h) \quad -\infty < x < \infty \quad (7f)$$

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} = F(x) \quad a < x < b \quad (8)$$

Denge şartı ise

$$\int_a^b \sigma_y(x,0) dx = -P \quad (9)$$

olmaktadır. Yukarıdaki şartlarda geçen $p(x)$, rijit panç ile tabaka arasındaki değme gerilmesini ifade eden başlangıçta belli olmayan bilinmeyendir. a ve b sırasıyla değmenin başladığı ve bittiği noktanın y eksenine uzaklığını belirtmektedir. P yükünün etki ettirildiği noktanın y eksenine uzaklığı c ile gösterilmiştir. $F(x)$ yükü ileten eğrisel rijit pançın şekil fonksiyonunun türevini ifade etmektedir. Dairesel panç için R pançın yarıçapı olmak üzere

$$F(x) = \frac{x-c}{R} \quad (10)$$

olarak yazılabilir. (7a-f) sınır şartlarının yardımıyla A_i, B_i, C_i, D_i katsayıları bilinmeyen değme gerilmesi fonksiyonu $p(x)$ 'e bağlı olarak bulunur. Bulunan bu katsayılar (8) nolu sınır şartında yazılıp gerekli ara işlemlerden sonra

$$Ap(x) + \frac{B}{\pi} \int_a^b \frac{p(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_a^b k(x,t)p(t) dt = H(x) \quad (11)$$

ikinci tür bir tekil integral denklem elde edilir. Burada

$$A = \eta \frac{(\kappa_1 - 1)}{\kappa_1 + 1}, \quad B = -1 \quad (12a,b)$$

$$H(x) = \frac{4\mu_1}{\kappa_1 + 1} F(x) \quad (13)$$

$$k(x,t) = K_1(x,t) + \eta K_2(x,t) \quad (14)$$

$$K_1(x,t) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{\Delta} \left[-2(1 + \kappa_1 m) \left(1 + \frac{\kappa_2}{m}\right) - 2(\kappa_2 - \kappa_1 m) \left(1 - \frac{1}{m}\right) e^{-4\alpha h} + 8\alpha h (m-1) \left(\frac{\kappa_2}{m} + 1\right) e^{-2\alpha h} \right] + 1 \right] \sin \alpha(t-x) d\alpha \quad (15a)$$

$$K_2(x,t) = \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\Delta} \left[2(1 + \kappa_1 m) \left(1 + \frac{\kappa_2}{m}\right) - 2(\kappa_2 - \kappa_1 m) \left(1 - \frac{1}{m}\right) e^{-4\alpha h} - 4 \left[\left(\kappa_1 m + \frac{\kappa_2}{m}\right) + 2\kappa_1 \frac{1 - \kappa_2}{\kappa_1 - 1} + 4\alpha^2 h^2 \left(\frac{m-1}{\kappa_1 - 1}\right) \left(\frac{\kappa_2}{m} + 1\right) \right] e^{-2\alpha h} \right] - 1 \right] \cos \alpha(t-x) d\alpha \quad (15b)$$

$$\Delta = 2(1 + \kappa_1 m) \left(1 + \frac{\kappa_2}{m}\right) - 2(\kappa_2 - \kappa_1 m) \left(1 - \frac{1}{m}\right) e^{-4\alpha h} + 2[-(\kappa_1 - 1)(\kappa_2 - 1) + m - 2\frac{\kappa_2}{m} + \kappa_1 m^2 + 4\alpha^2 h^2 (m-1) \left(\frac{\kappa_2}{m} + 1\right)] e^{-2\alpha h} \quad (15c)$$

$$m = \mu_2 / \mu_1 \quad (16)$$

4- İKİNCİ TÜR TEKİL İNTEGRAL DENKLEMİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

