

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KALIN PLAKLAR İÇİN ÜÇ BOYUTLU SONLU ELEMAN
MODELLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Fatih GÖREN
501041043**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 8 Mayıs 2006
Tezin Savunulduğu Tarih : 13 Haziran 2006**

**Tez Danışmanı : Doç.Dr. Tülay AKSU ÖZKUL
Diğer Jüri Üyeleri Doç.Dr. Alper İLKİ (İ.T.Ü)
Doç.Dr. İrfan ÇOŞKUN (Y.T.Ü.)**

HAZİRAN 2006

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında bilgi ve tecrübesini benimle paylaşan hocam Doç. Dr. Tülay AKSU ÖZKUL'a teşekkürlerimi borç bilirim. Yaptıkları maddi destekle bu çalışmanın hazırlanmasında önemli katkıları bulunan TÜBİTAK'a teşekkürlerimi arz ederim.

Haziran 2006

Fatih GÖREN

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	viii
SEMBOL LİSTESİ	x
ÖZET	xii
SUMMARY	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1 Konu	1
1.2 Yöntem	1
1.3 Literatür	2
2. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	6
2.1 Giriş	6
2.2 Yer değiştirme yöntemi	7
2.3 Yer değiştirme fonksiyonu	7
2.4 Şekil fonksiyonları	9
2.5 İzoparametrik eleman	9
2.6 Sonlu elemanlar yönteminin formülasyonu	11
2.6.1 Yer değiştirme fonksiyonu	11
2.6.2 Şekil değiştirme	11
2.6.3 Gerilme	11
2.6.4 Rijitlik matrisi ve eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri	12
2.7 Gauss nümerik integrasyonu	16
2.8 C^0 ve C^1 sürekliliği	17
2.9 Sonlu elemanlar yöntemiyle hesapta izlenecek yol	18

3. MİNDLİN PLAK TEORİSİ VE KALIN PLAKLARIN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN ÜÇ BOYUTLU SONLU ELEMAN KARAKTERİSTİĞİ	19
3.1 Mindlin plak teorisi	19
3.2 Üç boyutlu elastisite teorisi	20
3.2.1 Şekil değiştirme bağıntıları	20
3.2.2 Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları	21
3.2.3 Şekil değiştirme enerjisi	22
3.3 Kullanılan sonlu eleman modelleri	23
3.3.1 Şekil fonksiyonları ve yerel türevleri	23
3.3.1.1 Üç boyutlu sekiz noktalı elemanın şekil fonksiyonları ve yerel türevleri	23
3.3.1.2 Üç boyutlu yirmi noktalı elemanın şekil fonksiyonları ve yerel türevleri	25
3.3.2 Yer değiştirme fonksiyonları ve yakınsaklık kriterlerinin irdelenmesi	28
3.3.2.1 Üç boyutlu sekiz noktalı eleman	29
3.3.2.2 Üç boyutlu yirmi noktalı eleman	31
3.4 Şekil değiştirme-Yer değiştirme bağıntıları	31
3.5 Gerilme-Şekil değiştirme bağıntıları	32
3.6 Bağ matrisleri	33
3.7 Jakobien matrisi	35
3.8 Eleman rijitlik matrisleri	38
3.9 İntegral nokta adedinin belirlenmesi ve integrasyon adımının azaltılması	39
3.10 Yük matrisleri hesabında kullanılan iki boyutlu elemanların şekil fonksiyonları	39
3.10.1 İki boyutlu dört noktalı elemanın şekil fonksiyonları ve yerel türevleri	40
3.10.2 İki boyutlu sekiz noktalı elemanın şekil fonksiyonları ve yerel türevleri	41
3.11 Yük matrisleri	42
3.11.1 Üç boyutlu sekiz noktalı elemanın $\{F_q\}^e$ matrisi	43
3.11.2 Üç boyutlu yirmi noktalı elemanın $\{F_q\}^e$ matrisi	44
3.12 Elemanların toplam sistemde birleştirilmesi	44
4. BİLGİSAYAR PROGRAMI	46
4.1 Programın yapısı ve çalışma düzeni	46
4.2 Programın kullanılması	50
4.2.1 Giriş bilgileri	50
4.2.1.1 FATPLAK ana programında girilen veriler	50
4.2.1.2 PLAKKOR alt programında girilen veriler	51
4.2.1.3 PLAKEL alt programında girilen veriler	51
4.2.2 Çıkış bilgileri	52

5. SAYISAL UYGULAMALAR	53
5.1 Giriş	53
5.2 Düzgün yayılı yük etkisi altında dört kenarı ankastre mesnetli kare plak	53
5.3 Düzgün yayılı yük etkisi altında dört kenarı basit mesnetli kare plak	58
5.4 Tekil kuvvet etkisi altında dört kenarı basit ve ankastre mesnetli kare plak	63
5.5 Morley verev plağı	67
5.6 Düzgün yayılı yük etkisi altında ankastre mesnetli kiriş	69
5.7 Tekil yük etkisi altında ankastre mesnetli kiriş	70
6. SONUÇLAR	72
KAYNAKLAR	73
ÖZGEÇMİŞ	76

TABLO LİSTESİ

		<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1	Gauss nümerik integrasyon yöntemine ait n değerleri için koordinat ve ağırlık katsayıları	17
Tablo 3.1	Üç boyutlu sekiz noktalı elemanın şekil fonksiyonları yerel türevleri	24
Tablo 3.2	Üç boyutlu yirmi noktalı elemanın şekil fonksiyonları yerel türevleri	27
Tablo 3.3	İki boyutlu dört noktalı elemanın şekil fonksiyonlarının yerel türevleri	41
Tablo 3.4	İki boyutlu sekiz noktalı elemanın şekil fonksiyonları yerel türevleri	42
Tablo 5.1	Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri ($w \times 100D / (qa^4)$)	55
Tablo 5.2	Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plak için açıklık ortası moment değerleri ($M \times 100D / (qa^2)$)	55
Tablo 5.3	Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri ($w \times 100D / (qa^4)$)	60
Tablo 5.4	Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plak için açıklık ortası moment değerleri ($w \times 100D / (qa^4)$)	60
Tablo 5.5	Tekil kuvvet etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri - 1. DURUM($w \times Eh^3 / (Pa^2)$)	64
Tablo 5.6	Tekil kuvvet etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri - 1. DURUM($w \times Eh^3 / (Pa^2)$)	64
Tablo 5.7	Tekil kuvvet etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri - 2. DURUM($w \times Eh^3 / (Pa^2)$)	65
Tablo 5.8	Tekil kuvvet etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri - 2. DURUM($w \times Eh^3 / (Pa^2)$)	65
Tablo 5.9	Tekil kuvvet etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri - 3. DURUM($w \times Eh^3 / (Pa^2)$)	66
Tablo 5.10	Tekil kuvvet etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri - 3. DURUM($w \times Eh^3 / (Pa^2)$)	66
Tablo 5.11	Morlev verev plağı açıklık ortası çökme değerleri ($w \times 1000D / (qa^4)$)	68

Sayfa No

Tablo 5.12	Düzgün yayılı yük etkisi altında ankastre mesnetli kirişin maksimum çökme değerleri ($w(m)$)	69
Tablo 5.13	Düzgün yayılı yük etkisi altında ankastre mesnetli kirişin mesnet momenti değerleri ($M(kNm/m)$)	70
Tablo 5.14	Tekil yük etkisi altında ankastre mesnetli kirişin maksimum çökme değerleri ($w(m)$)	71
Tablo 5.15	Tekil yük etkisi altında ankastre mesnetli kirişin mesnet kesiti gerilme değerleri ($\sigma_x(kN/m^2)$)	71

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>SAYFA NO</u>
Şekil 3.1 :Gerilmeler ve pozitif yönleri	22
Şekil 3.2 :Üç boyutlu sekiz noktalı eleman ve bu elemanın yer değiştirme bileşenleri	24
Şekil 3.3 :Üç boyutlu yirmi noktalı eleman ve bu elemanın yer değiştirme bileşenleri	26
Şekil 3.4 :İki boyutlu dört ve sekiz noktalı elemanlar	40
Şekil 4.1 :FATPLAK ana programı akış diyagramı	47
Şekil 4.2 :PLAKKOR alt programı akış diyagramı	47
Şekil 4.3 :PLAKEL alt programı akış diyagramı	48
Şekil 4.4 :AKSURİ alt programı akış diyagramı	49
Şekil 4.5 :AKSUGER alt programı akış diyagramı	50
Şekil 5.1 :Sonlu eleman ağları	54
Şekil 5.2 :Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plakta $h/a= 0.01$ oranı için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağlarına bağlı değişimi	56
Şekil 5.3 :Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plakta $h/a= 0.10$ oranı için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağlarına bağlı değişimi	56
Şekil 5.4 :Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plakta $h/a= 0.20$ oranı için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağlarına bağlı değişimi	57
Şekil 5.5 :Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plakta $h/a= 0.05$ oranı için açıklık ortası moment değerlerinin sonlu eleman ağlarına bağlı değişimi	57
Şekil 5.6 :Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plakta $h/a= 0.10$ oranı için açıklık ortası moment değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi	58

Şekil 5.7	:Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plakta $h/a= 0.20$ oranı için açıklık ortası moment değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi	58
Şekil 5.8	:Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plakta $h/a= 0.05$ oranı için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi	61
Şekil 5.9	:Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plakta $h/a= 0.10$ oranı için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi	61
Şekil 5.10	:Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plakta $h/a= 0.20$ oranı için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi	61
Şekil 5.11	:Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plakta $h/a= 0.05$ oranı için açıklık ortası moment değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi	62
Şekil 5.12	:Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plakta $h/a= 0.10$ oranı için açıklık ortası moment değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi	62
Şekil 5.13	:Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plakta $h/a= 0.20$ oranı için açıklık ortası moment değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi	62
Şekil 5.14	:Tekil kuvvetin farklı yükleme durumları	63
Şekil 5.15	:Morley verev plağı	67
Şekil 5.16	:Morley verev plağı çözümünde kullanılan sonlu eleman ağları	67
Şekil 5.17	:Morley verev plağının açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi	68
Şekil 5.18	:Düzgün yayılı yük etkisi altında ankastre mesnetli kiriş	69
Şekil 5.19	:Ankastre mesnetli kirişin çözümünde kullanılan sonlu eleman ağları	69
Şekil 5.20	:Tekil yük etkisi altında ankastre mesnetli kiriş ve yükleme durumları	70

SEMBOL LİSTESİ

e	: Eleman üst indisi
$\{ \}$: Vektör gösterimi
$[]$: Matris gösterimi
$[]^T$: Matris transpozesi
$[]^{-1}$: Matris inversi
$[N]$: Eleman şekil fonksiyonu matrisi
$[N_p]$: Yük şekil fonksiyonu matrisi
$\{a\}^e$: Eleman düğüm noktaları yer değiştirmeleri vektörü
$[B]$: Bağ matrisi
$[D]$: Elastisite matrisi
π	: Toplam potansiyel enerji
U_i, U_d	: İç ve dış potansiyel enerji
$[K]$: Rijitlik matrisi
$\{F\}^e$: Eleman eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri vektörü
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$: x, y, z doğrultularındaki birim uzamalar
γ_{xy}	: xy düzlemindeki birim kayma şekil değiştirmesi
γ_{xz}, γ_{yz}	: Kalınlık doğrultusundaki birim kayma şekil değiştirmeleri
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: x, y, z eksenlerine dik düzlemlerdeki normal gerilmeler
τ_{xy}	: Ortalama yüzeye paralel kayma gerilmesi
τ_{xz}, τ_{yz}	: Ortalama yüzeyin normali(kalınlık) doğrultusundaki kayma gerilmeleri
E	: Elastisite modülü
ν	: Poisson oranı

G	: Kayma modülü
u, v, w	: Plakta x, y, z doğrultularındaki yer değiştirmeler
b	: Eğilme terimi alt indisi
s	: Kayma terimi alt indisi
[J]	: Jakobien matrisi
h	: Plak kalınlığı

KALIN PLAKLAR İÇİN ÜÇ BOYUTLU SONLU ELEMAN MODELLERİ

ÖZET

Bu çalışmada, kalın plakların statik çözümü için sonlu eleman yöntemi ile, üç boyutlu, sekiz ve yirmi düğüm noktalı iki farklı izoparametrik sonlu eleman modelleri geliştirilmiştir. Kalın plak problemi üç boyutlu elastisite problemi olarak ele alınmıştır. Düğüm noktası serbestlikleri olarak x , y , z eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmeler (u , v , w) alınmıştır. Geliştirilen sonlu elemanların ikisi de C^0 süreklidir. İnce plak uygulamalarında kayma kilitlenmesi problemi ortaya çıkmıştır.

Eleman karakteristikleri eğilme ve kayma etkileri ayrı ayrı düşünülüp iki terimli olarak formüle edilmiştir. İnce plak uygulamalarında kayma kilitlenmesini önlemek amacıyla kayma etkilerini içeren terimlerde seçilerek azaltılmış integrasyon tekniği kullanılmıştır. İntegraller Gauss nümerik integrasyon yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır.

Sayısal uygulamaların çözümü için FORTRAN dilinde her iki eleman için bilgisayar programı geliştirilmiştir. Bu programlara data dosyası hazırlamak amacıyla bilgisayar programları geliştirilmiştir. Bu elemanlar kullanılarak elde edilen sonuçlar boyutsuz olarak analitik çözüm ve diğer araştırmacıların sonlu eleman sonuçları ile birlikte tablolarda verilmiştir.

Bu çalışmada, kalın plakların statik çözümü için geliştirilen, üç boyutlu, sekiz ve yirmi düğüm noktalı izoparametrik elemanların ince ve kalın plak uygulamaları ile ankastre mesnetli giriş ve verev plak gibi genel problemlerde mühendislik analizleri bakımından tatmin edici sonuçlar verdiği tespit edilmiştir.

THREE DIMENSIONAL FINITE ELEMENT MODELS FOR THICK PLATES

SUMMARY

In this study, three-dimensional, eight-noded and twenty-noded isoparametric finite element models are developed for static analysis of thick plates by finite element method. Thick plate problem is assumed as three dimensional elasticity problem. Nodal degrees of freedom are displacements(u, v, w) in cartesian coordinates(x, y, z). Both of two finite elements are C^0 continuous. The shear locking problem appears in thin plate applications.

Element characteristics are formulated in two terms as bending and shear. In order to prevent shear locking problem that appears in thin plate applications, selective reduced integration technique is used on the shear term. The integrals are calculated by Gauss quadrature formula.

For the solution of numerical applications, two computer programs written in FORTRAN language are developed for each element. In order to prepare data folder for these programs, computer programs are developed. The results obtained by these elements are presented in dimensionless form in tables with exact solution and with finite element results given by other researchers.

In this study, it is determined that three-dimensional, eight-noded and twenty-noded isoparametric finite elements developed for static analysis of thick plates give satisfactory results in view of engineering analyses for thin and thick plate applications and for general problems such as cantilever beam and skew plate.

1. GİRİŞ

1.1 Konu

Plak problemleri mühendislik uygulamalarında çok sık karşılaşılan problemlerden biridir. İnşaat mühendisliğindeki plak problemlerinde genellikle plak kalınlığı diğer boyutlar yanında ihmal edilebilecek mertebededir. Bu geometrik özelliğe sahip plaklar ince plak olarak isimlendirilir. Kirchhoff plak teorisinin kabullerinden de yararlanılarak gerçekte üç boyutlu olan ince plak problemi iki boyutlu hale indirgenir.

Plak kalınlığının artması sonucunda Kirchhoff plak teorisi ile yapılan hesaplar yeterli olmamaktadır. Kalınlığın artmasıyla birlikte, Kirchhoff plak teorisinde ihmal edilen, kayma deformasyonları etkilerinin belirginleşmesi bu durumu yaratmaktadır. Bu sebeple Mindlin ve Reissner tarafından kayma deformasyonları etkilerinin de hesaba katıldığı iki boyutlu plak teorileri geliştirilmiştir

Genellikle araştırmacılar plak üzerine yaptıkları çalışmalarda, plak problemini bazı kabullerle iki boyutlu hale indirmeye yolunu seçmişlerdir. Bu tez çalışmasında bu yaklaşımdan farklı olarak plak problemi üç boyutlu elastisite teorisinin birinci tipten sınır değer problemi olarak ele alınmıştır. Başka bir deyişle, kalın plak problemi üç boyutlu olarak ele alınıp cismin dış yüzeyinde yüzey kuvvetleri verilerek hacmi içerisindeki noktalarda gerilme, şekil değiştirme ve yer değiştirme değerlerinin bulunması amaçlanmıştır.

1.2 Yöntem

Bu çalışmada, sayısal hesap yöntemlerinden biri olan sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak, çeşitli mesnetlenme şartlarına sahip ince ve kalın plak problemlerinin yaklaşık çözümü amaçlanmıştır. Bu amaca uygun olarak üç boyutlu sekiz ve yirmi düğüm noktalı, iki ayrı sonlu eleman geliştirilmiştir. Geliştirilen her iki sonlu eleman modeli için birer bilgisayar programı algoritması hazırlanıp FORTRAN programlama dilinde yazılmıştır. Hazırlanan programlara veri girişinin zorluğu

görülerek bu programlara veri dosyalarını hazırlayan küçük yardımcı programlar oluşturulmuştur. Kullanılan iki elemanın yaklaşımı karşılaştırmalı olarak analiz edilmiştir.

1.3 Literatür

Literatürde, kalın plak problemlerinin üç boyutlu sonlu elemanlar kullanılarak çözümünü amaçlayan çok fazla kaynak bulunmamaktadır. Genellikle araştırmacılar kabuk problemlerinin çözümünde iki boyutlu sonlu elemanlardan faydalanmaktadır. Bu kabuk problemleri incelenirken zaman zaman, geliştirilen iki boyutlu sonlu elemanın plak problemine uygulandığı sayısal çözümlerle de karşılaşılmıştır. Bu çalışma kapsamında faydalanılan kaynaklar aşağıda özetlenmiştir.

[1-5] numaralı kaynaklar sonlu elemanlar yönteminin anlatıldığı kaynaklardır. Bu kaynaklarda teorik anlatımların yanı sıra sayısal uygulamalara da yer verilmiştir. [6-7] numaralı kaynaklarda yapı sistemlerinin hesabında kullanılan matris yöntemlere değinilmiştir. [8-9] numaralı kaynaklar şekil değiştiren cisimlerin mekaniğinin incelendiği kaynak kitaplardır. [10-11] numaralı kaynaklarda plak ve kabuk teorileri anlatılmaktadır. [12-13] numaralı kaynak kitaplardan ise bilgisayar programının geliştirilmesi aşamasında yararlanılmıştır. Bu kitaplarda FORTRAN programlama dilinin esaslarının anlatılmasının yanı sıra çeşitli mühendislik problemleri için programlar geliştirilmiştir.

Altan, sonlu elemanlar yöntemini kullanarak, kalın daire halkası plaklar, kalın silindirik kabuklar ile bunların birleşmesinden oluşan basınç odalarının hesaplanması amacıyla üç boyutlu, geometriye uygun, yirmi düğüm noktalı bir sonlu eleman geliştirmiş ve bu sonlu eleman yardımıyla değişik problemlerin çözümü yaparak sonuçları irdelemiştir[14].

Aksu, genel biçimli kalın sayılabilecek kabuklar için şekil değiştirme ifadesine dayanarak sekiz düğüm noktalı kırk serbestlik dereceli dörtgen sonlu eleman geliştirmiştir[15]. Bu tez çalışmasında bilgisayar programı oluşturulurken, Aksu tarafından kabuklar için geliştirilen bilgisayar programının algoritması esas alınmıştır.

Türe çalışmasında[16], minimum potansiyel enerji prensibini kullanarak kalın sayılabilecek plakların çözümü için C^0 sürekli, TÜRE12 ve TÜRE24 adını verdiği izoparametrik dörtgen eleman geliştirmiştir. Elemanlar geliştirilirken Mindlin plak teorisi esas alınmıştır. Birçok sayısal uygulamaya da yer verilen bu çalışmada,

kullanılan elemanlarda kayma kilitlenmesi sorunu ile karşılaşmıştır. Özellikle sonlu elemanlar ile kalın plak çözümleri üzerine çalışan araştırmacıların incelemesi gereken önemli bir çalışmadır. Bu çalışma Aksu ile yaptıkları yayına temel oluşturmuştur[17].

[18] numaralı çalışmada, kalın ve ince plakların çözümü için Mindlin-Reissner teorisine dayanan 12 serbestlik dereceli bir dörtgen sonlu eleman geliştirilmiştir. Bu elemanla yapılan ince plak çözümlerinde kayma kilitlenmesine rastlanılmamıştır. Farklı sınır koşullarına sahip plak örneklerinin sayısal çözümü yapılmıştır.

Kara, genel biçimli ve genel yüklemeler etkisindeki kalın kabuklar için üç boyutlu, yirmi düğüm noktalı izoparametrik bir sonlu eleman geliştirmiştir[19].

Özaydın, kalın sayılabilecek plaklar için sekiz noktalı, eğrisel, izoparametrik bir dörtgen eleman geliştirmiştir[20].

Beloumar ve Guenfoud'in çalışmasında[21] dört düğüm noktalı ve 12 serbestlik derecesine sahip dikdörtgen eleman geliştirilmiştir. Geliştirdikleri bu elemana SBRP adının vermişlerdir. Eleman serbestlikleri her düğüm noktasındaki çökme ve x ile y eksenleri etrafındaki dönmelerdir. SBRP elemanı ile yapılan çözümlerde kayma kilitlenmesi problemine rastlanılmadığı belirtilmiştir. SBRP elemanı ile yapılan çözümler dört düğüm noktalı Mindlin plak elemanı ile karşılaştırılmıştır.

Spilker ve Munir, 12 düğüm noktalı kübik Serendipity tipi şekil fonksiyonları kullanarak, ince ve kalın sayılabilecek plaklar için hibrid-gerilme elemanı geliştirmişlerdir[22]. Bu elemanla çözülen ince plak problemlerinde kayma kilitlenmesine rastlanmamıştır. Eleman yakınsaklığı aynı tipteki dört ve sekiz düğüm noktalı hibrid-gerilme elemanları ve 12 düğüm noktalı yer değiştirme yöntemine dayanan Mindlin plak elemanı ile karşılaştırılmıştır.

[23]'de, 12 serbestlik dereceli dikdörtgen plak eleman için eleman iç bölgesinde denge denklemlerini sağlayan iç kuvvet alanları, sınırlarda ise geometrik uygunluk şartlarını sağlayan yer değiştirme alanları birlikte kullanılarak sonlu eleman rijitlik matrisi tayin edilmiştir.

İbrahimbegoviç ve Wilson'un çalışmasında[24], varyasyon prensibi kullanılarak kalın kabuk ve katı cisim elemanları türetilmiştir. Türetilen bütün elemanların her bir düğüm noktası altı serbestlik derecesine sahiptir. Kabuklara ait sayısal uygulamaların yanında plaklara ait sayısal uygulamaların da bulunduğu bir çalışmadır.

Yuan ve Miller, 12'si x ve y eksenleri etrafında dönme, 9'u çökme serbestliği olmak üzere toplam 21 serbestlik dereceli bir dikdörtgen plak eleman geliştirmişlerdir[25].

Levinson ve Cooke, kayma deformasyonu etkilerini de hesaba katarak dört kenarından basit mesnetli dikdörtgen plakların klasik Navier çözümünü genelleştirmişlerdir[26].

Özakça, Hinton ve Roa'nın yaptığı çalışma, plak problemi çözümü için üç boyutlu elemanların önerildiği sayılı yayınlardandır[27]. Geliştirilen, üç boyutlu, 20 ve 27 düğüm noktalı altı yüzlü ve 10 düğüm noktalı dört yüzlü elemanlar test edilmiş ve sonuçlar karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Salerno ve Goldberg, Reissner teorisini, düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli plak örneği ile yine düzgün yayılı yük etkisi altındaki karşılıklı iki kenarı basit mesnetli diğer iki kenarı boşta olan plak örneğine uygulamışlardır[28]. Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli plak örneğinde h/a ve b/a oranlarına göre değişen katsayılar geliştirilerek kayma deformasyonlarının etkisi hesapta dikkate alınmıştır. Katsayı değerleri tablolar halinde verilmiştir.

Wang, Lim, Reddy ve Lee yaptıkları çalışmada[29], Mindlin ve Reissner teorilerinin birbirleriyle ilişkilerini ve farklılıklarını incelemişlerdir. Teoriler arasındaki ilişkinin daha yakından görülebilmesi açısından farklı mesnet şartlarına sahip plak örnekleri sayısal olarak çözülmüştür.

Kim ve Choi, Mindlin plak teorisini esas alarak bir plak sonlu elemanı geliştirmişlerdir[30]. Geliştirilen sonlu elemanın yer değiştirme fonksiyonu, uygunluk şartını sağlamayan serbestliklerin sekiz düğüm noktalı plak elemanın iki dönme bileşenine eklenmesiyle elde edilmiştir. Yaptıkları ince plak çözümlerinde elemanda kayma kilitlenmesi problemi ile karşılaşılmamıştır.

Liu, Kerh ve Lin, ince ve kalın plak analizi için dört düğüm noktalı 16 serbestlik dereceli dörtgen sonlu eleman geliştirmişlerdir[31].

Srinivas ve Rao yaptıkları çalışmada[32], kalın ve ince plakların üç boyutlu analizini yapmışlardır. Bu çalışmada u, v, w yer değiştirmeleri serilerle ifade edilmiş ve sonuçlar tablolar halinde verilmiştir. Srinivas ve Rao, çalışmalarında uyguladıkları prosedürün ortotropik plakların çözümünde de uygulanabileceğini belirtmişlerdir.

Bhashyam ve Gallagher'in çalışmasında[33], şekil değiştirme enerjisi eğilme yer değiştirmesi ve toplam yer değiştirme terimlerine bağlı olarak ifade edilmiştir. Örneklerde ayrık-Kirchhoff modeli temelli üçgen sonlu eleman kullanılmıştır.

Crisfield çalışmasında[34], kenar noktalarında üç ve kenar orta noktalarında iki serbestlik derecesine sahip toplam yirmi serbestlik dereceli bir dörtgen eleman geliştirmiştir. Elemanda, başlangıçta Serendipity tipi sekiz adet dönme serbestliği ile dokuz adet Lagrange tipi çökme serbestliği tanımlanmıştır. Daha sonra kenar ortası ve eleman ortası çökme serbestlikleri ortadan kaldırılmıştır. Geliştirilen sonlu elemanla yapılan ince plak çözümlerinde kayma kilitlenmesi oluşmadığı belirtilmiştir.

Reissner yaptığı çalışmada[35], kayma deformasyonlarının elastik plakların eğilme problemindeki etkisini göstermiştir. Bu çalışmada ulaştığı sonuçları, dikdörtgen kesitli çubukların burulma problemi ile dairesel delikli plaklarda gerilme yoğunlaşması probleminin çözümüne uygulamıştır.

Mindlin, Reissner'in teorisine benzer bir şekilde kalın plakların titreşim probleminin çözümü için bir çalışma yapmıştır[36].

Lee, Lim ve Wang yaptıkları çalışmada[37], Levy plaklarının eğilme problemini incelemiştir. Bu çalışmada amaçlanan, kalın Levy plaklarının çözümünde, Kirchhoff çözümünü kullanarak Mindlin plak teorisi ile ulaşılan sonuçlara ulaşmaktır. İlk olarak Mindlin ve Reissner plak teorileri arasındaki bağıntı düşünülmüş ve buradan da Kirchhoff ile Reissner plak teorileri arasındaki bağıntıya geçilmiştir. Sonuçlar karşılaştırmalı olarak tablolarda verilmiştir.

Kant, Owen ve Zienkiewicz tarafından yapılan çalışmada[38] her düğüm noktasında altı serbestlik derecesine sahip Lagrange ailesinden dokuz düğüm noktalı dörtgen eleman geliştirilmiştir. Geliştirilen C^0 sürekli eleman kullanılarak çeşitli plak problemleri, tam, azaltılmış ve seçilerek azaltılmış integrasyon teknikleri için ayrı ayrı çözülmüştür. Sayısal sonuçlar, karşılaştırmalı olarak tablolar halinde verilmiştir.

Lim ve Reddy, geliştirilen plak teorileri arasındaki ilişkiyi incelemiştir[39]. Bu çalışmada, her bir plak teorisi için geçerli genel bir ifadeye ulaşılmıştır. Bu ifade farklı sınır şartlarına sahip plak örneklerine uygulanmış ve sonuçlar tablolar halinde verilmiştir. Bu konuda çalışma yapan araştırmacıların çok iyi faydalanabilecekleri bir yayındır.

Hrabok ve Hradey, plak eğilme probleminde kullanılan sonlu eleman modellerini bir arada toplayan bir çalışma yapmıştır[40]. Ayrıca bu çalışmada plak sonlu elemanlarındaki gelişmeye de değinilmiştir.

2. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

2.1 Giriş

Sonlu elemanlar yönteminin gelişmesi bilgisayar teknolojisinde son yıllarda görülen hızlı gelişme ile paralellik göstermektedir. Başlangıçta yapı analizi problemleri için geliştirilen bu yöntem, kullanışlığı sebebiyle günümüzde mühendisliğin birçok alanında kullanılmaktadır. Bu yöntem özellikle kullandığı çözüm yöntemi sebebiyle bilgisayar kullanımını zorunlu hale getirmektedir.

Sonlu elemanlar yöntemi bir yaklaşık hesap yöntemi olup yöntemin esasını, çözümü istenen problemin özelliğine göre değişen sürekli bir sistemi, sonlu sayıda alt bölgeye ayırma düşüncesi oluşturmaktadır. Eleman olarak isimlendirilen bu alt bölgelerin birbirlerine düğüm noktaları adı verilen noktalardan bağlı olduğu düşünülür ve çözümde ulaşılmak istenen sonuç değerlerinin, sistemin içinde her noktada değil de bu düğüm noktalarında elde edilmesi amaçlanır. Böylece analitik çözümü karmaşık olan problemlerin çözümüne yaklaşık olarak ulaşılması sağlanır.

Sonlu elemanlar yönteminde bilinmeyenlere, interpolasyon fonksiyonlarıyla ifade edilen fonksiyonlarla yaklaşılır. Yani başka bir deyişle sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilmek istenen sonuç değerler bu fonksiyonların düğüm noktalarında aldığı değerlerdir. Bu hesaplar ilk olarak eleman bazında düşünülür ve her düğüm noktasında farklı elemanlardan gelen etki hesaba katılarak sisteme geçilir. Problemin türüne göre seçilen bilinmeyenler, yer değiştirmeler, kuvvetler veya hem yer değiştirmeler hem de kuvvetlerden seçilebilirler. Buna bağlı olarak da yöntem, yer değiştirme(deplasman) yöntemi, kuvvet yöntemi ve karışık yöntem olarak isimlendirilir. Bu çalışmada yer değiştirme yöntemi kullanılmıştır.

Yapı sistemleri hesabında kullanılan, çözümde enerji teoremlerinin kullanıldığı, indirekt matris deplasman yönteminde, eleman bazında, deplasman bileşenlerinin uç deplasmanlarına bağlı ifadelerini elde edebilmek amacıyla oluşturulan interpolasyon fonksiyonlarına yer değiştirme fonksiyonları ismi verilir. Bu fonksiyonlar, kullanışlılığı sebebiyle, polinomlardan seçilir.

2.2 Yer değiştirme yöntemi

Yer değiştirme yöntemi ile yapılan hesapta izlenen yol kısaca şu şekilde özetlenebilir [14]sf.12-13:

1. Sürekli ortam, sonlu eleman sayısında sanal çizgiler veya yüzeyleme ayrılır. İki veya üç boyutlu eleman kullanıldığı zaman eleman kenar uzunluklarının birbirine yakın mertebede seçilmesi önerilir.
2. Elemanların ayrıık düğüm noktalarında birbirlerine bağlandığı varsayılır. Düğüm noktası yer değiştirmeleri problemin esas bilinmeyen parametreleri olarak alınır. Düğüm noktaları numaralandırılır. İki ve üç boyutlu eleman kullanıldığı durumlarda ise numaralandırma işlemine, bant genişliğinin küçük olması için kısa doğrultudan başlanır.
3. Her sonlu eleman içinde bu elemanın düğüm noktaları yer değiştirmeleri cinsinden bir fonksiyon dizisi şeklinde yer değiştirme durumu seçilir.
4. Yer değiştirme fonksiyonu yardımıyla eleman içindeki şekil değiştirme durumu düğüm noktası yer değiştirmeleri cinsinden tanımlanır.
5. Sonlu elemanda başlangıç şekil değiştirmeleri ve malzeme özellikleri yardımıyla gerilme durumu tanımlanabilir.
6. Elemana etki eden kuvvetlerin düğüm noktalarına yığıldığı ve bunların yayılı yükleri ve sınır gerilmelerini dengelediği kabul edilir. Eleman rijitlik matrisleri hesaplanır.
7. Düğüm noktası denge denklemleri yazılarak sistem rijitlik ve yükleme matrisleri, eleman rijitlik ve yükleme matrisleri değerlerinden teşkil edilir.
8. Sınır şartları göz önüne alınarak denklem takımı çözülür. Bu zm ile problemin bilinmeyenleri olan düğüm noktası yer değiştirmeleri bulunur.
9. Her bir elemanda bilinen yer değiştirmelerden hareket edilerek gerilmeler hesaplanır.

2.3 Yer değiştirme fonksiyonu

Adından da anlaşıldığı gibi, bilinmeyenler olarak düğüm noktası yer değiştirmelerinin alındığı, indirekt matris deplasman yönteminde seçilecek yer

değiştirme fonksiyonunun terim sayısının, elemanda toplam düğüm noktası yer değiştirme sayısına eşit olması gerekmektedir. Böylece düğüm noktası yer değiştirme sayısının yüksek olması otomatik olarak, seçilen yer değiştirme fonksiyonlarının derecesini arttırmaktadır. Bu da çözümde kesme hatalarının düşük olması anlamına gelmektedir. Fakat bu durum yanlış anlaşılmalıdır. Deplasman metodunda bilinmeyen sayısındaki artış da olumsuz sonuçlara yol açabilir. Bu yüzden bu iki denge gözetilerek düğüm noktası yer değiştirmelerinin dengeli seçilmesi gerekir.

İki boyutlu problemlerde polinom değişkenleri paskal üçgeninden, üç boyutlu problemlerde ise paskal dörtyüzlüsünden simetrik olarak seçilir.

Yer değiştirme fonksiyonları şu koşulları sağlamalıdır [1]sf.81:

1. Eleman, şekil değiştirme meydana gelmeden rijit cisim hareketi yapabilmelidir.
2. Elemanın içinde sabit şekil değiştirme ve sabit iç kuvvet durumları meydana gelebilmelidir.
3. Yer değiştirme fonksiyonu eleman içinde ve birbirine ayrıtları boyunca komşu iki elemanın ortak düğüm noktalarında sürekli olmalıdır.

Yukarıda belirtilen 1. ve 2. koşullar, eleman boyutları sonsuz küçüğe giderken sonuçların klasik elastisite teorisi ile çakışması için gereklidir. Bu iki koşul bütünlük kriteri olarak da isimlendirilir [1]sf.81. 3. koşul ise yakınsaklığın monoton ve çok kere hızlı olmasını sağlamaktadır. Bu koşul da uygunluk kriteri olarak da isimlendirilmektedir [1]sf.81.

3. koşulda belirtilen, yer değiştirme fonksiyonunun eleman içinde sürekli olma zorunluluğu, sürekli polinomlar seçilerek sağlanmış olur. Herhangi bir yer değiştirme bileşeninin bir ayrıt üzerinde ve o ayrıta komşu elemanlarda aynı olabilmesi için de şu koşulların sağlanması gerekmektedir [1]sf.178 :

1. Yer değiştirme fonksiyonu değişimi sadece o ayrıt üzerindeki ortak düğüm noktalarının yer değiştirmeleri cinsinden belirlenmiş olmalıdır.
2. Birbirlerine komşu elemanlarda aynı yer değiştirme fonksiyonu kullanılmalıdır.
3. Yer değiştirme fonksiyonu eleman içinde sürekli olmalıdır.

2.4 Şekil fonksiyonları

Şekil fonksiyonları elemanın sınırları içerisinde bulunan herhangi bir noktanın yer değiştirmelerinin eleman düğüm noktaları yer değiştirmeleri cinsinden ifade edilmesine yarayan fonksiyonlardır. Şekil fonksiyonları için N simgesi kullanılır ve hangi düğüm noktasına ait olduğunu göstermesi açısından da elemanın ilgili düğüm noktası numarası alt indis olarak yazılır.

Şekil fonksiyonunun en belirgin özelliği ait olduğu düğüm noktasında 1 değerini alırken, diğer düğüm noktalarında 0 değerini almasıdır. Böylece şekil fonksiyonlarının eleman içindeki her noktadaki toplamı bire eşit olur. Bu da rijit cisim ötelemesi koşulunun bir sonucudur [14]sf.14. Ayrıca şekil fonksiyonu ait olduğu düğüm noktasındaki 1 değerinden, lineer azalarak, komşusu olan düğüm noktasında 0 değerini alır. Şekil fonksiyonları, yukarıda açıklanan özellik kullanılarak, yer değiştirme fonksiyonundaki sabitlerin tespiti ile de bulunabilir.

$$\{u\}^e = [N] \{a\}^e \quad (2.1)$$

$\{u\}^e$: Eleman sınırları içinde tanımlı yer değiştirme fonksiyonu

$[N]$: Şekil fonksiyonları matrisi

$\{a\}^e$: Eleman düğüm noktaları yer değiştirmeleri

Yukarıdaki ifadeden de anlaşılacağı üzere, $\{a\}^e$ matrisi, kolon matrisi olup, elemanın bütün düğüm noktalarındaki yer değiştirmelerinin toplam sayısı kadar satır içermektedir. $\{u\}^e$ matrisi de $\{a\}^e$ matrisi gibi kolon matris olup, düğüm noktası yer değiştirmesi kadar satır içerecektir. Buradan da anlaşılacağı üzere şekil fonksiyonları matrisinin boyutu için açıklama yapılması gerekmektedir. Şekil fonksiyonları matrisi düğüm noktası adedi kadar alt matristen oluşmaktadır. Bu alt matrislerin köşegenleri dışındaki elemanlar sıfır değerindedir. Köşegen üzerindeki elemanlar ise ilgili düğüm noktasının şekil fonksiyonlarıdır.

2.5 İzoparametrik eleman

İzoparametrik eleman, ilk olarak, 1966 yılında Irons B. M. tarafından kaleme alınan “Engineering application of numerical integration in stiffness method” adlı makalede ifade edilmiştir [2]sf.2.115. İzoparametrik terim anlamı olarak “aynı parametreler” manasına gelmektedir. Bir elemana izoparametrik eleman denilebilmesi için, eleman

geometrisinin ve eleman yer değiştirme alanının aynı Şekil fonksiyonu ile ifade edilebilmesi gerekir.

Aşağıda verilen formüller sadece x yönü düşünülerek verilmiştir. Diğer yönler için de aynı durum geçerlidir.

$$u = \sum_{i=1}^m N_i \cdot u_i \quad (2.2)$$

$$x = \sum_{i=1}^n N_i' \cdot x_i \quad (2.3)$$

u : Eleman içindeki herhangi bir noktanın x eksenini doğrultusundaki yer değiştirmesi.

u_i : Eleman düğüm noktalarının x eksenini doğrultusundaki yer değiştirmeleri.

x : Elemanın herhangi bir noktasının x eksenini doğrultusundaki koordinatları.

x_i : Elemanın düğüm noktalarının x eksenini doğrultusundaki koordinatları.

(2.2) ve (2.3) denklemlerinde kullanılan N_i ve N_i' ifadeleri Şekil fonksiyonları olup yerel koordinat(ξ, η, ζ) cinsindedir. Bu formüller yardımıyla eleman içinde bulunan herhangi bir noktanın x ve u değerleri hesaplanır.

Eleman geometrisini ifade etmek için kullandığımız nokta sayısını m, elemanda yer değiştirme serbestliği verdiğimiz nokta sayısını n ile gösterirsek;

m < n → N_i ≠ N_i' → süperparametrik eleman

m = n → N_i = N_i' → izoparametrik eleman

m > n → N_i ≠ N_i' → subparametrik eleman

İzoparametrik elemanda sağlanan N_i = N_i' eşitliği beraberinde hesaplarda kolaylık getirmektedir. Bu çalışmada da izoparametrik sonlu eleman kullanılmıştır. İzoparametrik sonlu eleman kullanılmasının başka bir avantajı da eleman rijitlik matrisi formülasyonunun çıkartılmasında yerel koordinat sisteminin kullanılmasına olanak sağlamasıdır.

2.6 Sonlu elemanlar yönteminin formülasyonu

2.6.1 Yer değiştirme fonksiyonu

Yer değiştirme fonksiyonu, şekil fonksiyonları ve eleman düğüm noktaları yer değiştirmeleri ile ifade edilir.

$$\{u\}^e = [N] \{a\}^e \quad (2.4)$$

2.6.2 Şekil değiştirme

Eleman içindeki her noktada yer değiştirme biliniirse istenilen herhangi bir noktada şekil değiştirme hesaplanabilir. Yer değiştirmeler plak boyutlarına göre merteye olarak çok küçük olacağından şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntılarındaki kareli ifadeler ihmal edilir ve ifade (2.5) denklemini gibi olur.

$$\{\varepsilon\}^e = [\partial] \{u\}^e \quad (2.5)$$

$$\{u\}^e = [N] \{a\}^e \rightarrow \{\varepsilon\}^e = [\partial] [N] \{a\}^e \rightarrow \{\varepsilon\}^e = [B] \{a\}^e \quad (2.6)$$

$[\partial] [N]$ ifadesi $[B]$ matrisi ile gösterilir. Yer değiştirmeleri şekil değiştirmelere bağlayan bu matrise bağ matrisi ismi verilir. Boyutu da probleme göre çeşitlilik göstermektedir.