İntegral denklemin sayısal çözümü için $\alpha = z/h$ değişken dönüşümü yapılmış ve

$$Q(r) = \frac{p(r)}{P/h}, \quad t = \frac{b-a}{2}r + \frac{b+a}{2}, \quad x = \frac{b-a}{2}s + \frac{b+a}{2} \quad (17a,b,c)$$

boyutsuz büyüklükleri tanımlanmıştır. Böylelikle integral denklem ve denge şartı

$$AQ(s) + \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{Q(r)}{r-s} dr + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k^*(s,r)Q(r)dr = H(s) \quad (18)$$

$$\frac{b-a}{2h} \int_{-1}^1 Q(r)dr = 1 \quad (19)$$

olarak değişir. Burada

$$k^*(s,r) = \left(\frac{b-a}{2h}\right)k(s,r) \quad (20)$$

olarak tanımlıdır. Değme alanının uçlarında gerilme “0” olduğundan problemin indeksi $\kappa = -(\alpha + \beta) = -1$ ’dir. Burada α ve β

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \ln \left[\frac{A-iB}{A+iB} \right] + N_0 \quad (21a)$$

$$\beta = -\frac{1}{2\pi i} \ln \left[\frac{A-iB}{A+iB} \right] + M_0 \quad (21b)$$

ifadelerinden elde edilir. N_0 ve M_0 tam sabitler olup α ve β pozitif olacak şekilde seçilmelidir ($0 < \text{Re}[\alpha, \beta] < 1$).

“-1” indeks için çözüm denge şartının yanı sıra aşağıdaki uygunluk şartını da sağlamalıdır.

$$\int_{-1}^1 \left[H(s) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k^*(r,s)Q(r)dr \right] \frac{ds}{w(s)} = 0 \quad (22)$$

Burada $w(r)$ aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$w(r) = (1-r)^\alpha (1+r)^\beta \quad (23)$$

4.1. İntegral Denklemin Gauss-Jacobi İntegrasyon Formülasyonu (GJİ) İle Çözümü

İntegral denklemin Gauss- Jacobi İntegrasyon formülüyle sayısal çözümü [14] ve [15]’de verilen çözüm yöntemiyle gerçekleştirilecektir. İntegral denklemin çözümü

$$Q(r) = g(r)w(r) \quad (24)$$

olarak aranır ve $g(r)$ fonksiyonunun N noktadaki değerleri için aşağıdaki lineer denklem takımı elde edilir.

$$\sum_{i=1}^N W_i^N g(r_i) \left[\frac{B}{r_i - s_k} + k^*(r_i, s_k) \right] = H(s_k) \quad k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (25)$$

Denge şartı

$$\frac{b-a}{2h} \sum_{i=1}^N W_i^N g(r_i) = 1/\pi \quad (26)$$

haline gelir. Burada r_i ve s_k lar aşağıda tanımlandığı gibi Jacobi polinomlarının kökleridir

$$P_N^{(\alpha, \beta)}(r_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (27a)$$

$$P_{N+1}^{(-\alpha, -\beta)}(s_k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (27b)$$

İntegral denklem ve denge şartında geçen W_i^N 'ler ise Jacobi polinomlarının ağırlıklarıdır.

$$W_i^N = -\frac{1}{\pi} \frac{2N + \alpha + \beta}{(N+1)!} \frac{\Gamma(N + \alpha + 1)\Gamma(N + \beta + 1)}{\Gamma(N + \alpha + \beta + 1)} \frac{2^{(\alpha+\beta)}}{P_N^{(\alpha, \beta)}(r_i)P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(r_i)} \quad (28)$$

Bilinmeyenler N tane $g(r_i)$ değeri ve a/h , b/h değme uzunlukları olmak üzere $N+2$ tanedir. $N+1$ tane (25)'den ve 1 tane denge şartından (26) olmak üzere, elde edilen toplam $N+2$ denklemle, $N+2$ tane bilinmeyeni bulmak mümkündür. İntegral denklemdeki N tane bilinmeyen için $N+1$ tane denklem olduğu görülmektedir. İntegral denklemdeki herhangi bir denklem dışarı alınarak, denge şartıyla beraber sağlatılmaya çalışılacaktır. Bu sayede uygunluk şartı da sağlanmış olmaktadır.