2.6.3 Gerilme

Gerilmeler, şekil değiştirmeler cinsinden ifade edilebilir. Malzeme lineer elastik, homojen, izotrop bir Hooke cisimidir.

$$\{\sigma\}^e = [D] (\{\varepsilon\}^e - \{\varepsilon\}^0) + \{\sigma_0\}^e \quad (2.7)$$

$\{\sigma\}^e$: Eleman gerilme vektörü. Eleman şekil değiştirmeleri ile aynı yönlü ve aynı sayıda.

$[D]$: Elastisite matrisi. Homojen, izotrop, malzemede E , ν değişkenlerine bağlı bir matristir. Şekil değiştirme ifadelerini gerilme ifadelerine bağlayan matristir.

$\{\varepsilon_0\}^e$: Elemanın başlangıç şekil değiştirmeleri vektörü.

$\{\sigma_0\}^e$: Sisteme yükleme yapılmadan önce sistemde var olan başlangıç gerilmeleri.

2.6.4 Rijitlik matrisi ve eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri

Elastik cisimlerin gerilme ve şekil değiştirme problemleri incelenirken iki farklı yöntem kullanılabilir [3]sf.3.1, [8]sf.405-406:

1. Diferansiyel denklem metodu : Sistem parçalara ayrılarak incelenir. Denge durumuna karşı gelen çözüm, denge denklemlerini, uygunluk şartlarını, Hooke kanunlarını ve sınır şartlarını gerçekleyen bir diferansiyel denklem takımı çözümüne indirgenir.
2. Enerji metodu : Sistem bir bütün olarak incelenir. Problemin çözümü fizik anlamı olan, belirli bir integralin ekstrem yapılmasına indirgenmesidir. Denge denklemleri, uygunluk şartları, Hooke kanunları ve sınır şartlarından bir kısmını sağlayan bir çok çözümler arasında asıl probleme cevap olanını ayırıp bulmak amaçlanır. Kesin çözümün olmadığı durumlarda çok kullanışlı bir yaklaşım yöntemidir.

Yapı sistemlerinin statik hesabında aşağıdaki enerji yöntemleri kullanılmaktadır [3]sf.5.1.

1. Minimum potansiyel enerji prensibi
2. Virtüel yer değiştirme prensibi
3. Minimum tamamlayıcı enerji prensibi
4. Virtüel gerilme prensibi
5. Reissner prensibi
6. Hamilton prensibi

Bu çalışmada minimum potansiyel enerji yöntemiyle inceleme yapılmıştır. Bu prensibe göre bir integral ifade ile tarif edilen toplam potansiyel enerji ancak sistemin gerçek denge konumunda bir ekstremden geçer ve bu ekstrem değer bir minimumdur. Buna göre problemin çözümü, belirli bir integral ifadesini minimum yapan konumun bulunmasına indirgenir.

Toplam potansiyel enerji (π), iç potansiyel enerji (U_i) ile dış potansiyel enerjinin (U_d) toplamına eşittir. ($\pi = U_i + U_d$)

Minimum potansiyel enerji prensibi gereğince toplam potansiyel enerjinin birinci varyasyonunun sıfır olması gerekir. Böylece gerçek denge durumuna ulaşılmış olur.

$$\delta\pi = \delta U_i - \delta W_d = 0 \text{ (potansiyel enerjinin minimum olma koşulu)} \quad (2.8)$$

Burada W_d dış kuvvetlerin yaptığı iştir. Konservatif yük sistemlerinde yükleme esnasındaki dış potansiyel enerjisindeki kayıp(U_d) dış kuvvetlerin yaptığı işe(W_d) eşittir. ($U_d = -W_d$)

- İç potansiyel enerjinin şekil değiştirmeye göre 1. varyasyonu :

$$\delta U_i = \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV \quad (2.9)$$

$$\delta U_i = \int_V (\delta \epsilon)^T \sigma dV \quad (2.10)$$

- Dış potansiyel enerjinin yer değiştirmeye göre 1. varyasyonu :

$$\delta W_e = \int_V (b_x \delta u + b_y \delta v + b_z \delta w) dV + \int_S (q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w) dS + \sum_{p=1}^n (f_{px} \delta u + f_{py} \delta v + f_{pz} \delta w) \quad (2.11)$$

$b = [b_x \ b_y \ b_z]^T \rightarrow$ Ağırlık kuvvetleri vektörü

$q = [q_x \ q_y \ q_z]^T \rightarrow$ Alan üzerine yayılı olan yayılı yük vektörü

$f_p = [f_{px} \ f_{py} \ f_{pz}]^T \rightarrow$ Tekil yük vektörü

$[\delta u]^T = [\delta u \ \delta v \ \delta w] \rightarrow$ Yer değiştirme vektörü

Yukarıda gösterilen kısaltmalar yapıldığında (2.12) denklemi elde edilir.

$$\delta W_e = \int_V [\delta u]^T b dV + \int_S [\delta u]^T q dS + \sum_{p=1}^n [\delta u]^T f_p \quad (2.12)$$

$\{\sigma\}^e = [D] \{ \{\epsilon\}^e - \{\epsilon\}^0 \} + \{\sigma_0\}^e$ ifadesini (2.10) denkleminde yerine yazarsak bünye denklemi elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{V^e} (\delta \epsilon)^T [D] \{\epsilon\} dV^e}_1 - \underbrace{\int_{V^e} (\delta \epsilon)^T [D] \{\epsilon_0\} dV^e}_2 + \underbrace{\int_{V^e} (\delta \epsilon)^T \{\sigma_0\} dV^e}_3 = \\ & \underbrace{\int_{V^e} (\delta u)^T b dV^e}_4 + \underbrace{\int_{S^e} (\delta u)^T q dS^e}_5 + \sum_{p=1}^n \underbrace{(\delta u)^T f_p}_6 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Bu ifadeye varyasyonlar alınarak toplam potansiyel enerji ifadesine ulaşılır.

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon_0\} dV + \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} dV - \int_V \{\delta u\}^T b dV \\ & - \int_S \{\delta u\}^T q dS - \sum_{p=1}^n \{\delta u\}^T f_p \end{aligned} \quad (2.14)$$

Bünye denklemindeki(2.13) ifadeler :

1. terim : Şekil değiştirme enerji değişimi
2. terim : Başlangıç şekil değiştirmesinden meydana gelen enerji değişimi
3. terim : Başlangıç gerilmelerinden meydana gelen enerji değişimi
4. terim : Ağırlık kuvvetlerinin yaptığı işin değişimi
5. terim : Yayılı yükün eleman üzerinde yaptığı işin değişimi
6. terim : Tekil yüklerin eleman üzerinde yaptığı işin değişimi

Bağ matrisi yer değiştirme fonksiyonunu içermediği için;

$$\{\varepsilon\}^e = [B] \{a\}^e \rightarrow \{\delta\varepsilon\}^e = [B] \{\delta a\}^e \quad (2.15)$$

$$\{\{\delta\varepsilon\}^e\}^T = \{ [B] \{\delta a\}^e \}^T = \{ \{\delta a\}^e \}^T [B]^T \quad (2.16)$$

Aynı işlemleri $\{u\}^e$ için de yaparsak;

$$\{\{\delta u\}^e\}^T = \{ [N] \{\delta a\}^e \}^T = \{ \{\delta a\}^e \}^T [N]^T \quad (2.17)$$

(2.15) ve (2.16) ifadelerini bünye denkleminde yerine yazılıp, ifade $\{ \{\delta a\}^e \}^T$ ortak çarpan parantezine alınır;

$$\begin{aligned} \{ \{\delta a\}^e \}^T \cdot \left(\int_{V^e} [B]^T [D] [B] \{a\}^e dV^e - \int_{V^e} [B]^T [D] \{\varepsilon_0\}^e dV^e + \int_{V^e} [B]^T \{\sigma_0\}^e dV^e \right. \\ \left. - \int_{V^e} [N]^T b dV^e - \int_{S^e} [N]^T q dS^e - \sum_{i=1}^n [N]^T f_p \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Yukarıdaki ifadenin sıfır olması için parantez içindeki ifadenin sıfır olması gerekmektedir. Düğüm noktaları yer değiştirme matrisini ($\{a\}^e$) integralin dışına alıp ifadeyi yeniden düzenlersek;

$$\left(\int_{V^e} [B]^T [D][B] dV^e \right) \{a\}^e - \int_{V^e} [B]^T [D] \{\epsilon_0\}^e dV^e + \int_{V^e} [B]^T \{\sigma_0\}^e dV^e - \int_{V^e} [N]^T b dV^e - \int_{S^e} [N]^T q dS^e - \sum_{i=1}^n [N]^T f_p = 0 \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} [K]^e &= \int_{V^e} [B]^T [D][B] dV^e \\ \{F_{\epsilon_0}\}^e &= \int_{V^e} [B]^T [D] \{\epsilon_0\}^e dV^e \\ \{F_{\sigma_0}\}^e &= \int_{V^e} [B]^T \{\sigma_0\}^e dV^e \\ \{F_b\}^e &= \int_{V^e} [N]^T b dV^e \\ \{F_q\}^e &= \int_{S^e} [N]^T q dS^e \\ \{F_p\}^e &= \sum_{i=1}^n [N]^T f_p \\ \{F\}^e &= \{F_{\epsilon_0}\}^e - \{F_{\sigma_0}\}^e + \{F_b\}^e + \{F_q\}^e + \{F_p\}^e \end{aligned} \quad (2.20)$$

$[K]^e$: Eleman rijitlik matrisi

$\{F_{\epsilon_0}\}^e$: Isı değişimi gibi başlangıç şekil değiştirmelerinden oluşan etkileri dengelemek için gerekli düğüm noktası kuvvetleri

$\{F_{\sigma_0}\}^e$: Başlangıç gerilmelerinden oluşan etkileri dengelemek için gerekli düğüm noktası kuvveti

$\{F_b\}^e$: Kütle kuvvetlerinin etkisi ile oluşan eleman düğüm noktası kuvveti

$\{F_q\}^e$: Alana yayılı dış yükün etkisiyle oluşan eleman düğüm noktası kuvveti

$\{F_p\}^e$: Tekil yükün etkisi ile oluşan eleman düğüm noktası kuvveti

$\{F\}^e$: Eleman eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri

Yapılan işlemler sonucunda (2.21) ifadesine ulaşılır.

$$[K]^e \{a\}^e = \{F\}^e \quad (2.21)$$

Her bir eleman için rijitlik matrisi ve eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri hesaplanarak sistem çözümüne geçilir.

2.7 Gauss nümerik integrasyonu

Bölüm 2.6.4' de açıklandığı gibi eleman rijitlik matrisi ve eşdeğer düğüm noktası kuvvetlerinin elde edilmesi için bir takım integrallerin çözülmesi gerekmektedir. Bu integrallerin kesin çözümleri uzun ve uğraştırıcı olması sebebiyle yaklaşık çözümlerin bulunması için değişik araştırmacılar tarafından farklı yöntemler geliştirilmiş ve ulaşılan sonuçlar tablolar halinde kullanıcılara sunulmuştur.

Bilgisayarda programlamaya çok yatkın olması sebebiyle bu çalışmada Gauss nümerik integrasyonu uygulanmıştır. Gauss nümerik integrasyonu her boyutta elemana uygulanabilir. Eleman üç boyutlu düşünülürse integral ifade aşağıdaki gibi olur.

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_i H_j H_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (2.22)$$

Yukarıdaki ifade de görüldüğü gibi her yönde eşit sayıda integral noktası kullanılmıştır. Bazı durumlarda her yönde farklı sayıda integral noktası kullanılması daha avantajlı olabilir. Bu formülde H ile ağırlık katsayıları simgelenmiştir. f (ξ_i, η_j, ζ_k) ise ilgili integral noktasında fonksiyonun aldığı değerdir.

Gauss nümerik integrasyonunda integral nokta sayısı, bir başka deyişle integrasyon adımı sayısı, her yönde ayrı ayrı 2n-1 ifadesinin polinomun o yöndeki derecesine eşitlenmesiyle bulunur. Burada n integral nokta sayısını temsil etmektedir. Bu işlem her yön için tekrarlanarak her doğrultudaki integral nokta sayısı bulunup Gauss integral tablolarına gidilerek, nokta koordinatları ve bu noktaların ağırlık katsayıları bulunur. Bu tablonun küçük bir örneği aşağıda gösterilmiştir(Bkz. Tablo 2.1).

Gauss nümerik integrasyonun bir özelliği de integral nokta sayısının gereğinden fazla alındığı durumlarda integral sonucunun beklenen doğru sonuçla aynı çıkmasıdır. Fakat bu durum lüzumsuz vakit kaybetmemize yol açar.

Gauss nümerik integrasyonu eleman içinde yerel koordinatlarda yapılmaktadır. Bu yüzden koordinat dönüşümü gerekmektedir. Bu dönüşüm işlemi de Jakobien adı verilen matris yardımıyla yapılmaktadır. Jakobien matrisi bir sonraki bölümde incelenecektir(Bkz. Bölüm 3.7).

Tablo 2.1 Gauss nümerik integrasyon yöntemine ait n değerleri için koordinat ve ağırlık katsayıları [4]sf.147.

n	$\xi, \eta, \zeta (+ -)$	H
2	0.577350269189626	1.000000000000000
3	0.774596669241483	0.555555555555556
	0.000000000000000	0.888888888888889
4	0.861136311594053	0.347854845137454
	0.339981043584856	0.652145154862546

2.8 C^0 ve C^1 sürekliliği

Literatürde problemler süreklilik durumlarına göre de sınıflandırılmıştır. Süreklilik durumunu C harfi ile simgelenmekte, süreklilik derecesi de C harfinin üssü olarak gösterilmektedir. Örneğin C^0 sürekli problem denildiğinde, komşu elemanların ortak düğüm noktalarında sadece interpolasyon fonksiyonunun sürekli olduğu, C^1 sürekli problem denildiğinde ise interpolasyon fonksiyonu yanında interpolasyon fonksiyonun 1. türevinin de sürekli olduğu problemler anlaşılır.

C^1 sürekliliği sağlanması zor bir sürekliliktir. Özellikle konumuzla da ilişkili olması sebebiyle, Kirchhoff plaklarında C^1 sürekliliği aranmaktadır. Bu şartın sağlanmadığı 12 serbestlikli, dikdörtgen eleman kullanılarak çözülen basit ve ankastre mesnetli, üniform veya tekil yüklü plak problemlerinde, bilinen kesin çözüme iyi sayılabilecek bir hata oranı ile yakınsama sağlanmıştır. Bu değerler C^1 süreklilik şartını sağlayan elemanlarla yapılan çözümün değerleri ile karşılaştırıldıklarında göze çarpan en önemli fark kullanılan eleman sayısıdır. C^1 sürekli elemanlar kullanılarak yapılan çözümde, daha az elemanla yaklaşımı daha iyi olan sonuçlara ulaşılmıştır [5]sf.31.

C^0 sürekliliğinin, sadece yer değiştirme fonksiyonunun sürekliliği aranması sebebiyle, sağlanması C^1 sürekliliğine göre daha kolaydır. Mindlin plak teorisine göre çözümde elemanda C^0 sürekliliği aranmaktadır. Bu da bu teoriyi kullanışlı yapan özelliklerden biridir.

Bir elemanın hangi sürekliliği sağlandığının belirlenmesi için enerji fonksiyoneline bakmak yeterlidir. Enerji fonksiyonelindeki en yüksek dereceli türevin derecesinin 1 eksiği C simgesi üzerindeki üssü verecektir.

2.9 Sonlu elemanlar yöntemiyle hesapta izlenecek yol

Sonlu elemanlar yönteminin uygulanması bu bölüme kadar anlatılmıştır. Yöntemin uygulanmasına daha genel bir bakış açısı kazandırmak amacıyla yöntemin aşamaları 6 maddede özetlenebilir [1]sf.248-249.

1. Probleme verilen sistemin alt bölgelere(elemanlara) ayrılması ve ağların oluşturulması.
2. Şekil fonksiyonlarının seçimi.
3. Eleman rijitlik matrisinin enerji metodlarından herhangi biri yardımıyla elde edilmesi.
4. Eleman eşitliklerinin bir araya getirilmesi. Böylece sisteme geçilmiş ve denklem sistemi hazırlanmış olur.
5. Denklem sisteminin çözümü ve bilinmeyenlerin bulunuşu.
6. Problemin türüne göre bulunan bilinmeyenlere ek olarak, problemde çözümü istenen değerlerin elde edilmesi . Örneğin düğüm noktası yer değiştirmelerinden gerilme ve şekil değiştirmelerin hesabı.

3. MİNDLİN PLAK TEORİSİ VE KALIN PLAKLARIN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN ÜÇ BOYUTLU SONLU ELEMAN KARAKTERİSTİĞİ

3.1 Mindlin plak teorisi

İnce plakların çözümünde kullanılan ve kabulleriyle Mindlin plak teorisine de temel teşkil eden Kirchhoff plak teorisi, 1850 tarihinde Kirchhoff tarafından ortaya atılmıştır. 1945 yılında Reissner, Kirchhoff plak teorisinde yapılan kabullerden yola çıkarak kendi teorisini geliştirmiştir. Reissner teorisini oluştururken özellikle plak kalınlığının artmasıyla birlikte daha belirgin hale gelen kayma deformasyonlarının etkisini hesapta dikkate almıştır. Ayrıca çalışmasında plak düzlemine dik doğrultudaki normal gerilmeyi ihmal etmemiştir. Mindlin 1951 yılında Reissner gibi kalın plakların çözümü için Reissner'in teorisine benzer bir teori geliştirmiştir. Mindlin teorisinde Reissner'in aksine plak düzlemine dik doğrultudaki normal gerilmeyi ihmal etmiştir. İki teori birbirlerine benzerliği sebebiyle kaynaklarda Mindlin-Reissner teorisi olarak da isimlendirilmektedir.

Mindlin plak teorisinde aşağıdaki kabuller söz konusudur:

1. Malzeme homojen, izotrop, lineer elastik davranan bir Hooke cisimidir. Gerilme-şekil değiştirme bağıntılarında Hooke kanunu geçerlidir.
2. Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri bir düzlemdir.
3. Plak tanımı gereği, yükler orta düzleme diktir.
4. Sehimler plak kalınlığı yanında çok küçüktür. Bu sebeple şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntılarındaki kareli ifadeler ihmal edilir.
5. Plak orta düzlemine dik doğrultudaki σ_z normal gerilmesi yok sayılabilecek kadar küçüktür. Bu yüzden $\sigma_z = 0$ alınır. Bu varsayıma bağlı olarak $\varepsilon_z = 0$ alınır. Bu durumda z doğrultusunda plak boy değişimi ihmal edilmiş olur. Böylece deformasyon esnasında plak kalınlığının değişmediği kabul edilir.
6. İnce plak yanında kalın plak çözümlerinin de yapılmasına olanak sağlar.

7. Kirchhoff-Love hipotezi geçerli değildir. Yani deformasyondan önce orta düzleme normal olan çizgiler şekil değiştirmeden sonra orta düzleme normal kalmazlar. Böylece düzleme dik kayma şekil değiştirmeleri ihmal edilmemiş olur.

Yukarıda ifade edilen ilk 5 ifade ince plak teorisi olan Kirchhoff teorisinin de kabulleri arasındadır. İnce plak teorisine göre plağın ince plak olması zorunludur. Mindlin plak teorisinde ise bu zorunluluk ortadan kaldırılmıştır. İnce plak teorisinde, Kirchhoff-Love hipotezinden yararlanılarak, kayma deformasyonları (γ_{xz} , γ_{yz}) ihmal edilmesine karşın Mindlin plak teorisinde, kalınlığın artmasıyla bu deformasyonların etkisinin arttığı tespit edilerek hesaplarda dikkate alınmıştır. Böylece de daha sonraki kısımlarda açıklanacak olan kayma kilitlenmesi sorunu ortaya çıkmaktadır.

Literatürde genellikle Mindlin ve Reissner teorileri birlikte anılır, hatta çoğu zaman birlikte incelenir. Bunun sebebi iki teorinin de birbirine çok yakın olmasındandır. Bu teorilerin C^0 sürekliliği gerektiren elemanlarla çalışılmaya uygun olması, birçok araştırmacıyı bu iki teori üzerinde yoğunlaştırmıştır.

3.2 Üç boyutlu elastisite teorisi

Mühendislik uygulamalarında karşılaşılan problemlerin büyük bir çoğunluğu iki ve tek boyutlu olmakta veya bazı kabullerle bu hallere indirgenebilmektedir. Kalın plak problemi de enerji yöntemleri yardımıyla iki boyutlu hale indirgenebilir. Bu çalışmada iki boyutlu hal yerine üç boyutlu hal düşünülmüş ve çözümde kullanılan sonlu elemanlar da üç boyutlu elastisite teorisi prensiplerinden hareketle geliştirilmiştir.

Üç boyutlu elastisite teorisi yardımıyla çıkarılan ve sonlu eleman geliştirilmesinde kullanılan şekil değiştirme, gerilme-şekil değiştirme bağıntılarıyla şekil değiştirme enerjisi ifadesi aşağıdaki bölümlerde verilmiştir.

3.2.1 Şekil değiştirme bağıntıları

Hesapta kolaylık sağlamak amacıyla etkisinin küçük olması da düşünülerek şekil değiştirme bağıntılarındaki kareli ifadeler ihmal edilir.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.1)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

ε_x , ε_y , ε_z , ifadeleri sırasıyla x, y, z doğrultularındaki birim uzamalarıdır. γ_{xy} , xy düzlemindeki birim kayma şekil değiştirmesi; γ_{xz} ve γ_{yz} de kalınlık doğrultusundaki birim kayma şekil değiştirmeleridir.

3.2.2 Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları

Üç boyutlu hal için gerilme-şekil değiştirme bağıntıları aşağıda verildiği gibidir[8]sf.54. Aşağıdaki ifadeler homojen, izotrop, lineer elastik davranan bir Hooke cismi için geçerlidir. Gerilmeler için pozitif yönler Şekil 3.1'de verildiği gibidir.

$$\sigma_x = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z \quad (3.2)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

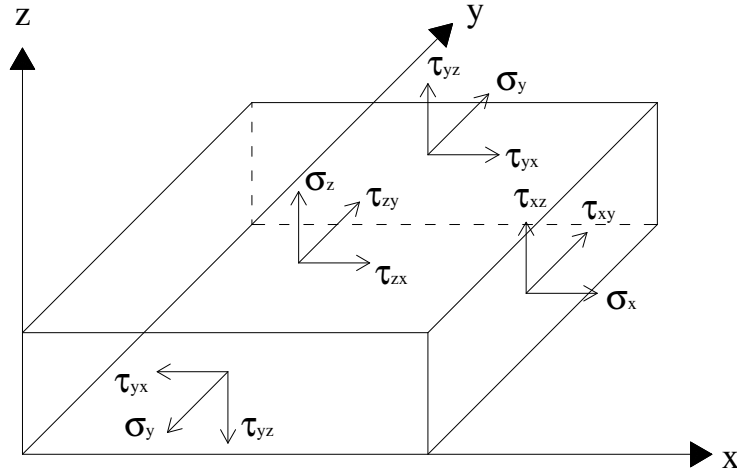
$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.3)$$

σ_x , σ_y , σ_z ifadeleri sırasıyla x, y, z eksenlerine dik düzlemlerdeki normal gerilmeleri simgeler. τ_{xy} , ortalama yüzeye paralel kayma gerilmesini; τ_{xz} ve τ_{yz} ise ortalama yüzeyin normali(kalınlık) doğrultusundaki kayma gerilmeleri ifadeleridir. E, elastisite modülünü, ν ise poisson oranını simgeler. G simgesi ise kayma modülünü ifade etmekte olup (3.3) ifadesi ile verilmiştir.

İki alt indis barındıran gerilme ifadelerinde ilk alt indis yüzü, ikinci alt indis de doğrultuyu göstermektedir.



Şekil 3.1 Gerilmeler ve pozitif yönleri

3.2.3 Şekil değiştirme enerjisi

$$U_b = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \epsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy}) dV \quad (3.4)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_V (\gamma_{xz} \tau_{xz} + \gamma_{yz} \tau_{yz}) dV \quad (3.5)$$

Şekil değiştirme enerjisi, üç boyutlu elemanda çalışmamız sebebiyle hacim integrali olarak bırakılacaktır. Şekil değiştirme enerjisinin de kayma ve eğilme etkilerini içeren iki ayrı ifadeye ayrıldığı gözden kaçmamalıdır. Toplam şekil değiştirme ifadesi bu iki ifadenin toplamıdır.

3.3 Kullanılan sonlu eleman modelleri

Bu çalışmada üç boyutlu, sekiz ve yirmi noktalı iki ayrı sonlu eleman kullanılmıştır.

3.3.1 Şekil fonksiyonları ve yerel türevleri

3.3.1.1 Üç boyutlu sekiz noktalı elemanın şekil fonksiyonları ve yerel türevleri

Eleman düğüm noktası numaralandırılması Şekil 3.2'deki gibi olup, şekil fonksiyonları aşağıda gösterildiği gibidir[2]sf.2.126.

$$N_1 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)$$

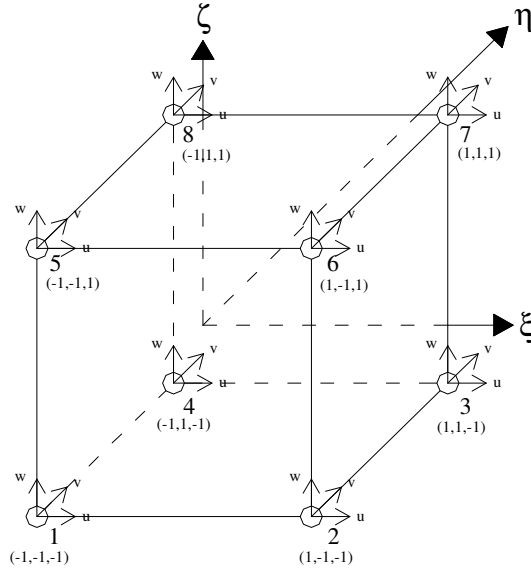
$$N_4 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \quad (3.6)$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)$$

$$N_6 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)$$

$$N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$



Şekil 3.2 Üç boyutlu sekiz noktalı eleman ve bu elemanın yer değiştirme bileşenleri

Tablo 3.1 Üç boyutlu sekiz noktalı elemanın şekil fonksiyonları yerel türevleri

i	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$
1	$-\frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)$
2	$\frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)$
3	$\frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)$
4	$-\frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)$
5	$-\frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)$
6	$\frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)$
7	$\frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)$
8	$-\frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)$

3.3.1.2 Üç boyutlu yirmi noktalı elemanın şekil fonksiyonları ve yerel türevleri

Üç boyutlu yirmi noktalı elemanın şekil fonksiyonları aşağıda verilmiştir[2]sf.2.126.

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi-\eta-\zeta-2)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(\xi-\eta-\zeta-2)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi)(1-\zeta)$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(\xi+\eta-\zeta-2)$$

$$N_6 = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(-\xi+\eta-\zeta-2) \quad (3.7)$$

$$N_8 = \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi)(1-\zeta)$$

$$N_9 = \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_{10} = \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_{11} = \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_{12} = \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1-\xi)(1+\eta)$$

$$N_{13} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(-\xi-\eta+\zeta-2)$$

$$N_{14} = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$N_{15} = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(\xi-\eta+\zeta-2)$$

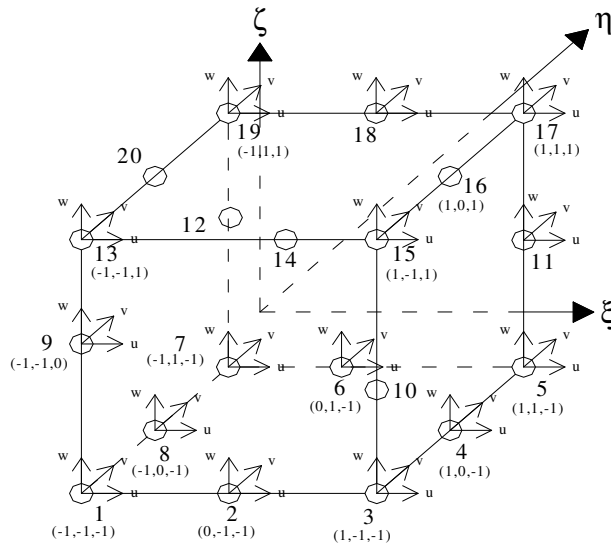
$$N_{16} = \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi)(1+\zeta)$$

$$N_{17} = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(\xi+\eta+\zeta-2)$$

$$N_{18} = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$N_{19} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(-\xi+\eta+\zeta-2)$$

$$N_{20} = \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi)(1+\zeta)$$



Şekil 3.3 Üç boyutlu yirmi noktalı eleman ve bu elemanın yer değiştirme bileşenleri

Tablo 3.2 Üç boyutlu yirmi noktalı elemanın şekil fonksiyonları yerel türevleri

i	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$
1	$\frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)$ $(1+2\xi+\eta+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta)$ $(1+\xi+2\eta+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)$ $(1+\xi+\eta+2\zeta)$
2	$-\frac{1}{4}(1-\eta)(1-\zeta)2\xi$	$-\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)$
3	$\frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)$ $(-1+2\xi-\eta-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta)$ $(1-\xi+2\eta+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)$ $(1-\xi+\eta+2\zeta)$
4	$\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\zeta)2\eta$	$-\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi)$
5	$\frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta)$ $(-1+2\xi+\eta-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta)$ $(-1+\xi+2\eta-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)$ $(1-\xi-\eta+2\zeta)$
6	$-\frac{1}{4}(1+\eta)(1-\zeta)2\xi$	$\frac{1}{4}(1+\xi^2)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)$
7	$\frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta)$ $(1+2\xi-\eta+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta)$ $(-1-\xi+2\eta-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)$ $(1+\xi-\eta+2\zeta)$
8	$-\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\zeta)2\eta$	$-\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi)$
9	$-\frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1-\eta)$	$-\frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1-\xi)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)2\zeta$
10	$\frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1-\eta)$	$-\frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi)$	$-\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)2\zeta$
11	$\frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi)$	$-\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)2\zeta$
12	$-\frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1-\xi)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)2\zeta$
13	$\frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta)$ $(1+2\xi+\eta-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta)$ $(1+\xi+2\eta-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)$ $(-1-\xi-\eta+2\zeta)$
14	$-\frac{1}{4}(1-\eta)(1+\zeta)2\xi$	$-\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\zeta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)$

Tablo 3.2 Üç boyutlu yirmi noktalı elemanın şekil fonksiyonları yerel türevleri(devamı)

i	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$
15	$\frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta)$ $(-1+2\xi-\eta+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta)$ $(1-\xi+2\eta-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)$ $(-1+\xi-\eta+2\zeta)$
16	$\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\zeta)2\eta$	$\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi)$
17	$\frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)$ $(-1+2\xi+\eta+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta)$ $(-1+\xi+2\eta+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)$ $(-1+\xi+\eta+2\zeta)$
18	$-\frac{1}{4}(1+\eta)(1+\zeta)2\xi$	$\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\zeta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)$
19	$\frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)$ $(1+2\xi-\eta-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta)$ $(-1-\xi+2\eta+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)$ $(-1-\xi+\eta+2\zeta)$
20	$-\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\zeta)2\eta$	$\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi)$

3.3.2 Yer değiştirme fonksiyonları ve yakınsaklık kriterlerinin irdelenmesi

Bu çalışmada kullanılan üç boyutlu sekiz ve yirmi noktalı elemanlarda düğüm noktası bilinmeyenleri olarak üç eksen doğrultusundaki u, v, w yer değiştirmeleri alınmıştır. Bu yer değiştirmeler Şekil 3.2 ve Şekil 3.3’de gösterilmiştir. Bölüm 2.3’te anlatıldığı gibi seçilen yer değiştirme fonksiyonlarının sağlaması gereken bir takım özellikler bulunmaktadır. Bu başlık altında da bu özelliklere ait incelemeler yapılacaktır. Bu incelemeler üç boyutlu, sekiz ve yirmi noktalı elemanlar için ayrı ayrı, iki başlık altında yapılacaktır.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

(3.8) ifadesindeki u, v, w ifadeleri, üç eksen doğrultusunda seçilen yer değiştirme fonksiyonlarının aranılan noktadaki değerleridir.

Böylece her bir düğüm noktası serbestlik derecesi 3, üç boyutlu sekiz noktalı elemanın serbestlik derecesi 24, üç boyutlu yirmi noktalı elemanın serbestlik derecesi 60 olarak alınmaktadır.

3.3.2.1 Üç boyutlu sekiz noktalı eleman

Üç boyutlu sekiz noktalı sonlu eleman için seçilen yer değiştirme fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$$u = a_1x + a_2y + a_3z + a_4zx + a_5zy + a_6xy + a_7xyz + a_8$$

$$v = a_9x + a_{10}y + a_{11}z + a_{12}zx + a_{13}zy + a_{14}xy + a_{15}xyz + a_{16} \quad (3.9)$$

$$w = a_{17}x + a_{18}y + a_{19}z + a_{20}zx + a_{21}zy + a_{22}xy + a_{23}xyz + a_{24}$$

Yer değiştirme fonksiyonlarındaki,

$$u = a_2y + a_3z + a_8$$

$$v = a_9x + a_{11}z + a_{16} \quad (3.10)$$

$$w = a_{17}x + a_{18}y + a_{24}$$

terimleri rijit cisim hareketini ifade etmektedir. Burada a_8 , a_{16} , a_{24} terimleri rijit ötelemeyi, geriye kalan diğer terimler de dönmeyi ifade etmektedir. Rijit cisim hareketinden oluşan şekil değiştirmelerde aşağıda ifade edilmiştir.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(a_2y + a_3z + a_8) = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(a_9x + a_{11}z + a_{16}) = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(a_{17}x + a_{18}y + a_{24}) = 0 \quad (3.11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = a_9 + a_2 = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = a_{17} + a_3 = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = a_{18} + a_{11} = 0$$

Görüldüğü gibi, x, y, z değişkenleri hangi değerleri alırsa alsın rijit hareketi sağlayan a_i katsayıları bulunabilmektedir. Böylece elemanın şekil değiştirme meydana gelmeden rijit cisim hareketi yapabildiği gösterilmiş olur.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a_1 + a_4 z + a_6 y + a_7 yz \Rightarrow a_4 = a_6 = a_7 = 0 \Rightarrow \varepsilon_x = a_1 (\text{sabit})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = a_{10} + a_{13} z + a_{14} x + a_{15} xz \Rightarrow a_{13} = a_{14} = a_{15} = 0 \Rightarrow \varepsilon_y = a_{10} (\text{sabit})$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = a_{19} + a_{20} x + a_{21} y + a_{23} xy \Rightarrow a_{20} = a_{21} = a_{23} = 0 \Rightarrow \varepsilon_z = a_{19} (\text{sabit})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = a_9 + a_{12} z + a_2 + a_5 z \Rightarrow a_{12} = a_5 = 0 \Rightarrow \gamma_{xy} = a_2 + a_9 (\text{sabit}) \quad (3.12)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = a_{17} + a_{22} y + a_3 + a_5 y \Rightarrow a_5 = a_{22} = 0 \Rightarrow \gamma_{xz} = a_3 + a_{17} (\text{sabit})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = a_{18} + a_{11} (\text{sabit})$$

Yukarıda çıkarılan ifadelerden de anlaşılacağı gibi, yer değiştirme fonksiyonunun bazı terimlerinin sıfır olması koşulu ile sabit şekil değiştirme durumu meydana gelebilir. Böylece 2. koşul da sağlanmış olur.

Elemanın sınır bölgelerdeki süreklilik durumunun belirlenmesi için enerji fonksiyoneline bakılır. Sekiz noktalı elemanın enerji fonksiyoneli, 1. derece türevler içeren ifadelerden oluştuğu için eleman C^0 süreklidir.

Sonuç olarak üç boyutlu sekiz noktalı elemanın yer değiştirme fonksiyonlarında aranan 3 şartı sağladığı gösterilmiştir.

3.3.2.2 Üç boyutlu yirmi noktalı eleman

Üç boyutlu yirmi noktalı sonlu eleman için seçilen yer değiştirme fonksiyonları aşağıda verilmiştir[14]sf.27.

$$\begin{aligned}
 u &= a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7\xi^2 + a_8\eta^2 + a_9\zeta^2 + \\
 &a_{10}\xi^2\eta + a_{11}\eta^2\xi + a_{12}\xi^2\zeta + a_{13}\xi\zeta^2 + a_{14}\eta^2\zeta + a_{15}\eta\zeta^2 + a_{16}\xi\eta\zeta + \\
 &a_{17}\xi^2\eta\zeta + a_{18}\xi\eta^2\zeta + a_{19}\xi\eta\zeta^2 + a_{20} \\
 \\
 v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}xy + a_{25}xz + a_{26}yz + a_{27}\xi^2 + a_{28}\eta^2 + a_{29}\zeta^2 + \\
 &a_{30}\xi^2\eta + a_{31}\eta^2\xi + a_{32}\xi^2\zeta + a_{33}\xi\zeta^2 + a_{34}\eta^2\zeta + a_{35}\eta\zeta^2 + a_{36}\xi\eta\zeta + \\
 &a_{37}\xi^2\eta\zeta + a_{38}\xi\eta^2\zeta + a_{39}\xi\eta\zeta^2 + a_{40}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 v &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}xy + a_{45}xz + a_{46}yz + a_{47}\xi^2 + a_{48}\eta^2 + a_{49}\zeta^2 + \\
 &a_{50}\xi^2\eta + a_{51}\eta^2\xi + a_{52}\xi^2\zeta + a_{53}\xi\zeta^2 + a_{54}\eta^2\zeta + a_{55}\eta\zeta^2 + a_{56}\xi\eta\zeta + \\
 &a_{57}\xi^2\eta\zeta + a_{58}\xi\eta^2\zeta + a_{59}\xi\eta\zeta^2 + a_{60}
 \end{aligned}$$

Üç boyutlu sekiz noktalı elemanda olduğu gibi yer değiştirme fonksiyonu rijit cisim hareketini ifade eden terimleri barındırmaktadır. Üç boyutlu yirmi noktalı eleman da şekil değiştirme meydana getirmeden rijit cisim hareketi yapabilmektedir.

Sabit şekil değiştirme durumunun tespiti için üç boyutlu sekiz noktalı elemanda yapılan incelemenin aynısı tekrarlanır. Bu inceleme sonucunda da üç boyutlu yirmi noktalı elemanın sabit şekil değiştirme meydana getirebilme şartını sağladığı görülür.

Enerji fonksiyoneline bakıldığı zaman elemanın C^0 sürekliliğine sahip olduğu belirlenir. Böylece son şart olan süreklilik şartının da sağlandığı tespit edilmiş olur.

3.4 Şekil değiştirme-Yer değiştirme bağıntıları

Bu bölümde, Bölüm 3.2.1’de verilen şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları matris formunda gösterilmiştir. Yalnız daha öncede belirttiğimiz gibi, ince plaklarda görülen kayma kilitlenmesinin engellenmesi için eğilme ve kayma ifadelerinin ayrı ayrı gösterilmeleri gerekmektedir. Böylece plak kalınlığı azaldıkça kayma terimlerini içeren ifadelerin integrasyon adımları azaltılabilir.

$$\{\varepsilon_b\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D_b] \{u\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\{\varepsilon_s\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [D_s] \{u\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Yukarıdaki ifadelerde eğilme etkileri b alt indisi, kayma etkileri s alt indisi ile simgelenmiştir.

3.5 Gerilme-Şekil değiştirme bağıntıları

Bu bölümde, Bölüm 3.2.2'de verilen gerilme-şekil değiştirme bağıntıları matris formda gösterilmiştir.

Aşağıdaki ifadelerde eğilme etkileri b alt indisi, kayma etkileri s alt indisi ile simgelenmiştir. Gerilmelerin pozitif yönleri de Şekil 3.1'de gösterildiği gibidir. Lineer elastik, izotrop malzeme için aşağıdaki bağıntılar çıkartılır.

$$\{\sigma_b\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D_b] \{\varepsilon_b\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\{\sigma_s\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = [D_s] \{\varepsilon_s\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

3.6 Bağ matrisleri

Şekil değiştirmeleri yer değiştirmelere bağlayan matrislere bağ matrisi isminin verildiği Bölüm 2.6.2’de ifade edilmişti. Bu bölümde ise matrisi oluşturan ifadeler verilecektir. Bağ matrisinin elde edilmesinde eğilme ve kayma terimlerinin etkisi ayrı ayrı ele alınacaktır.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ k & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ \partial v / \partial x + \partial u / \partial y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ k & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

$$au + bv + cw = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow b = c = 0 \Rightarrow a = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$du + ev + fw = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow d = f = 0 \Rightarrow e = \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.19)$$

$$gu + hv + iw = \frac{\partial w}{\partial z} \Rightarrow g = h = 0 \Rightarrow i = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$ku + lv + mw = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow m = 0 \Rightarrow k = \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow l = \frac{\partial}{\partial x}$$

Yukarıdaki ifadelerden sonuç olarak ∂_b ve B_b matrislerine ulaşılır.

$$\partial_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [B_b]_i = [\partial_b][N_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$[B_b]_{4 \times m} = [[B_b]_1 \quad [B_b]_2 \quad \dots \quad [B_b]_n] \quad (3.21)$$

(3.21) ifadesinde kullanılan m terimi, eleman serbestliklerinin toplam değerini, n değeri de eleman düğüm noktası sayısını simgelemektedir. Buradan da anlaşılacağı gibi $[B_b]$ matrisinin boyutu, sekiz noktalı eleman için 4×24 iken yirmi noktalı eleman için 4×60 'tır.

Şimdi de kayma etkilerini ifade eden terimlerden oluşan B_s matrisini oluşturalım.