4.2. İkinci Tür İntegral Denklemin Jacobi Polinomlarıyla (JP) Sayısal Çözümü

İntegral denklemin Jacobi Polinomlarıyla sayısal çözümü [15]'de verilen çözüm yöntemiyle gerçekleştirilecektir. Problemin çözümü

$$Q(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n^{(\alpha, \beta)}(r) \quad (29)$$

olarak aranabilir. Burada c_n bilinmeyen katsayılarıdır. “-1” indeks için integral denklem

$$\frac{2}{\sin(\pi\alpha)} \theta_k^{(-\alpha, -\beta)} c_{k-1} + \sum_{n=0}^{M-1} d_{kn} c_n = H_k \quad k = 0, 1, \dots, M \quad (30)$$

haline gelir. Burada $k = 0$ için yazılan ilk denklemde $c_{-1} = 0$ alınmıştır ve bu denklem

$$\sum_{n=0}^{M-1} d_{0n} c_n = H_0 \quad (31)$$

uygunluk şartına denk gelmektedir. İlk denklem çıkarıldığı takdirde

$$\frac{2}{\sin(\pi\alpha)} \theta_k^{(-\alpha, -\beta)} c_{k-1} + \sum_{n=0}^{M-1} d_{kn} c_n = H_k \quad k = 1, \dots, M \quad (32)$$

olur. Burada

$$\theta_k^{(-\alpha, -\beta)} = \frac{2^{-\alpha-\beta+1}}{2k - \alpha - \beta + 1} \frac{\Gamma(k - \alpha + 1)\Gamma(k - \beta + 1)}{k! \Gamma(k - \alpha - \beta + 1)} \quad (33)$$

$$d_{kn} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 P_k^{(-\alpha, -\beta)}(s) (1-s)^{-\alpha} (1+s)^{-\beta} \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(r) (1-r)^\alpha (1+r)^\beta k^*(r, s) dr ds \quad (34)$$

$$H_k = \int_{-1}^1 P_k^{(-\alpha, -\beta)}(s) (1-s)^{-\alpha} (1+s)^{-\beta} H(s) ds \quad (35)$$

olarak tanımlıdır. $M+2$ tane bilinmeyen, c_0, c_1, \dots, c_{M-1} ve değme uzunlukları a, b , için (32)'den M tane denklem elde edilmektedir. Denge şartı ve uygunluk şartı ile beraber $M+2$ tane olan denklemlerle yine $M+2$ tane olan bilinmeyenleri bulmak mümkündür. (32), denge şartı ve uygunluk şartı sağlatılacak şekilde çözülecektir. a/h ve b/h değerleri iterasyonlar sonucunda bulunur ve buradan da değme gerilmeleri elde edilir. Değme gerilmeleri bulununca normal gerilmeler ve kayma gerilmesi de bulunabilir.

5- SONUÇLAR VE İRDELEME

Tabakanın ve elastik yarım düzlemin malzeme özellikleri ($\mu_2 / \mu_1, \kappa_1, \kappa_2$), pañç yarıçapı (R/h), tekil yük değeri ($\mu_1 h/P$) ile ilgili olan boyutsuz büyüklüklerin ve pañç ile tabaka arasındaki sürtünme katsayısının η değişik değerleri için, değme uzunlukları, değme gerilmeleri, normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri $c = 0$ durumu için elde edilmiştir.