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \partial w / \partial y + \partial v / \partial z \\ \partial w / \partial x + \partial u / \partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

$$au + bv + cw = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \Rightarrow b = \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow c = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$du + ev + fw = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \Rightarrow d = \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow e = 0 \Rightarrow f = \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.23)$$

$$[\partial_s] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \Rightarrow [B_s]_i = [\partial_s][N_i] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$[B_s]_{2 \times m} = [[B_s]_1 \quad [B_s]_2 \quad \dots \quad [B_s]_n] \quad (3.25)$$

(3.25) ifadesinde kullanılan m terimi, eleman serbestliklerinin toplam değerini, n değeri de eleman düğüm noktası sayısını simgelemektedir. $[B_s]$ matrisinin boyutu, sekiz noktalı eleman için 2×24 iken yirmi noktalı eleman için 2×60 'tır.

Yukarıdaki ifadelerde şekil fonksiyonlarının x, y ve z'ye göre türev ifadeleri geçmektedir. Oysa ki şekil fonksiyonları ξ , η , ζ cinsindedir. Bu yüzden bu türevler aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

3.7 Jakobien matrisi

Eleman rijitlik matrisi ve yükleme matrisleri hesabında koordinat dönüşümü yapılması gerekmektedir. Bu dönüşümün yapılması için de Jakobien adı verilen matris tanımlanmıştır. Jacobien matrisi, (3.27) ifadesi ile verilmiştir. Bu ifadeden hareketle Jacobien matrisi, şekil fonksiyonları türevleri ve eleman düğüm noktalarının global eksen takımına göre koordinatları cinsinden gösterilmiştir.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots + N_n x_n$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i y_i = N_1 y_1 + N_2 y_2 + \dots + N_n y_n \quad (3.28)$$

$$z = \sum_{i=1}^n N_i z_i = N_1 z_1 + N_2 z_2 + \dots + N_n z_n$$

Bu ifadeler yardımıyla (3.27) ifadesindeki türevler elde edilebilir.

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \dots + \frac{\partial N_n}{\partial \xi} x_n$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \dots + \frac{\partial N_n}{\partial \eta} x_n$$

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} x_2 + \dots + \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} x_n$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \dots + \frac{\partial N_n}{\partial \xi} y_n \\
\frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \dots + \frac{\partial N_n}{\partial \eta} y_n \\
\frac{\partial y}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} y_2 + \dots + \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} y_n \tag{3.29} \\
\frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_1}{\partial \xi} z_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} z_2 + \dots + \frac{\partial N_n}{\partial \xi} z_n \\
\frac{\partial z}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_1}{\partial \eta} z_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} z_2 + \dots + \frac{\partial N_n}{\partial \eta} z_n \\
\frac{\partial z}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} z_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} z_2 + \dots + \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} z_n
\end{aligned}$$

Yukarıda bulunan türev ifadeleri (3.27) ifadesinde yerlerine yazılırsa (3.30) matris gösterimi elde edilir.

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Jacobian matrisini programlama açısından iki matris çarpımı şeklinde yazmanın avantaj sağlayacağı düşünülerek aşağıdaki matrislere ulaşılır.

$$[\partial N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} \end{bmatrix}_{3 \times n} \tag{3.31}$$

$$[XX] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}_{nx3} \quad (3.32)$$

$$[J] = [\partial N][XX] \quad (3.33)$$

n : Elemanın düğüm noktası adedi

[XX] : Eleman düğüm noktalarının global eksen takımına göre koordinatlarının gösterildiği matris

Yük matrislerinin hesabında ise iki boyutlu elemanlar kullanılması sebebiyle Jakobien matrisi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$[\partial N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{2 \times n} \quad (3.34)$$

$$[XX] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & y_n \end{bmatrix}_{nx2} \quad (3.35)$$

$$[J] = [\partial N][XX] \quad (3.36)$$

Ayrıca bu ifadeler ışığında, Bölüm 3.6'da verilen (3.26) ifadesi de matris formunda aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} \end{bmatrix}_{3 \times n} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

3.8 Eleman rijitlik matrisleri

Bu kısımda da eğilme ve kayma terimlerinin etkileri iki ayrı kısımda incelenir. b alt indisi eğilme etkilerini, s alt indisi ise kayma etkilerini sembolize eder. Rijitlik matrisi ifadesi potansiyel enerjinin minimum olma prensibinden yararlanarak Bölüm 2.6.4'te verilmişti.

$$[K_b]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_b]^T [D_b] [B_b] J |d\xi d\eta d\zeta \quad (3.38)$$

$$[K_s]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_s]^T [D_s] [B_s] J |d\xi d\eta d\zeta \quad (3.39)$$

(3.38) ve (3.39) ifadelerinden de görüleceği gibi rijitlik matrisini sayısal olarak hesaplamak için bir takım integral ifadelerinin çözülmesi gerekmektedir. İntegral ifadelerinin çözümü için bu çalışmada Gauss nümerik integrasyon yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemin esasları Bölüm 2.7'de açıklanmıştı. Bu bölümde probleme uygulandığı üzerinde durulacaktır. Bu bilgiler ışığında (3.38) ve (3.39) ifadeleri aşağıdaki şekli alır.

$$[K_b]^e = \sum_{i=1}^{IMM} \sum_{j=1}^{IMM} \sum_{k=1}^{IMM} [B_b(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)]^T [D_b] [B_b(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)] J(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) H_i H_j H_k \quad (3.40)$$

$$[K_s]^e = \sum_{i=1}^{INN} \sum_{j=1}^{INN} \sum_{k=1}^{INN} [B_s(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)]^T [D_s] [B_s(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)] J(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) H_i H_j H_k \quad (3.41)$$

IMM : Eğilme terimleri için seçilmiş Gauss integral nokta adedi,

INN : Kayma terimleri için seçilmiş Gauss integral nokta adedi

ξ_i, η_j, ζ_k : Gauss integral nokta koordinatları

$|J(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)|$: Jacobien matrisinin ilgili noktadaki determinant değeri

H : Gauss ağırlık katsayıları (Tablo 2.1)

3.9 İntegral nokta adedinin belirlenmesi ve integrasyon adımının azaltılması

İntegral nokta adedi her doğrultuda ayrı ayrı tespit edilir. Bu işlem için rijitlik matrislerini oluşturan her bir ifade incelenir ve bu ifadelerde bulunan en yüksek derece tespit edilir. Bu derecede $2n-1$ ifadesine eşitlenerek, n ifadesi, yani integral nokta adedi bulunmuş olur.

Üç boyutlu yirmi noktalı elemanda yapılan incelemede $(\partial N_i/\partial x)^2$, $(\partial N_i/\partial y)^2$, $(\partial N_i/\partial z)^2$ gibi ifadeler tespit edilmiştir. $2n-1=4$ sonucuna ulaşılmıştır. Buradan üç boyutlu yirmi noktalı eleman kullanılarak yapılan çözümlerde integral nokta adedinin 3 olması gerektiği belirlenmiştir.

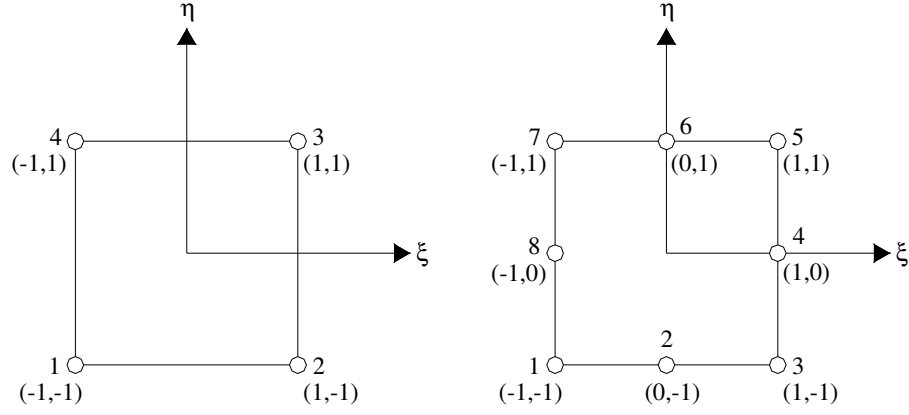
Üç boyutlu sekiz noktalı eleman incelendiğinde ise, $(\partial N_i/\partial x)^2$, $(\partial N_i/\partial y)^2$, $(\partial N_i/\partial z)^2$ gibi ifadeler tespit edilmiştir. $2n-1=2$ sonucuna ulaşılmıştır. Buradan üç boyutlu sekiz noktalı eleman kullanılarak yapılan çözümlerde integral nokta adedinin 2 olması gerektiği belirlenmiştir.

Daha önce de bahsedildiği gibi kalınlık azaldıkça, yaşanan kayma kilitlenmesi sebebiyle ince plaklarda iyi sonuçlar alınamamaktadır. Bu elverişsiz durumu ortadan kaldırmak adına, daha önce birçok araştırmacı tarafından kullanılan, integrasyon adımının, kayma etkilerini ifade eden ifadelerin hesabında, azaltılması yolu kullanılmıştır. Bunun için ifadeler çıkartılırken eğilme ve kayma etkileri birbirlerinden ayrı düşünülmüştür.

Plak kalınlığı özellikle ince plak sınırının altına indiği durumlarda, kayma terimleri için seçilmiş integrasyon adım adedi (INN) 1 değer azaltılmıştır. Yani bu değer, üç boyutlu sekiz noktalı elemanda 1, üç boyutlu yirmi noktalı elemanda ise 2 olur.

3.10 Yük matrisleri hesabında kullanılan iki boyutlu elemanların şekil fonksiyonları

Kullandığımız elemanların üç boyutlu olması sebebiyle alana yayılı yüklerin hesabında iki boyutlu elemanlara ihtiyaç duyulur. Üç boyutlu yirmi noktalı elemanda sekiz noktalı, üç boyutlu sekiz noktalı elemanda ise dört noktalı iki boyutlu elemanlar kullanılmıştır. Bu elemanların şekil fonksiyonları aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.4 İki boyutlu dört ve sekiz noktalı elemanlar

3.10.1 İki boyutlu dört noktalı elemanın şekil fonksiyonları ve yerel türevleri

Eleman geometrisi ve düğüm noktası numaraları Şekil 3.4'te görüldüğü gibidir. Bu eleman, yük için seçilmiş interpolasyon fonksiyonu ve üç boyutlu sekiz noktalı elemanda yük matrisinin hesabında kullanılan iki boyutlu eleman olarak kullanılır. Şekil fonksiyonları da aşağıda verildiği gibidir[2]sf.2.122. Şekil fonksiyonlarının türevleri de Tablo 3.3'te gösterilmiştir.

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (3.42)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Tablo 3.3 İki boyutlu dört noktalı elemanın şekil fonksiyonlarının yerel türevleri

i	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$
1	$-\frac{1}{4}(1-\eta)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi)$
2	$\frac{1}{4}(1-\eta)$	$-\frac{1}{4}(1+\xi)$
3	$\frac{1}{4}(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)$
4	$-\frac{1}{4}(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)$

3.10.2 İki boyutlu sekiz noktalı elemanın şekil fonksiyonları ve yerel türevleri

Eleman geometrisi ve düğüm noktası numaraları Şekil 3.4'te görüldüğü gibidir. Bu eleman, üç boyutlu yirmi noktalı elemanda yük matrisinin hesabında kullanılan iki boyutlu eleman olarak kullanılır. Şekil fonksiyonları da aşağıda verildiği gibidir[2]sf.2.122. Şekil fonksiyonlarının türevleri de Tablo 3.4'te gösterilmiştir.

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi) \quad (3.43)$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_7 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)$$

Tablo 3.4 İki boyutlu sekiz noktalı elemanın şekil fonksiyonları yerel türevleri

i	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$
1	$\frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi+\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(\xi+2\eta)$
2	$-(1-\eta)\xi$	$-\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
3	$\frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi-\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(-\xi+2\eta)$
4	$\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1+\xi)\eta$
5	$\frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta)$
6	$-(1+\eta)\xi$	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
7	$\frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(-\xi+2\eta)$
8	$-\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1-\xi)\eta$

3.11 Yük matrisleri

Yükleme için tekil kuvvet ve alana yayılı yük etkileri düşünülmüş ve program buna göre tasarlanmıştır. Düşünülen yayılı yükün de sadece $\zeta=1$ düzlemine etkidiği durum programda dikkate alınmıştır.

Üç boyutlu eleman ile çalışıldığı için alana yayılı yükün hesabında iki boyutlu eleman kullanılma ihtiyacı gündeme gelmiştir. Üç boyutlu sekiz noktalı eleman için iki boyutlu dört noktalı eleman, üç boyutlu yirmi noktalı eleman için ise iki boyutlu dört noktalı eleman kullanılmıştır. Kullanılan bu elemanların şekil fonksiyonları ve

bu şekil fonksiyonlarının yerel türevleri Bölüm 3.10'da verilmişti. Yük için her iki üç boyutlu elemanda iki boyutlu dört noktalı eleman kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} \{F_q\}^e &= \int_{S^e} [N]^T \{q\}^e |J| d\xi d\eta \Rightarrow \{q\}^e = [N_p] \{p\}^e \Rightarrow \\ \{F_q\}^e &= \int_{S^e} [N]^T [N_p] \{p\}^e |J| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.44)$$

[N] : Yük matrislerinin hesabında kullanılan iki boyutlu elemanın şekil fonksiyonları

[N_p] : Yük için seçilmiş interpolasyon fonksiyonu

{p}^e : Yüklerin düğüm noktalarındaki değerleri

{F_q}^e matrisi açılarak üç boyutlu sekiz ve yirmi noktalı elemanlar için ayrı ayrı yazılır. Bu işlemler sadece z doğrultusunda yapılmış olup diğer doğrultularda da aynı işlemler aynı şekilde yapılabilir.

3.11.1 Üç boyutlu sekiz noktalı elemanın {F_q}^e matrisi

$$\{F_q\}^e = \int_{S^e} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_{p1} & N_{p2} & N_{p3} & N_{p4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_w^1 \\ p_w^2 \\ p_w^3 \\ p_w^4 \end{Bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (3.45)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{qw}^1 \\ F_{qw}^2 \\ F_{qw}^3 \\ F_{qw}^4 \end{Bmatrix} = \int_{S^e} \begin{bmatrix} N_1 N_{p1} & N_1 N_{p2} & N_1 N_{p3} & N_1 N_{p4} \\ N_2 N_{p1} & N_2 N_{p2} & N_2 N_{p3} & N_2 N_{p4} \\ N_3 N_{p1} & N_3 N_{p2} & N_3 N_{p3} & N_3 N_{p4} \\ N_4 N_{p1} & N_4 N_{p2} & N_4 N_{p3} & N_4 N_{p4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_w^1 \\ p_w^2 \\ p_w^3 \\ p_w^4 \end{Bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (3.46)$$

$p_w^1, p_w^2, p_w^3, p_w^4$: z doğrultusundaki yayılı yükün, yük için seçilmiş interpolasyon fonksiyonunun düğüm noktalarında aldığı değerler.

3.11.2 Üç boyutlu yirmi noktalı elemanın $\{F_q\}^e$ matrisi

$$\{F_q\}^e = \int_{S^e} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_{p1} & N_{p2} & N_{p3} & N_{p4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_w^1 \\ p_w^2 \\ p_w^3 \\ p_w^4 \end{Bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (3.47)$$

$p_w^1, p_w^2, p_w^3, p_w^4$: z doğrultusundaki yayılı yükün, yük için seçilmiş interpolasyon fonksiyonun düğüm noktalarında aldığı değerler.

$$\{F_q\}^e = \int_{S^e} \begin{Bmatrix} F_{qw}^1 \\ F_{qw}^2 \\ F_{qw}^3 \\ F_{qw}^4 \\ F_{qw}^5 \\ F_{qw}^6 \\ F_{qw}^7 \\ F_{qw}^8 \end{Bmatrix} = \int_{S^e} \begin{bmatrix} N_1 N_{p1} & N_1 N_{p2} & N_1 N_{p3} & N_1 N_{p4} \\ N_2 N_{p1} & N_2 N_{p2} & N_2 N_{p3} & N_2 N_{p4} \\ N_3 N_{p1} & N_3 N_{p2} & N_3 N_{p3} & N_3 N_{p4} \\ N_4 N_{p1} & N_4 N_{p2} & N_4 N_{p3} & N_4 N_{p4} \\ N_5 N_{p1} & N_5 N_{p2} & N_5 N_{p3} & N_5 N_{p4} \\ N_6 N_{p1} & N_6 N_{p2} & N_6 N_{p3} & N_6 N_{p4} \\ N_7 N_{p1} & N_7 N_{p2} & N_7 N_{p3} & N_7 N_{p4} \\ N_8 N_{p1} & N_8 N_{p2} & N_8 N_{p3} & N_8 N_{p4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_w^1 \\ p_w^2 \\ p_w^3 \\ p_w^4 \end{Bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (3.48)$$

Yukarıdaki integraller Gauss nümerik integrasyon yöntemi ile çözümlenmiştir.

$$\{F_q\}^e = \sum_{i=1}^{IMM} \sum_{j=1}^{IMM} [N(\xi_i, \eta_j)]^T [N_p(\xi_i, \eta_j)] \{q\}^e |J(\xi_i, \eta_j)| H_i H_j \quad (3.49)$$

Tekil yük eleman içinde herhangi bir noktada verilebilir. Bu çalışmada tekil yük, yerel değil de global eksenlerde tanımlanmıştır. Yani tekil yük etkisi, ilgili düğüm nokta numarası ve doğrultusuyla birlikte bilgisayara girerek sistem yük matrisine katılır.

3.12 Elemanların toplam sistemde birleştirilmesi

Bu bölüme kadar her elemanın etkisi ayrı ayrı hesaplanmış oldu. Bu kısımda ise sisteme ait denklemleri kurarak, çözüm bulunacaktır. Bunun için eleman rijitlik matrisleri yardımıyla sistem rijitlik matrisi, eleman eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri

yardımıyla da sistem eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri matrisi bulunacaktır. Mesnet şartları da uygulandıktan sonra denklem takımının çözümüne geçilmiştir. Denklem takımının çözümü için Gauss eleminasyon yöntemi kullanılmıştır. Yer değıştirmeler bulunduktan sonra gerilme değerleri hesaplanmıştır.

4. BİLGİSAYAR PROGRAMI

Daha önceki bölümlerde anlatılan bilgiler ışığında, sayısal sonuçlar elde edilmesi amacıyla bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Programlama dili olarak FORTRAN programlama dili kullanılmıştır. Aksu tarafından genel biçimli kabukların çözümü için geliştirilen program esas alınarak[15], kalın plakların üç boyutlu elastisite çözümüne dayanan iki ayrı sonlu eleman modeli geliştirilerek bir bilgisayar programı oluşturulmuştur. Ayrıca üç boyutlu eleman kullanımı sebebiyle data hazırlamadaki zorluklar düşünülerek, düzgün geometrilere sahip örnekler için, data hazırlayan bir data program da geliştirilmiştir.

4.1 Programın yapısı ve çalışma düzeni

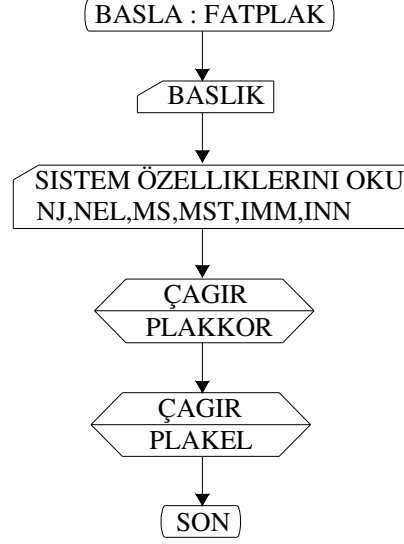
Program, ana program ve bu ana programdan dallanan 10 alt programdan oluşmaktadır. Bu programlar, üç boyutlu sekiz ve yirmi noktalı eleman için daha önceki bölümde bahsedilen farklar gözetilerek hazırlanmıştır. Bu programlar akış sırasına uygun olarak açıklanacak ve önemli görülen programların akış diyagramları verilecektir.

FATPLAK : Akış diyagramı Şekil 4.1'de verilen ana programdır. Program, sistem özellikleri okunduktan sonra PLAKKOR ve PLAKEL adlı alt programlara dallanır.