Tablo 1.'de toplam değme uzunluğunun yarısının $(|a| + b)/2h$ ve eksantrisitenin $(b - |a|)/2h$ integral denklemin sayısal çözüm yöntemi ve sürtünme katsayısına göre değişimini göstermektedir. Sürtünmesiz halde, değme uzunlukları için her iki çözüm yöntemiyle de aynı değerler elde edilmiştir ve aynı zamanda eksantrisite "0" olmaktadır. Sürtünme katsayısı arttıkça değme uzunluğu ve eksantrisite artmaktadır. GJİ ve JP ($M=3$) için bulunan sonuçlar birbirine oldukça yakındır. Fakat a/h ve b/h 'ın bulunmasında, JP ile yapılan bir iterasyon için harcanan süre GJİ dekine göre oldukça fazladır. Her iki yöntemle elde edilen sonuçlar çok yakın olduğundan geri kalan grafiklerde JP ile bulunan sonuçlar verilmiştir.

Tablo 2. de değme uzunluğunun panç yarıçapı ve sürtünme katsayısı ile değişimi verilmiştir. Panç yarıçapı arttıkça sürtünmeli ve sürtünmesiz durumda toplam değme uzunluğu artmaktadır. Sürtünmesiz durumda a/h , b/h 'a eşit çıkmaktadır. Sürtünme arttıkça a/h azalmakta, b/h ve toplam değme uzunluğu artmaktadır.

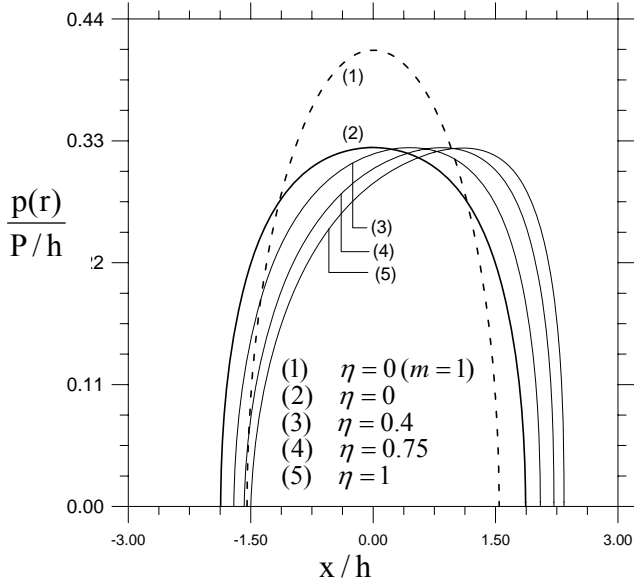
Tablo 1. Değme parametrelerinin integral denklemin sayısal çözüm yöntemine ve sürtünme katsayısına göre değişimi ($R/h = 500$, $\mu_1/(P/h) = 50$, $\mu_2/\mu_1 = 0.5$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)

Sürtünme katsayısı ve (α, β)	(GJİ)		Jacobi Polinomları (M=2)		Jacobi Polinomları (M=3)	
	Yarı değme uzunluğu	eksantrisine	Yarı değme uzunluğu	eksantrisine	Yarı değme uzunluğu	eksantrisine
$\eta = 0$ (tabakasız) ($\alpha = 0.5, \beta = 0.5$)	3.09020	0	3.09020	0	3.09020	0
$\eta = 0$ ($\alpha = 0.5, \beta = 0.5$)	2.74060	0	2.75304	0	2.74076	0
$\eta = 0.4$ ($\alpha = 0.45781, \beta = 0.54219$)	2.75159	0.23674	2.76423	0.23579	2.75176	0.23699
$\eta = 0.8$ ($\alpha = 0.41705, \beta = 0.58295$)	2.78367	0.47046	2.79673	0.46863	2.78378	0.47104
$\eta = 1$ ($\alpha = 0.39758, \beta = 0.60242$)	2.80682	0.58537	2.82018	0.58312	2.80689	0.58611

Tablo 2. Değme uzunluklarının panç yarıçapı ve sürtünme katsayısı ile değişimi.
($\mu_2/\mu_1 = 0.5$, $\mu_1/(P/h) = 100$, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2$)