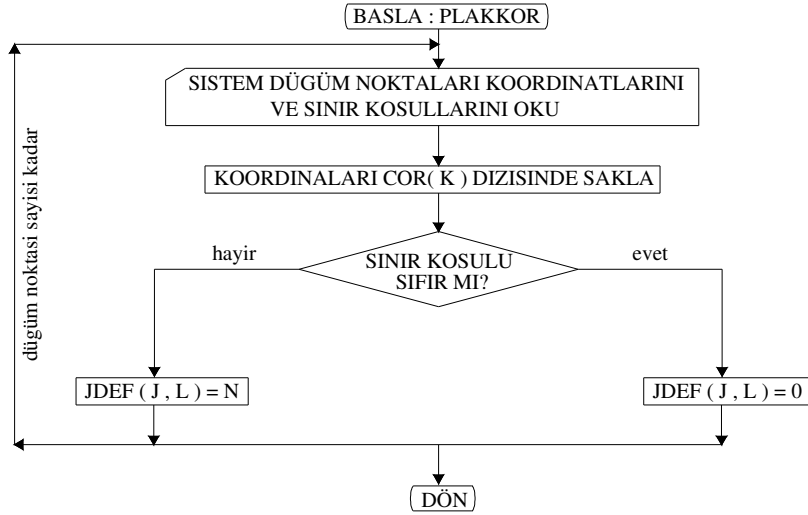
PLAKKOR : Bu alt programda sistem düğüm noktaları koordinatları ve sınır koşulları okunur ve COR(K) ile JDEF (J, L) dizileri oluşturulur. COR(K) dizisi adından da anlaşılacağı gibi düğüm noktaları koordinatlarını bünyesinde barındıran dizidir. JDEF(J, L) dizisinde ise sistem bilinmeyenleri doğrultuları ile tanımlanmıştır. Böylece sınır koşulları sebebiyle sıfır olan yer değiştirmeler baştan bilinmeyen olarak alınmaz. PLAKKOR alt programının akış diyagramı Şekil 4.2'de verilmiştir.

PLAKEL : Şekil 4.3'te akış diyagramı verilen PLAKEL alt programında ilk olarak malzeme özellikleri(E1, P1, E2, P2) okunur. Program iki farklı malzeme özelliği girmeye uygun olarak kodlanmıştır. Bu işlemi her bir elemanın sistemdeki numarası(IM), elemana ait düğüm noktaları numaraları(IN(I)), eleman malzeme cinsi(IMA) ve eleman tipinin(JT) okunması takip eder. Eleman tipi aynı olan

elemanlarda sistem rijitlik matrisi sadece bir tanesi için hesaplanır ve bellekte saklanır. Ayrıca bu programda düzgün yayılı ve tekil yük durumları için eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri hesaplanır ve ilgili düğüm noktalarına aktarılır.

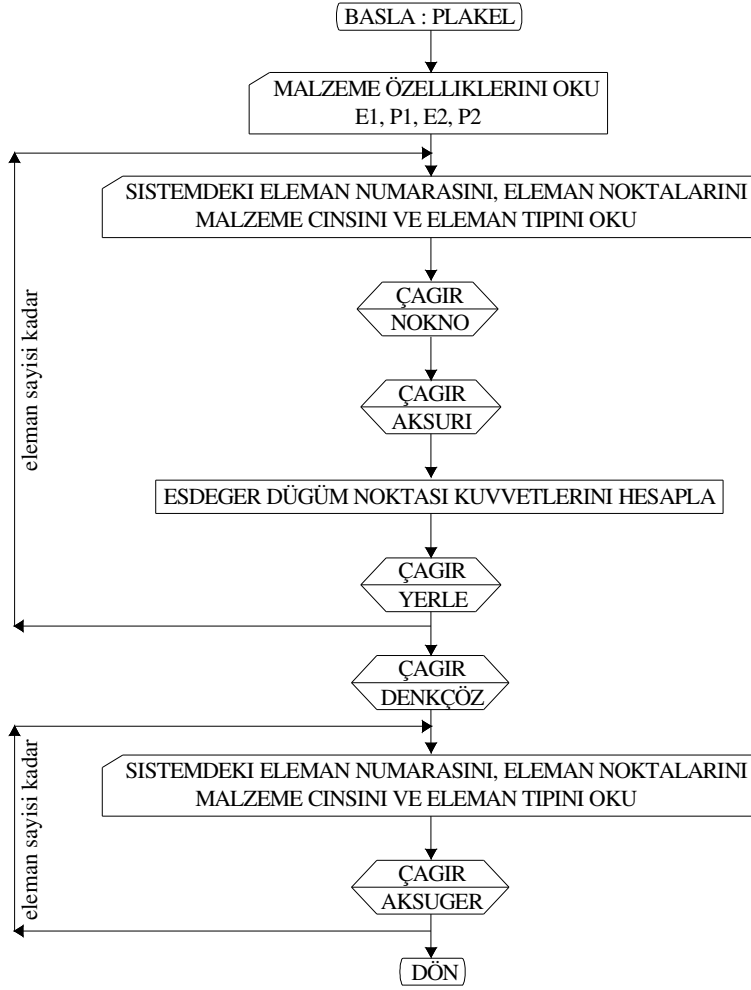


Şekil 4.1 FATPLAK ana programı akış diyagramı



Şekil 4.2 PLAKKOR alt programı akış diyagramı

PLAKEL programı NOKNO, AKSURİ, YERLE, DENKÇÖZ ve AKSUGER gibi alt programlardan oluşmaktadır.



Şekil 4.3 PLAKEL alt programı akış diyagramı

NOKNO : Bu programda eleman düğüm noktası koordinatları, iki boyutlu $XX(I, J)$ dizisine atanır. Ayrıca bilinmeyenlerin tanımlandığı $NCODE(JZ)$ dizisi bu programda oluşturulur.

AKSURI : Akış diyagramı Şekil 4.4'te verilmiş olan bu alt programda eğilme ve kayma etkileri ayrı ayrı incelenerek iki rijitlik matrisi hesaplanır. Bulunan bu iki rijitlik matrisi terimleri toplanarak eleman rijitlik matrisi($ST(I, J)$) elde edilir. Ayrıca eşdeğer düğüm noktaları kuvvetlerinin bulunmasında kullanılan $HN(I, J)$ matrisinin terimleri de bu alt programda hesaplanır.

YERLE : Bu alt programda eleman rijitlik matrisinden sistem rijitlik matrisine geçilir. Sistem rijitlik matrisi olarak iki boyutlu $W(K, L)$ dizisi alınmıştır.

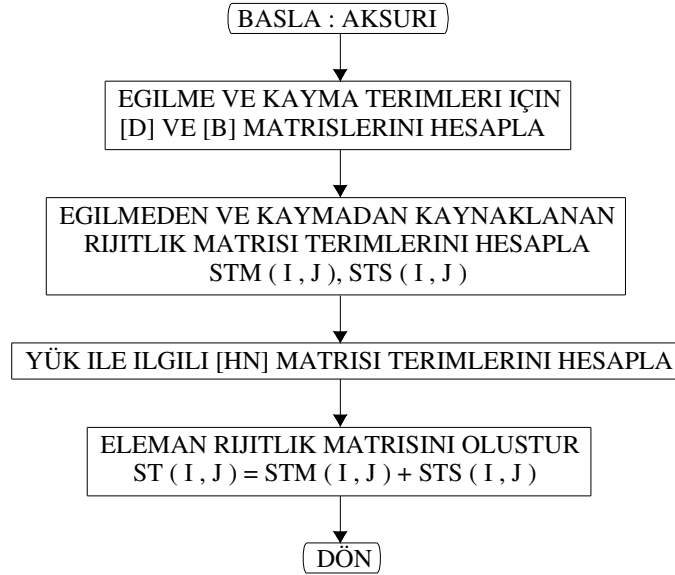
DENKÇÖZ : Kurulan lineer denklem takımının Gauss eliminasyonu yöntemi ile çözümünün yapıldığı alt programdır. Çözüm yapılırken iki boyutlu dizilerden faydalanılmıştır.

AKSUGER : Eleman düğüm noktaları gerilme değerlerinin hesaplandığı alt programdır. Akış diyagramı Şekil 4.5'te verilmiştir. Ayrıca denklem takımının çözümü sonucunda bulunan eleman yer değiştirmeleri, $Q(I)$ dizisine atanır.

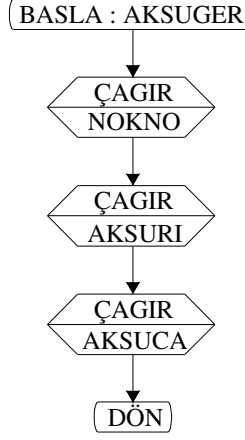
JACO : Üç boyutlu sekiz ve yirmi noktalı elemanların şekil fonksiyonlarının ve bu şekil fonksiyonlarının yerel türevlerinin hesaplandığı alt programdır. Ayrıca Jakobien matrisi terimleri ve bu matrisin determinantı da bu alt programda hesaplanır.

JACOYÜK : Yük matrisinin hesabı yapılırken bir önceki bölümde belirtildiği gibi iki boyutlu elemanlar kullanılmıştır. Bu alt programda iki boyutlu elemanların şekil fonksiyonları ve bu şekil fonksiyonlarının yerel türevleri hesaplanır. Jakobien matrisi terimleri ve bu matrisin determinantı da JACOYÜK alt programında hesaplanır.

AKSUCA : Matris çarpımlarının yapıldığı alt programdır.



Şekil 4.4 AKSURİ alt programı akış diyagramı



Şekil 4.5 AKSUGER alt programı akış diyagramı

4.2 Programın kullanılması

Program giriş bilgileri data adı verilen dosyalarda hazırlanmıştır. Çıkış bilgileri de out adı verilen dosyalara yazdırılmıştır. Program, çalışmaya başladığında giriş bilgilerinin yer aldığı dosyanın ve çıkış bilgilerinin yazdırılacağı dosyanın adını kullanıcıdan ister.

4.2.1 Giriş bilgileri

Problemin çözümü için gereken veriler, FATPLAK ana programı ile PLAKKOR, PLAKEL alt programlarında sisteme girilir.

4.2.1.1 FATPLAK ana programında girilen veriler

İlk olarak 20A4 formatıyla problemin adı olan başlık okutulur. Hemen ardından da aşağıda açıklanacak olan NJ, NEL, MS, MST, IMM, INN ifadeleri 6I3 formatında okutulur.

NJ : Sistemdeki düğüm noktası sayısı

NEL : Sistemdeki eleman sayısı

MS : Elemanın bir düğüm noktasındaki serbestlik derecesi

MST : Elemanın toplam serbestlik derecesi

IMM : Eğilme terimlerinin integrasyonu için alınan nokta sayısı

INN : Kayma terimlerinin integrasyonu için alınan nokta sayısı

4.2.1.2 PLAKKOR alt programında girilen veriler

I5, 3F10.0, 3I1 formatıyla JJ, XE, YY, ZZ, (JEF(J), J=1,MS) verilerinin girişi yapılır. Düğüm noktası koordinatları COR(K) dizisine atanır.

JJ : Sistemdeki düğüm noktaları numaraları

XE : İlgili düğüm noktasının x koordinatı

YY : İlgili düğüm noktasının y koordinatı

ZZ : İlgili düğüm noktasının z koordinatı

JEF(J) : Problemin sınır koşulları. Sınır koşulu sebebiyle sıfır olan yer değiştirmeyi ifade etmek için data dosyasında 1 girilir.

Yukarıda ifade edilen giriş verileri her düğüm noktası için ayrı ayrı, alt alta yazılır.

4.2.1.3 PLAKEL alt programında girilen veriler

İlk olarak 4F10.0 formatıyla E1, P1, E2, P2 gibi malzeme özellikleri okutulur. Burada,

E1 : 1. tip malzemenin elastisite modülü

P1 : 1. tip malzemenin poisson oranı

E2 : 2. tip malzemenin elastisite modülü

P2 : 2. tip malzemenin poisson oranı

dır. İkinci olarak 2I13 formatıyla, IM ve (IN(I), I=1,NJ) okutulur. Hemen ardından IM, IMA, JT, 3I3 formatıyla okutulur. Bu değerler eleman sayısı kadar girilir.

IM: Eleman numarası

IN(I) : Eleman düğüm noktaları numarası

IMA : Malzeme cinsi. Girilen 1 veya 2 numarasına göre 1. veya 2. tip elemana yönlendirilir.

JT : Eleman tipi

I5, 12F5.0 formatıyla IM, (PX(I), PY(I), PZ(I), I=1,4) ifadeleri okutulur. Bunun ardından sistemde bulunan tekil yük, 2I5, F10.0 formatıyla, JJ, II, ZY ifadeleri yardımıyla girilir. Şayet sistemde tekil yük yoksa 1 satır boşluk bırakılır.

PX(I) : Yayılı yükün x doğrultusundaki bileşeni

PY(I) : Yayılı yükün y doğrultusundaki bileşeni

PZ(I) : Yayılı yükün z doğrultusundaki bileşeni

PX(I), PY(I), PZ(I) ifadeleri iki boyutlu elemanın köşe noktalarındaki yayılı yükün değerleridir.

II : Tekil yükün doğrultusu

ZY : Tekil dış kuvvetin şiddeti

Son olarak da gerilme hesabı için 2I13 formatıyla, IM ve (IN(II), II=1,NJ) ve 3I3 formatıyla IM, IMA, JT okutulur.

4.2.2 Çıkış bilgileri

Çıkış bilgileri out adı verilen çıkış dosyasına yazdırılmıştır. Çıkış bilgileri olarak, problemin adı, eleman tanımları, bilinmeyenlerin sistemdeki numaraları, yer değiştirmeler ve bu yer değiştirmelerden hareketle hesaplanan gerilme değerleri(σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}) yazdırılır.

5. SAYISAL UYGULAMALAR

5.1 Giriş

Bölüm 3'te verilen esaslar çerçevesinde geliştirilen bilgisayar programının doğruluğunu ve yakınsaklığını tespit etmek amacı ile bir takım sayısal örnekler çözülmüştür. Bu bölümde daha önce birçok araştırmacı tarafından çözülen genel problemler incelenmiştir. Üniform ve tekil yüke maruz kare plaklar, basit ve ankastre mesnetli durumlarda incelenmiş, sonuçlar tablolarda verilmiştir. Ayrıca Morley verev plağı ile tekil ve üniform yüklü ankastre kiriş bu bölümde incelenen diğer problemlerdir.

Plak örneklerinin çözümünde plak kalınlığının azalmasıyla birlikte kayma kilitlenmesiyle karşılaşmış ve kayma terimleri için integrasyon adımının azaltılması yöntemiyle bu sorun ortadan kaldırılmıştır. İntegrasyon adımının azaltılması $h/a=0.10$ ve bu değerin aşağısında olan plaklarda uygulanmıştır. Plak örneklerinde simetri özelliğinden yararlanılarak çözüm yapılmıştır.

Bazı örnekler için açıklık ortası moment değerleri (M_x, M_y) de hesaplanarak tablolar halinde verilmiştir. Bu değerlerin elde edilirken ilgili gerilmelerin kalınlık boyunca lineer değişim gösterdiği düşünülerek, (5.1) ve (5.2) ifadesinden yararlanılmıştır.

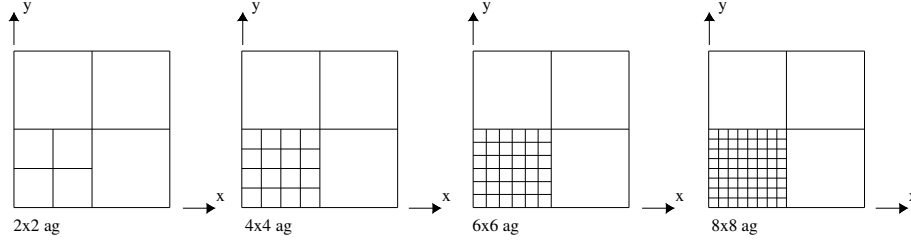
$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_x} z \quad (5.1)$$

$$\sigma_y = \frac{M_y}{I_y} z \quad (5.2)$$

5.2 Düzgün yayılı yük etkisi altında dört kenarı ankastre mesnetli kare plak

Bu örnekte sayısal sonuçlar hesaplanırken kare plağın boyutları $a=b=8$ m olarak alınmış ve değişik plak kalınlıkları için çözümler yapılmıştır. Bu çözümlerde $E = 10^6$ kN/m^2 , $\nu = 0.3$, $q = 1$ kN/m^2 değerleri alınmıştır.

Üç boyutlu sekiz ve yirmi noktali eleman kullanılarak yapılan çözümlerde kalınlık doğrultusunda tek ve çift sıra eleman kullanılmıştır. Kullanılan 2x2, 4x4, 6x6, 8x8'lik sonlu eleman ağlarının planları Şekil 5.1'de görüldüğü gibidir. Sistemin simetrik olması sebebiyle dörtte bir parça düşünülerek hesap yapılmıştır. Bu örnek sekiz ayrı sonlu eleman ağı için ayrı ayrı çözülmüştür.



Şekil 5.1 Sonlu eleman ağları

Değişik plak kalınlıkları için yapılan çözümlerde ulaşılan açıklık ortası çökme ve moment değerleri boyutsuz hale getirilerek Tablo 5.1 ve Tablo 5.2'de kaynaklardan alınan sonuçlarla birlikte verilmiştir.

Tablo 5.1'e bakıldığı zaman göze çarpan ilk durum üç boyutlu yirmi noktali elemanın yakınsamasının üç boyutlu sekiz noktali elemanınkinden daha iyi olduğudur. Bu durum özellikle h/a oranı arttıkça daha belirgin bir hal almaktadır. Bu da zaten beklenen bir durumdur. Örneğin h/a = 0.01 oranı için açıklık ortası çökme değeri, [18] numaralı çalışmadaki değere, üç boyutlu sekiz noktali sonlu eleman kullanılarak oluşturulan 8x8x2'lik sonlu eleman ağıyla -%7.11 hata oranı ile yaklaşmıştır. Bu hata oranı üç boyutlu yirmi noktali sonlu eleman kullanılarak oluşturulan 8x8x2'lik sonlu eleman ağında -%1.34'tür. Bir de h/a = 0.20 oranı için bulunan değerleri inceleyelim. Üç boyutlu sekiz noktali sonlu eleman kullanılarak oluşturulan 8x8x2'lik sonlu eleman ağıyla ulaşılan sonuçtan daha iyi bir sonuca, 2x2x2'lik sonlu eleman ağıyla üç boyutlu yirmi noktali eleman kullanılarak ulaşılması dikkat çekicidir.

Tablo 5.1 incelenirken üzerinde durulması gereken bir diğer nokta h/a oranının artmasıyla birlikte, kalınlık doğrultusunda, iki kat eleman kullanımının daha verimli hale gelmesi durumudur. Sonuçlar incelendiğinde bu durum çok açık bir şekilde görülmektedir. Örneğin h/a=0.20 oranı için yirmi noktali eleman kullanılarak hesaplanan çökme değerleri incelenirse, 64 tane bir kat eleman kullanılarak ulaşılan çökme değerine, 2x2x2'lik eleman ağıyla 8 tane iki kat eleman kullanılarak ulaşıldığı görülür. Bu tarz açıklamalar değişik h/a oranları için çoğaltılabilir.

Tablo 5.1 Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri ($w_{x100D}/(qa^4)$)

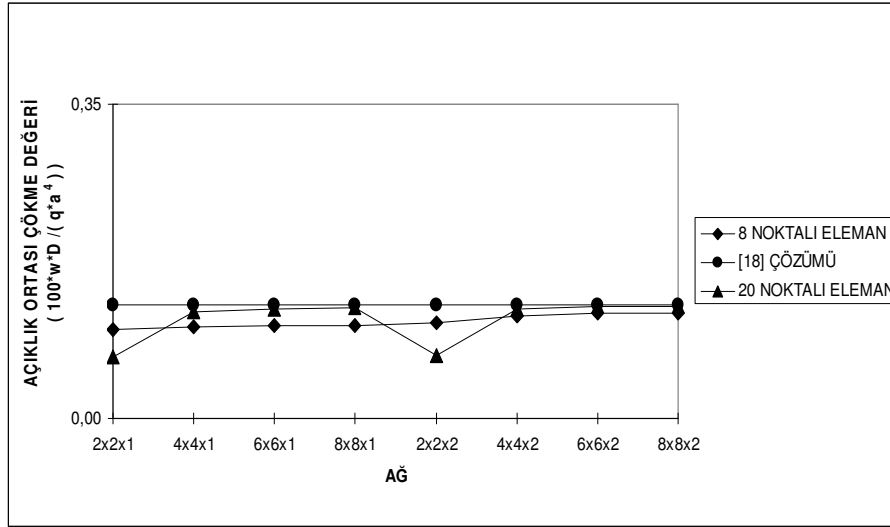
h/a	ÜÇ BOYUTLU SEKİZ NOKTALI ELEMAN								ÜÇ BOYUTLU YİRMİ NOKTALI ELEMAN								[18]	[32]	[25]	[38]	SAP2000 (8x8)
	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2					
0.001	0,0992	0,1022	0,1028	0,103	0,1067	0,1146	0,1164	0,1173	0,0321	0,076	0,1165	0,1223	0,0329	0,0766	0,1178	0,1236	0,1265		0,1234	0,128	0,1279
0.005	0,0993	0,1022	0,1028	0,1031	0,1068	0,1146	0,1164	0,1173	0,0452	0,1164	0,1219	0,1232	0,0458	0,1187	0,1237	0,1246			0,1234		0,1279
0.01	0,0994	0,1024	0,103	0,1032	0,1069	0,1148	0,1166	0,1175	0,0684	0,1193	0,1223	0,1234	0,0694	0,1219	0,1241	0,1248	0,1265		0,1236	0,128	0,1279
0.05	0,1045	0,1075	0,108	0,1082	0,1122	0,1201	0,1218	0,1227	0,117	0,1254	0,1274	0,1285	0,1212	0,1285	0,1298	0,1304		0,1325	0,1298		0,1279
0.10	0,1199	0,1227	0,1231	0,1233	0,1282	0,1357	0,1374	0,1382	0,1355	0,1407	0,1428	0,1438	0,1412	0,1452	0,1465	0,1472	0,1499	0,1496	0,1482	0,152	0,1279
0.15	0,1014	0,1321	0,1403	0,1434	0,1044	0,1415	0,1525	0,157	0,1562	0,1645	0,1666	0,1677	0,1639	0,1714	0,173	0,1738					0,1755
0.20	0,148	0,1718	0,1772	0,1792	0,1514	0,1813	0,189	0,1921	0,1904	0,1971	0,1992	0,2002	0,2015	0,2074	0,2091	0,2099	0,2167	0,2135	0,2171	0,206	0,2125
0.25	0,2013	0,2196	0,2233	0,2247	0,2025	0,2261	0,232	0,2342	0,2319	0,2378	0,2399	0,2408	0,2484	0,2539	0,2557	0,2566				0,252	0,2599
0.30	0,2644	0,2783	0,2808	0,2817	0,2605	0,2829	0,2873	0,289	0,2811	0,2901	0,2925	0,2935	0,3056	0,311	0,3132	0,3142	0,3227				0,318
0.35	0,3402	0,3499	0,3515	0,352	0,3352	0,354	0,3574	0,3587	0,3437	0,3587	0,3612	0,3622	0,3762	0,3863	0,3888	0,3898	0,3951				0,3866

Tablo 5.2 Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plak için açıklık ortası moment değerleri ($M_{x100}/(qa^2)$)

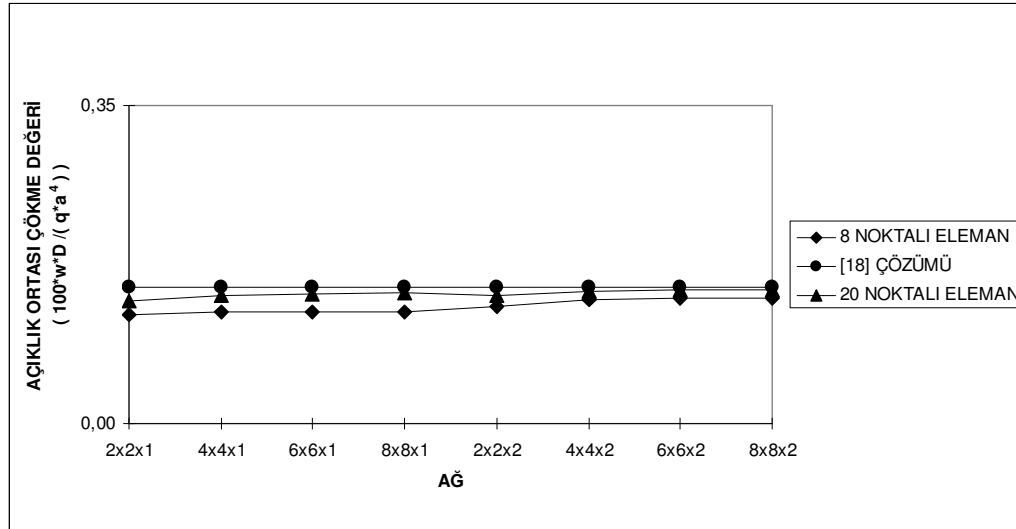
h/a	ÜÇ BOYUTLU SEKİZ NOKTALI ELEMAN								ÜÇ BOYUTLU YİRMİ NOKTALI ELEMAN								[32]	[38]	[17]	SAP2000 (8x8)
	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2				
0.001	2,7777	2,5631	2,5374	2,5284	2,3295	2,523	2,5276	2,5283	1,0832	1,7225	2,2102	2,2598	0,8311	1,7316	2,2244	2,2731		2,27	2,2939	2,3258
0.005	2,7762	2,5626	2,5371	2,5281	2,3284	2,5227	2,5274	2,5282	1,2964	2,2335	2,2608	2,2668	1,0582	2,2541	2,28	2,281			2,3008	2,3258
0.01	2,7715	2,5614	2,5363	2,5281	2,3249	2,5219	2,5271	2,5284	1,6721	2,2527	2,2629	2,2679	1,471	2,2776	2,2826	2,2824		2,27	2,3014	2,3258
0.05	2,6572	2,5564	2,5529	2,5467	2,2395	2,524	2,5467	2,5496	2,3402	2,2857	2,2892	2,2931	2,2921	2,322	2,3166	2,3151	2,33		2,3108	2,3258
0.10	2,503	2,6026	2,598	2,5927	2,1277	2,5796	2,6011	2,6058	2,432	2,3597	2,3609	2,3642	2,4593	2,4214	2,4119	2,4091	2,436	2,36	2,3314	2,3258
0.15	1,5251	2,3171	2,4946	2,5613	1,2886	2,2755	2,4952	2,5785	2,4066	2,4608	2,4644	2,4668	2,5719	2,5633	2,5555	2,5521			2,3524	2,3628
0.20	1,8316	2,5078	2,6283	2,6717	1,5904	2,5029	2,6621	2,7193	2,593	2,6004	2,5994	2,6005	2,8278	2,7564	2,7454	2,7403	2,609	2,56	2,3702	2,3628
0.25	2,0389	2,6459	2,7399	2,7727	1,8245	2,6798	2,8107	2,8565	2,785	2,7651	2,761	2,7612	3,1084	2,9902	2,9773	2,971		2,67		2,3628
0.30	2,201	2,7674	2,8482	2,8761	2,0394	2,8481	2,9642	3,0044	3,0006	2,9578	2,9505	2,9498	3,4194	3,2659	3,2506	3,2434				2,3628
0.35	2,3465	2,8863	2,9604	2,9857	2,2626	3,028	3,1344	3,1713	3,2499	3,1847	3,1731	3,1712	3,7682	3,5884	3,5689	3,5608				2,3628

Tablo 5.2’de ise açıklık ortası moment değerleri boyutsuz olarak verilmiştir. Kullanılan iki ayrı üç boyutlu eleman karşılaştırıldığında genel olarak yirmi noktalı elemanın yaklaşımının çok daha iyi olduğu sonucuna varılabilir.

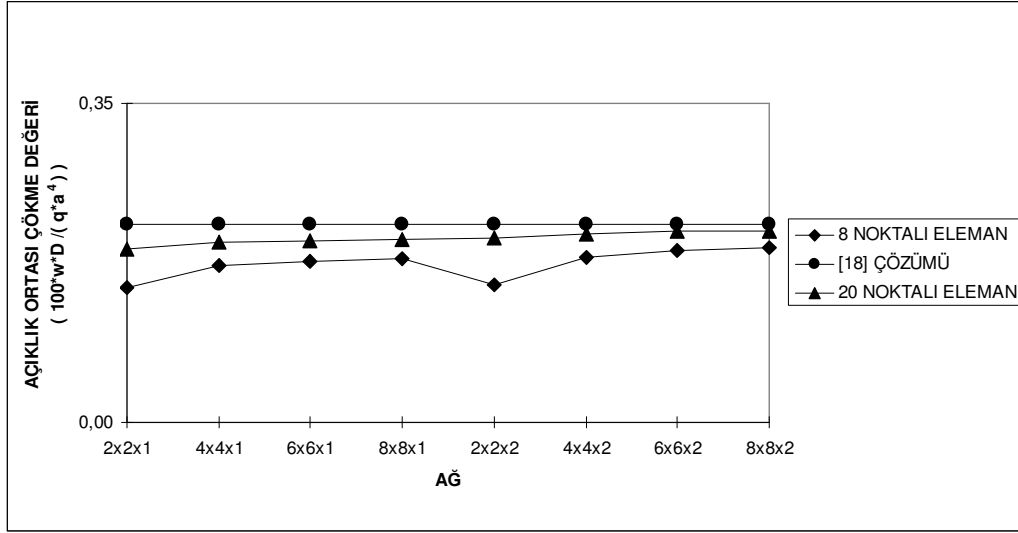
Tablo 5.1 ve Tablo 5.2’deki sonuçların daha iyi anlaşılabilmesi açısından bazı h/a oranları için grafikler oluşturulmuştur.



Şekil 5.2 Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plakta h/a= 0.01 oranı için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağlarına bağlı değişimi

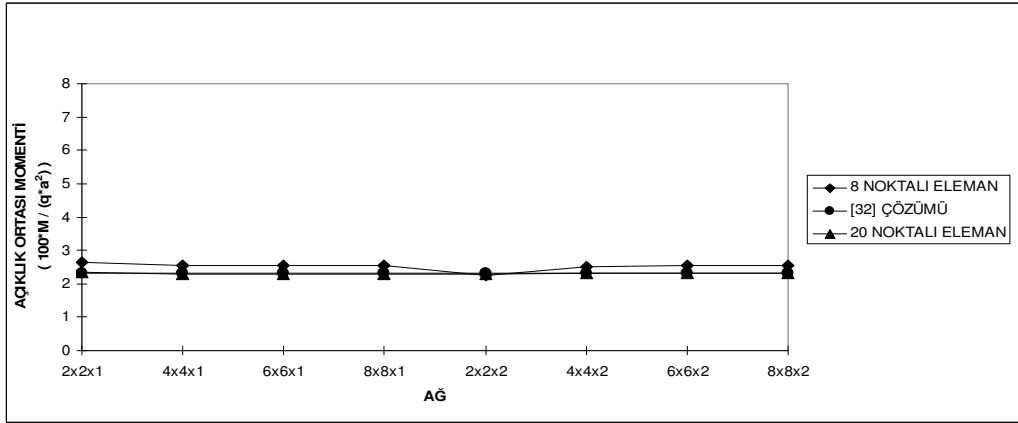


Şekil 5.3 Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plakta h/a= 0.10 oranı için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağlarına bağlı değişimi

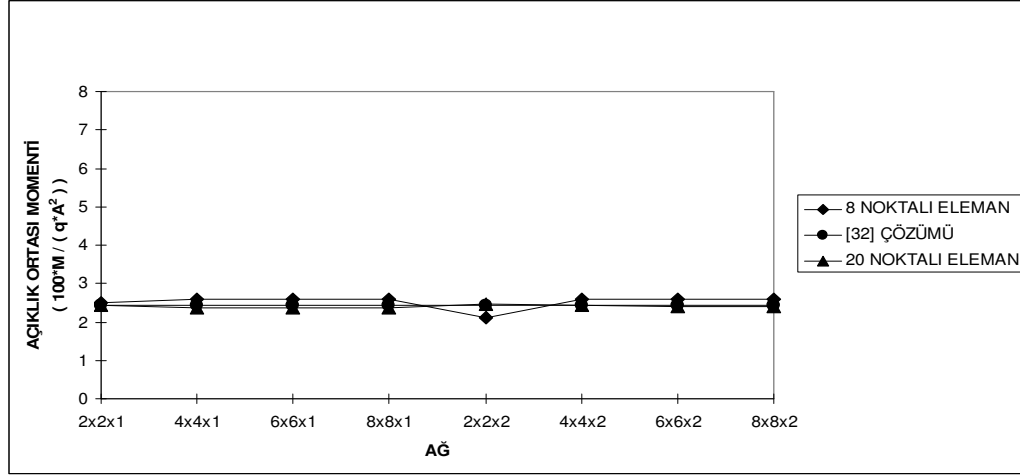


Şekil 5.4 Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plakta $h/a= 0.20$ oranı için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağlarına bağlı değişimi

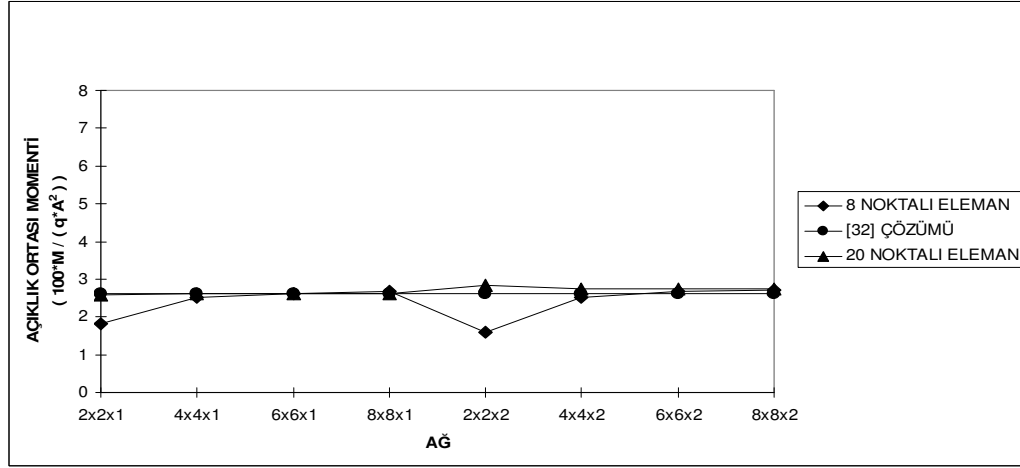
Yukarıdaki grafikler incelendiğinde daha önce de ifade edildiği gibi üç boyutlu yirmi noktalı elemanın yaklaşımının üç boyutlu sekiz noktalı elemanın yaklaşımından çok daha iyi olduğu görülecektir. Bu tespit açıklık ortası moment değerlerinin yakınsamasını gösteren grafikler için de yapılabilir. Bu grafiklerde kullanılan çökme ve moment değerlerinin boyutsuz olduğuna dikkat edilmelidir.



Şekil 5.5 Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plakta $h/a= 0.05$ oranı için açıklık ortası moment değerlerinin sonlu eleman ağlarına bağlı değişimi



Şekil 5.6 Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plakta $h/a= 0.10$ oranı için açıklık ortası moment değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi



Şekil 5.7 Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı ankastre mesnetli kare plakta $h/a= 0.20$ oranı için açıklık ortası moment değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi

5.3 Düzgün yayılı yük etkisi altında dört kenarı basit mesnetli kare plak

Dört kenarından basit mesnetli $a=b=8$ m olan kare plağın çözümü yapılmıştır. Çözümde, $E = 10^6$ kN/m², $\nu = 0.3$, $q = 1$ kN/m² değeri alınmıştır. Farklı h/a değerleri için çözümler yapılmış ve sonuçlar kaynaklardan alınan sonuçlarla birlikte tablolar halinde gösterilmiştir. Tablolardaki değerlerin boyutsuz olduğuna dikkat edilmelidir.

Üç boyutlu sekiz ve yirmi noktalı eleman kullanılarak yapılan çözümlerde kalınlık doğrultusunda tek ve çift sıra eleman kullanılmıştır. Sistem simetrik olduğundan dörtte bir parça düşünülerek hesaplamalar yapılmıştır. Tek ve çift sıra olmak üzere

toplam 8 ayrı sonlu eleman kullanılmıştır. Kullanılan sonlu eleman ağları Şekil 5.1’de verildiği gibidir.

Çeşitli h/a oranlarına ait çökme değerlerinin boyutsuz olarak verildiği Tablo 5.3 incelendiği zaman üç boyutlu yirmi noktali elemanın yaklaşımının üç boyutlu sekiz noktali elemanınkinden daha iyi olduğu sonucuna varılabilir. Örneğin $h/a = 0.01$ oranı için her iki elemanın [25] çalışmasına göre yaklaşımını inceleyelim. Üç boyutlu yirmi noktali eleman kullanılarak oluşturulan $8 \times 8 \times 2$ ’lik sonlu eleman ağıyla yapılan çözümün hata oranı %0.74’tür. Aynı sonlu eleman ağıyla üç boyutlu sekiz noktali eleman için bu oran -%4.75 olmaktadır. Birçok h/a oranı için bu açıklamalar çoğaltılabilir.

Tablo 5.3’te göze çarpan bir diğer husus da, ankastre mesnetli plak için de bahsettiğimiz, kalınlık arttıkça kalınlık doğrultusunda çift kat eleman kullanmanın avantaj haline gelmesi durumudur. Örneğin $h/a = 0.20$ oranı için üç boyutlu sekiz noktali eleman kullanılarak yapılan çözümde ulaşılan sayısal sonuçların [18] çalışmasına göre yaklaşımını inceleyelim. Hata oranı 64 tane sonlu eleman kullanılarak oluşturulan $8 \times 8 \times 1$ ’lik eleman ağıyla yapılan çözümde -%11.15 iken 32 tane eleman kullanılarak oluşturulan $4 \times 4 \times 2$ ’lik eleman ağıyla yapılan çözümde -%5.18’dir.

Tablo 5.4’te ise plak açıklık ortası moment değerleri boyutsuz olarak verilmiştir. Bu tablodaki değerler incelendiğinde de yirmi noktali elemanın yaklaşımının daha iyi olduğu sonucuna varılacaktır. Örneğin $h/a = 0.10$ oranı için moment değerlerini inceleyelim. Üç boyutlu yirmi noktali elemanla oluşturulan $8 \times 8 \times 2$ ’lik sonlu eleman ağıyla hesaplanan moment değeri, [32] çalışmasındaki değer ile karşılaştırılırsa, hata oranının %0.12 olduğu görülür. Aynı işlem üç boyutlu sekiz noktali eleman için de yapılırsa hata oranı %9.36 olduğu görülür. Ayrıca kalınlık arttıkça, kalınlık doğrultusunda çift kat eleman kullanmanın avantaj olmasının, moment değerleri için de geçerli olduğu Tablo 5.4’ten anlaşılabilir.

Tablo 5.3 ve Tablo 5.4’te bulunan değerler daha sade bir şekilde verilmesi amacıyla grafiklerle gösterilmişlerdir. Bu grafiksel gösterim bazı h/a oranları için aşağıda verilmiştir.

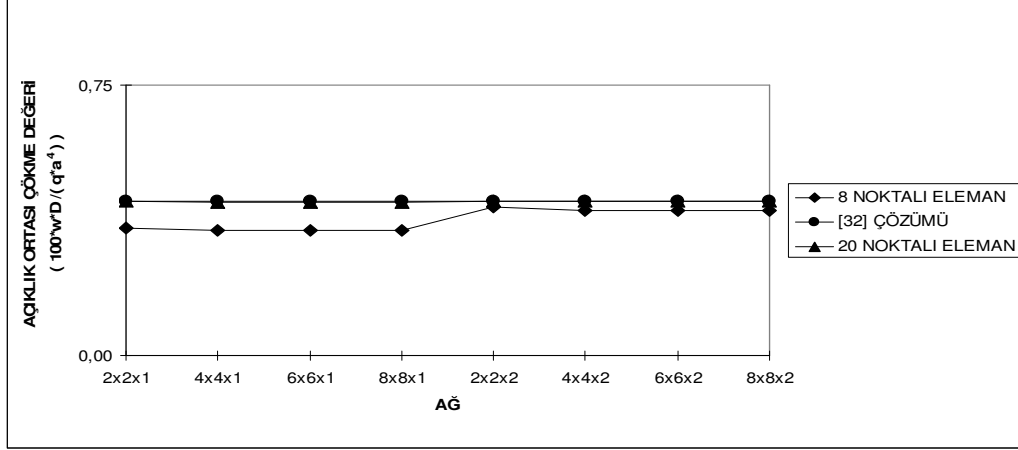
Şekil 5.8’den başlayıp Şekil 5.13’e kadar olan grafiklerde farklı h/a oranları için yapılan çözümler daha önceki araştırmacılar tarafından bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.3 Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarlı basit mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri ($w_{x100D}/(qa^4)$)