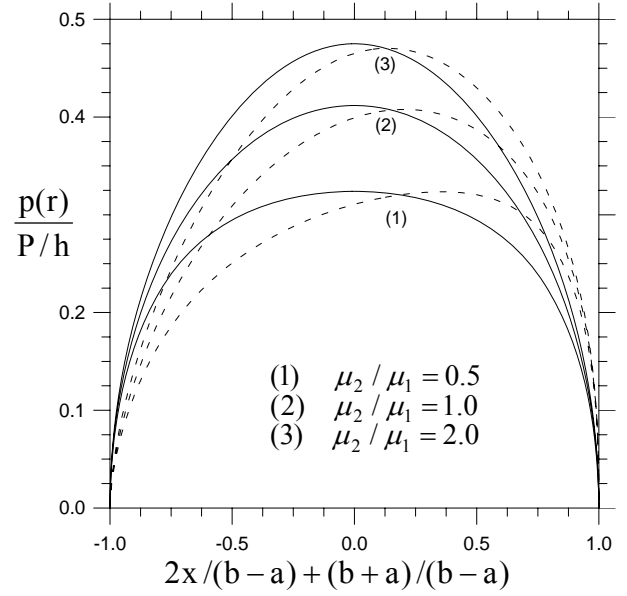
R/h	$\eta = 0$		$\eta = 0.5$		$\eta = 1$	
	a/h	b/h	a/h	b/h	a/h	b/h
10	-0.2209	0.2209	-0.19455	0.249735	-0.17105	0.280431
100	-0.7516	0.7516	-0.65685	0.85637	-0.57395	0.96839
250	-1.2643	1.2643	-1.11865	1.42822	-0.99416	1.60516
500	-1.86975	1.86975	-1.6700	2.09536	-1.4992	2.3399
1000	-2.7406	2.7406	-2.4622	3.0534	-2.22151	3.3921

Şekil 2.'de değme gerilmesinin sürtünme katsayısı ile değişimi görülmektedir. Sürtünmesiz halde değme gerilmesi y eksenine göre simetrik olup, en büyük değerini $y=0$ ' da alırken sürtünmeli durumda değme gerilmesinin simetrisi bozulmakta ve en büyük değeri sürtünme kuvvetinin ters yönüne kaymaktadır. Tabaka ve yarım düzlemin malzeme özellikleri aynı olduğunda ya da tabakasız halde değme gerilmesi tabakalı durumdan daha büyük çıkmaktadır. Kayma modülü oranı arttıkça değme gerilmesi de artmaktadır (Şekil 3).



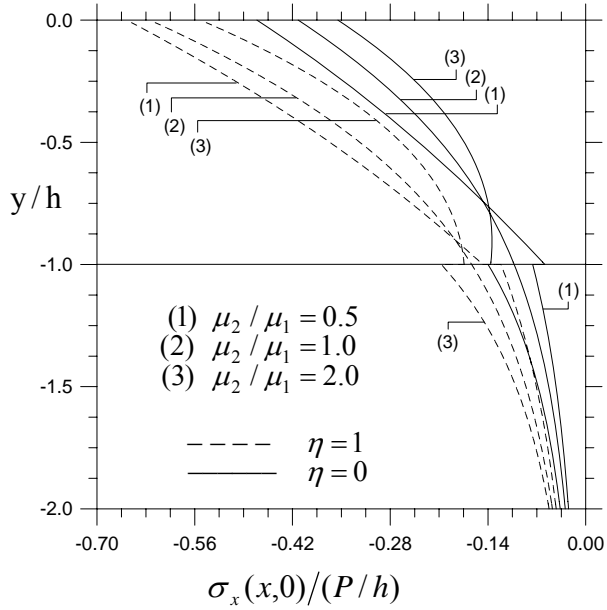
Şekil 2. Değme gerilmesinin sürtünme katsayısı ile değişimi.

$R/h = 500, \mu_2/\mu_1 = 0.5, \mu_1 h/P = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2$



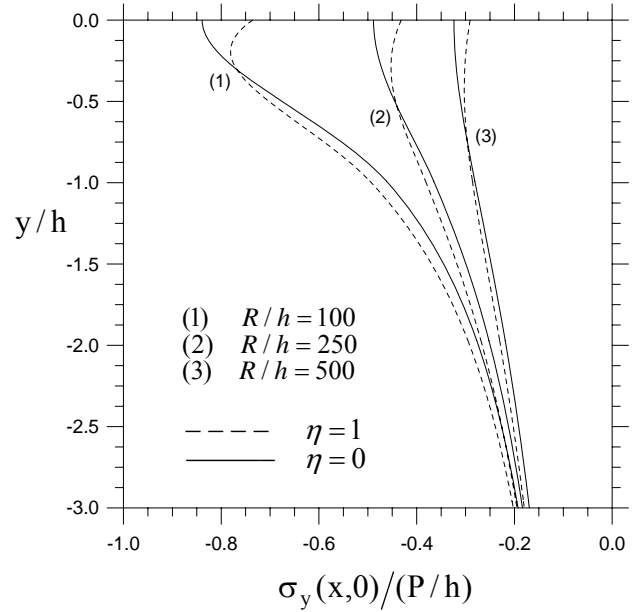
Şekil 3. Değme gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme katsayısı ile değişimi.

$(\mu_1 h/P = 100, R/h = 500, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2)$



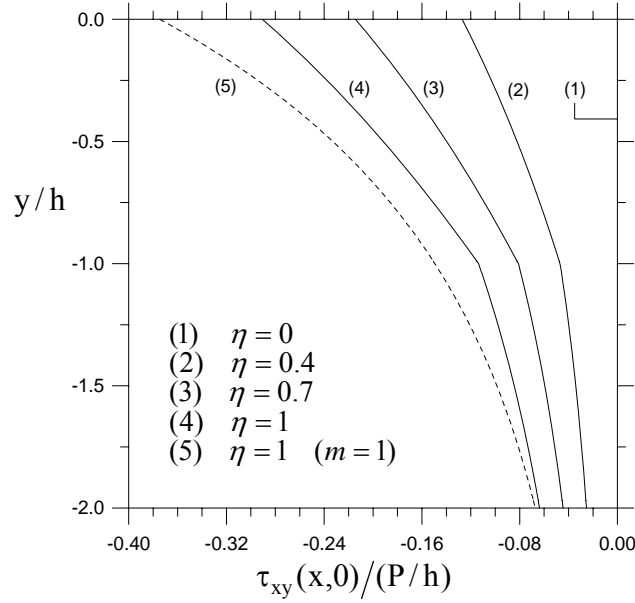
Şekil 4. $\sigma_x(x,0)/(P/h)$ normal gerilmesinin kayma modülleri oranı ve sürtünme katsayısı ile değişimi.

$(\mu_1 h/P = 100, R/h = 500, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2)$



Şekil 5. $\sigma_y(x,0)/(P/h)$ normal gerilmesinin panç yarıçapı ve sürtünme katsayısı ile değişimi.

$(\mu_2/\mu_1 = 0.5, \mu_1 h/P = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2)$



Şekil6. $\tau_{xy}(x,0)/(P/h)$ normal gerilmesinin sürtünme katsayısı ile değişimi.

$$(R/h = 500, \mu_2/\mu_1 = 0.5, \mu_1 h/P = 100, \kappa_1 = 2, \kappa_2 = 2)$$

Şekil(4-6)'da y eksenini boyunca σ_x, σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin dağılımı verilmiştir. Kayma modülleri oranı μ_2/μ_1 arttıkça tabakada, elastik yarım düzleme yakın noktalar hariç σ_x gerilmesi azalmakta, elastik yarım düzlemde ise gerilme artmaktadır. Sürtünmeli halde gerilme sürtünmesiz hale göre daha büyük değerler almaktadır. Aynı malzeme özelliklerine sahip olmaları halinde, tabaka ve yarım düzlemde, yapışık oldukları noktada, meydana gelen σ_x gerilmeleri birbirine eşit çıkarken, kayma modülleri aynı olmadığında gerilmeler farklı değerler almaktadır (Şekil 4).

σ_y gerilmesi sürtünmesiz halde en büyük değerini pançın altında almakta daha sonra azalarak etkisini kaybetmektedir. Sürtünmeli halde ise gerilmenin en büyük değerini aldığı nokta sürtünme katsayısı arttıkça değme yüzeyinden alt tarafa kaymaktadır. Panç yarıçapı arttıkça gerilme azalmaktadır. Tabaka ve yarım düzlemde basınç gerilmesi oluşmaktadır (Şekil 5). Sürtünme olmadığında y eksenini boyunca τ_{xy} kayma gerilmesi oluşmamakta, sürtünme katsayısı arttıkça kayma gerilmesinin değeri büyümektedir (Şekil 6).

KAYNAKLAR

- [1] Keer, L. M., Dundurs, J. ve Tsai, K. C., "Problems Involving a Receding Contact Between a Layer and a Half Space", Journal of Applied Mechanics, December, 1115-1120, 1972
- [2] El-Borgi, S., Abdelmoula, R. ve Keer, L., "A Receding Contact Plane Problem Between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate", International Journal of Solids and Structures, 43, (3-4), 658-674, 2006.
- [3] Ke, L.L. ve Wang, Y.S., "Two-dimensional Contact Mechanics of Functionally Graded Materials with Arbitrary Spatial Variations of Material Properties", International Journal of Solids and Structures, 43, (18-19): 5779-5798, 2006.

- [4] Çakıroğlu, F.,L., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., “Contact problems for two elastic layers resting on elastic half-plane”, *Journal of Engineering Mechanics*, 127, (2), 113-118, 2001.
- [5] Comez, I.,Birinci, A. ve Erdol, R., “Double Receding Contact Problem for a Rigid Stamp and two Elastic Layers”, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 23, 301-309, 2004.
- [6] Hasebe, N. ve Qian, J., “Fundamental solution of a circular rigid punch problem for a half plane”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23, (10), 841-846, 1999.
- [7] Dag, S., “Crack and Contact Problems in Graded Materials”, *Doktora Tezi*, Lehigh University, 2001.
- [8] Nowell, D. ve Hills, D.A., “Contact Problems Incorporating Elastic Layers”, *International Journal of Solids and Structures*, 24, (1), 105-115, 1988.
- [9] Jaffar, M.J., “Elastic Strips in Sliding Contact”, *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 26, (3), 193-199, 1991.
- [10] Boduroğlu, H. ve Delale F., “Elastik bir Tabakanın Sürtünmeli Değme Problemi”, *DOĞA: MAG/ ÇAG*, 17-26, 1980.
- [11] Ma, L.F ve Korsunsky, A.M, “Fundamental Formulation For Frictional Contact Problems Of Coated Systems”, *International Journal Of Solids And Structures*, 41 (11-12), 2837-2854, 2004.
- [12] Guler, M.A. ve Erdogan, F., “Contact mechanics of graded coatings”, *International Journal of Solids and Structures*, 41, (14), 3865-3889, 2004.
- [13] Guler, M.A. ve Erdogan, F., “The Frictional Sliding Contact Problems of Rigid Parabolic and Cylindrical Stamps on Graded Coatings” *International Journal Of Mechanical Sciences*, 49, (2), 161-182, 2007.
- [14] Krenk, S., On Quadrature Formulas For Singular Integral-Equations Of 1st and 2 nd Kind, *Quarterly Of Applied Mathematics*, 33, (3), 225-232, 1975.
- [15] Erdogan, F., Gupta, G.D. ve Cook, T.S., “Numerical Solution of Singular Integral Equations, in *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems*, Noordhoff, Groningen-1973.