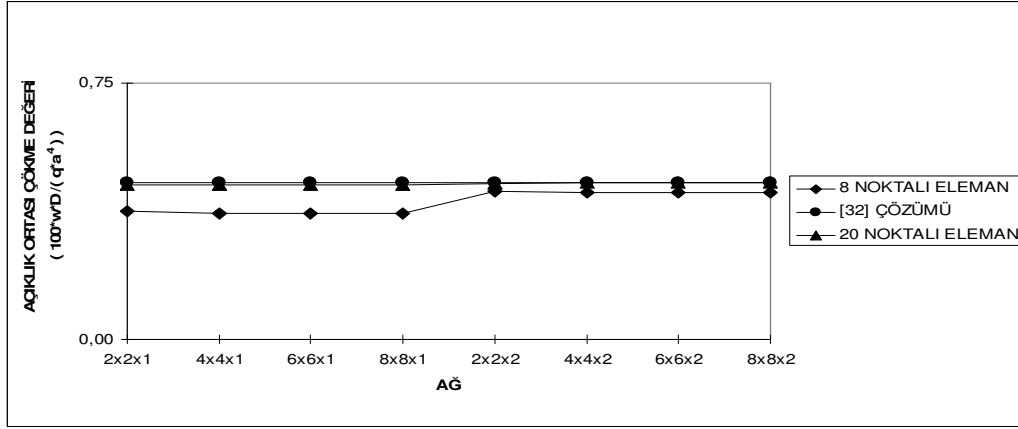
h/a	ÜÇ BOYUTLU SEKİZ NOKTALI ELEMAN								ÜÇ BOYUTLU YİRMİ NOKTALI ELEMAN								[18]	[32]	[25]	[38]	SAP2000 (8x8)
	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2					
0.001	0,348	0,3358	0,3335	0,3327	0,4053	0,3901	0,387	0,386	0,3753	0,4074	0,4074	0,407	0,3787	0,4075	0,4074	0,407	0,4062		0,4054	0,417	0,4062
0.005	0,348	0,3359	0,3337	0,333	0,4054	0,3902	0,3873	0,3864	0,4032	0,4093	0,4081	0,4079	0,4039	0,4093	0,4082	0,4079			0,4057		0,4062
0.01	0,3482	0,3362	0,3342	0,3338	0,4057	0,3906	0,388	0,3874	0,4131	0,4103	0,4096	0,4096	0,4133	0,4104	0,4097	0,4097	0,4064		0,4067	0,418	0,4062
0.05	0,3547	0,3459	0,346	0,3462	0,4127	0,402	0,4024	0,4027	0,4275	0,426	0,4261	0,4262	0,4287	0,4273	0,4278	0,428		0,4283	0,4258		0,4064
0.10	0,3748	0,3696	0,3697	0,3698	0,4341	0,4288	0,4295	0,4297	0,4529	0,4535	0,4536	0,4537	0,4569	0,4581	0,4583	0,4584	0,4273	0,4588	0,4596	0,458	0,4061
0.15	0,2805	0,3597	0,3813	0,3898	0,3052	0,4064	0,4354	0,4474	0,4776	0,4861	0,4873	0,4876	0,4853	0,4946	0,4957	0,496					0,4818
0.20	0,3553	0,4148	0,4295	0,4359	0,3874	0,4652	0,4863	0,4945	0,5202	0,527	0,5277	0,5279	0,5323	0,5398	0,5404	0,5404	0,4906	0,5415	0,5511	0,538	0,5321
0.25	0,4275	0,474	0,4847	0,4901	0,4615	0,5241	0,5384	0,5455	0,568	0,5732	0,5737	0,5738	0,5847	0,591	0,5912	0,5911				0,592	0,5927
0.30	0,5038	0,544	0,5501	0,5532	0,5316	0,5841	0,5965	0,5996	0,6208	0,6248	0,625	0,6251	0,6448	0,6508	0,6506	0,6504	0,5956				0,6626
0.35	0,5939	0,6233	0,6331	0,6331	0,6086	0,6478	0,6577	0,6626	0,6787	0,6815	0,6816	0,6815	0,7151	0,7207	0,7202	0,72	0,6641				0,7421

Tablo 5.4 Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarlı basit mesnetli kare plak için açıklık ortası moment değerleri ($M_{x100}/(qa^2)$)

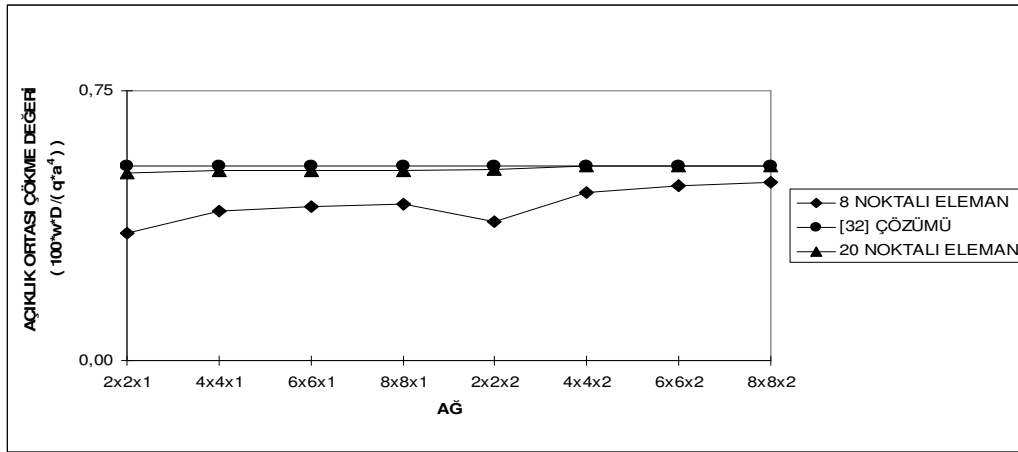
h/a	ÜÇ BOYUTLU SEKİZ NOKTALI ELEMAN								ÜÇ BOYUTLU YİRMİ NOKTALI ELEMAN								[32]	[38]	[25]	[17]	SAP2000 (8x8)
	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2					
0.001	6,5724	5,598	5,4113	5,346	6,6287	5,6596	5,4697	5,4033	4,7742	4,9158	4,849	4,8229	4,7263	4,9117	4,8469	4,8222		5,11	4,779	4,7951	4,8006
0.005	6,5723	5,5975	5,41	5,3437	6,6289	5,6589	5,4687	5,4015	5,2447	4,928	4,8461	4,818	5,2037	4,9223	4,8456	4,819			4,781	4,7953	4,8006
0.01	6,5719	5,5959	5,4063	5,3385	6,6284	5,6575	5,4656	5,3974	5,4028	4,9229	4,8408	4,8214	5,374	4,9197	4,8433	4,8246		5,11	4,788	4,7953	4,8006
0.05	6,5591	5,5632	5,4061	5,3903	6,6147	5,6311	5,479	5,4658	5,4237	4,9474	4,9353	4,9342	5,42	4,9706	4,9577	4,9556	4,97		4,915	4,7953	4,8006
0.10	6,522	5,5652	5,5145	5,5123	6,5736	5,6492	5,6083	5,6086	5,4003	5,0863	5,0816	5,0808	5,4415	5,1481	5,1395	5,1365	5,13	5,21	5,079	4,7953	4,8006
0.15	3,8638	5,0414	5,343	5,4601	5,4601	5,0451	5,4019	5,5421	5,218	5,213	5,22	5,2219	5,3622	5,3245	5,3238	5,3224			5,223	4,7951	5,0878
0.20	4,4967	5,3497	5,5489	5,6242	4,3541	5,3937	5,6357	5,7275	5,3743	5,351	5,3544	5,3553	5,581	5,5215	5,5147	5,5115	5,49	5,46	5,35	4,7952	5,2030
0.25	4,8873	5,5506	5,6941	5,7475	4,7806	5,6134	5,7933	5,86	5,5148	5,4741	5,4759	5,4764	5,7936	5,7145	5,7035	5,699		5,58	5,46		5,3159
0.30	5,1432	5,6972	5,8076	5,8482	5,0723	5,7681	5,9108	5,9628	5,6549	5,5873	5,587	5,587	5,9994	5,9031	5,889	5,8833					5,4200
0.35	5,3224	5,8114	5,9012	5,9339	5,2971	5,8918	6,0094	6,0517	5,8108	5,7026	5,6974	5,6962	6,205	6,0909	6,0744	6,0679					5,5122



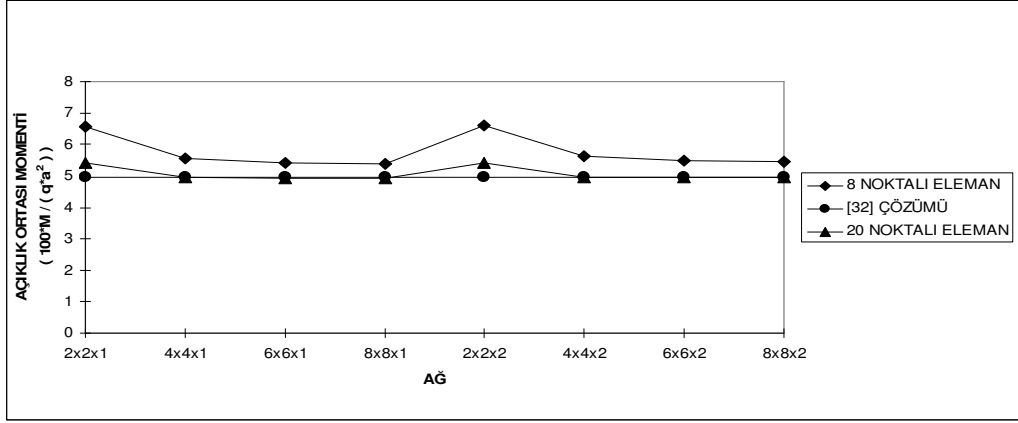
Şekil 5.8 Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plakta $h/a=0.05$ oranı için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi



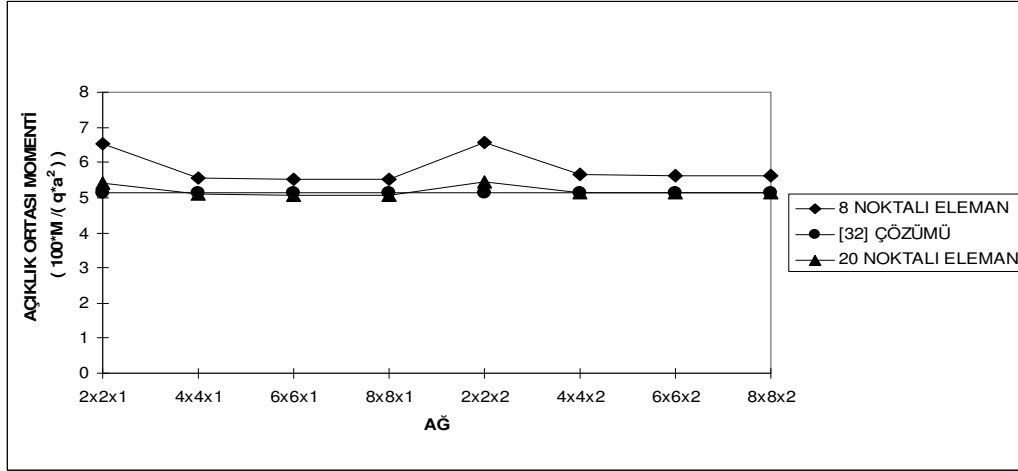
Şekil 5.9 Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plakta $h/a=0.10$ oranı için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi



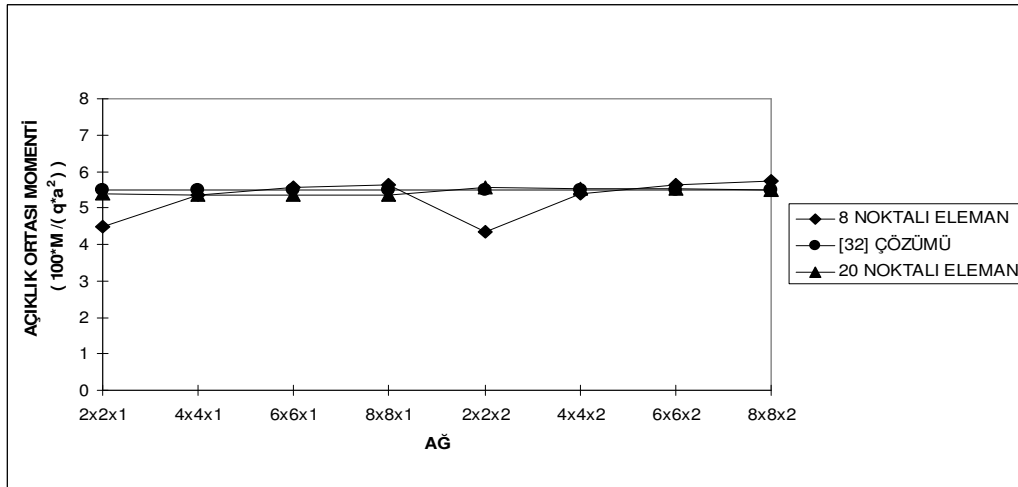
Şekil 5.10 Düzgün yayılı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plakta $h/a=0.20$ oranı için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi



Şekil 5.11 Düzgün yaylı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plakta $h/a= 0.05$ oranı için açıklık ortası moment değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi



Şekil 5.12 Düzgün yaylı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plakta $h/a= 0.10$ oranı için açıklık ortası moment değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi



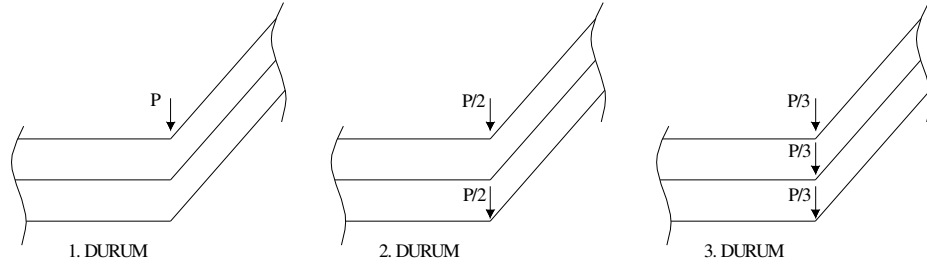
Şekil 5.13 Düzgün yaylı yük etkisi altındaki dört kenarı basit mesnetli kare plakta $h/a= 0.20$ oranı için açıklık ortası moment değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi

5.4 Tekil kuvvet etkisi altında dört kenarı basit ve ankastre mesnetli kare plak

Aynı plak örneği dört kenarından basit mesnetli ve ankastre mesnetli olarak tekil yük etkisi altında çözülmüştür. Çözümde, $a = b = 8 \text{ m}$, $E = 10^6 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.3$, $P = 1 \text{ kN}$ olarak alınmıştır. h/a oranı 0.35'e kadar çözümler yapılmış ve sonuçlar tablolar halinde gösterilmiştir. Tekil yükün plağın orta noktasına etkidiği düşünülmüştür.

Üç boyutlu sekiz ve yirmi noktalı eleman kullanılarak yapılan çözümlerde kalınlık doğrultusunda tek ve çift sıra eleman kullanılmıştır. Daha önceki örneklerde olduğu gibi, sistemin simetrik olması özelliğinden faydalanılmış ve dörtte bir parça düşünülerek hesap yapılmıştır. Çözümde toplam sekiz tane birbirinden farklı sonlu eleman ağı kullanılmıştır. Kullanılan sonlu eleman ağlarının planları Şekil 5.1'de gösterildiği gibidir.

İlk olarak tekil yükün, plak ortasına denk gelen tek bir düğüm noktasında etkidiği düşünülerek çözüm yapılmıştır. Bu çözüme ait plak ortası çökme değerleri, ankastre ve basit mesnetli durumlar için Tablo 5.5 ve Tablo 5.6'da verilmiştir. Bu çökme değerleri incelendiğinde ve [25] çalışmasında bulunan değerler ile karşılaştırıldığında, h/a oranının arttığı ve plağın kalın plağa yaklaştığı durumlarda, yaklaşımın bozulduğu görülmektedir. Bu sebeple tekil yükün birkaç düğüm noktasına paylaşılması fikri geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Tekil kuvvetin hangi düğüm noktalarına nasıl paylaştırıldığı Şekil 5.14'te gösterildiği gibidir.



Şekil 5.14 Tekil kuvvetin farklı yükleme durumları

Şekil 5.14'te verilen durumlar için, basit ve ankastre mesnetli plaklarda ayrı ayrı çözümler yapılmış ve bu çözümler tablolar halinde gösterilmiştir. Yakınsaklığı en iyi olan sonuçlara, tekil kuvvetin 3 düğüm noktasına eşit olarak paylaştırıldığı 3. durumda ulaşıldığı tablolardan da anlaşılmaktadır.

Tablo 5.5 Tekil kuvvet etkisi altındaki dört kenar ankastre mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri – 1. DURUM($wxEh^3/(Pa^2)$)

h/a	ÜÇ BOYUTLU SEKİZ NOKTALI ELEMAN								ÜÇ BOYUTLU YİRMİ NOKTALI ELEMAN								[25]
	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	
0.001	0,0433	0,0482	0,0492	0,0495	0,0466	0,0545	0,0561	0,0568	0,0207	0,0397	0,0574	0,0597	0,0213	0,0399	0,0578	0,06	0,0586
0.005	0,0434	0,0483	0,0492	0,0496	0,0467	0,0546	0,0562	0,0568	0,0264	0,0577	0,0599	0,0604	0,0268	0,0583	0,0603	0,0607	0,0586
0.01	0,0435	0,0485	0,0495	0,0498	0,0468	0,0548	0,0564	0,0571	0,0364	0,059	0,0602	0,0606	0,0367	0,0597	0,0607	0,0609	0,0588
0.05	0,0478	0,0544	0,0565	0,0578	0,051	0,0604	0,063	0,0647	0,0591	0,0641	0,066	0,0675	0,0603	0,0652	0,0672	0,0689	0,0652
0.10	0,0617	0,0755	0,0847	0,0942	0,0638	0,0808	0,0906	0,0999	0,0733	0,0856	0,0949	0,103	0,0759	0,0901	0,1016	0,1115	0,0849
0.15	0,0583	0,0907	0,1088	0,1218	0,0587	0,0966	0,1202	0,1388	0,0986	0,1325	0,1567	0,1768	0,1055	0,1469	0,1782	0,2047	0,1173
0.20	0,0938	0,1429	0,1737	0,196	0,0953	0,156	0,1994	0,2341	0,1481	0,2143	0,2632	0,3032	0,1636	0,2476	0,3119	0,3671	0,1623
0.25	0,1411	0,2164	0,2645	0,2987	0,1457	0,2441	0,3165	0,3729	0,2224	0,3363	0,4203	0,4876	0,253	0,3996	0,5132	0,6108	0,2197
0.30	0,2035	0,3138	0,3831	0,4316	0,2147	0,3662	0,4758	0,5588	0,326	0,504	0,6335	0,7347	0,3794	0,6111	0,7922	0,9467	
0.35	0,2835	0,4367	0,5305	0,5957	0,3063	0,5261	0,6802	0,7943	0,4624	0,7217	0,9069	1,0481	0,5472	0,8894	1,1578	1,3835	

Tablo 5.6 Tekil kuvvet etkisi altındaki dört kenar basit mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri – 1. DURUM($wxEh^3/(Pa^2)$)

h/a	ÜÇ BOYUTLU SEKİZ NOKTALI ELEMAN								ÜÇ BOYUTLU YİRMİ NOKTALI ELEMAN								[25]
	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	
0.001	0,1097	0,1043	0,1037	0,1036	0,1271	0,1208	0,1202	0,12	0,1052	0,124	0,1259	0,1264	0,1068	0,1241	0,1259	0,1264	0,1244
0.005	0,1098	0,1044	0,1038	0,1037	0,1272	0,1209	0,1203	0,1202	0,1202	0,1266	0,1269	0,127	0,1205	0,1266	0,1269	0,127	0,1245
0.01	0,1099	0,1046	0,1041	0,1041	0,1273	0,1211	0,1206	0,1206	0,1255	0,1272	0,1274	0,1275	0,1256	0,1273	0,1275	0,1276	0,1249
0.05	0,1146	0,1116	0,1127	0,1138	0,1321	0,1282	0,1293	0,1305	0,1328	0,1344	0,1358	0,137	0,1331	0,1351	0,1368	0,1384	0,1343
0.10	0,1298	0,1347	0,1429	0,1521	0,1465	0,151	0,1594	0,1681	0,1478	0,1584	0,1672	0,1751	0,1496	0,1629	0,1742	0,1839	0,1575
0.15	0,107	0,1457	0,1659	0,1797	0,1134	0,1603	0,1868	0,2065	0,1741	0,207	0,231	0,2509	0,1802	0,2217	0,2529	0,2793	0,1928
0.20	0,1498	0,2014	0,2333	0,256	0,159	0,2237	0,2687	0,304	0,2254	0,2902	0,3387	0,3787	0,2401	0,324	0,3881	0,4432	0,2403
0.25	0,202	0,2775	0,3262	0,3607	0,2152	0,3142	0,3875	0,4442	0,3011	0,413	0,4966	0,5638	0,3308	0,477	0,5902	0,6877	0,2998
0.30	0,2681	0,3772	0,4466	0,4952	0,2879	0,4377	0,5477	0,6309	0,4055	0,5807	0,7099	0,8111	0,4577	0,6887	0,8694	1,0238	
0.35	0,3512	0,5021	0,5958	0,661	0,382	0,5984	0,7527	0,8668	0,5423	0,7981	0,9829	1,124	0,6258	0,9667	1,2347	1,4602	

Tablo 5.7 Tekil kuvvet etkisi altındaki dört kenar ankastre mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri – 2. DURUM($wxEh^3/(Pa^2)$)

h/a	ÜÇ BOYUTLU SEKİZ NOKTALI ELEMAN								ÜÇ BOYUTLU YİRMİ NOKTALI ELEMAN								[25]
	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	
0.001	0,0433	0,0482	0,0492	0,0495	0,0466	0,0545	0,0561	0,0568	0,0207	0,0397	0,0574	0,0597	0,0213	0,0399	0,0578	0,06	0,0586
0.005	0,0434	0,0483	0,0492	0,0496	0,0467	0,0546	0,0562	0,0568	0,0264	0,0577	0,0599	0,0604	0,0268	0,0583	0,0603	0,0607	0,0586
0.01	0,0435	0,0485	0,0495	0,0498	0,0468	0,0548	0,0564	0,0571	0,0364	0,059	0,0602	0,0606	0,0367	0,0597	0,0607	0,0609	0,0588
0.05	0,0477	0,0541	0,0559	0,0569	0,051	0,0604	0,0627	0,0639	0,0591	0,0638	0,0649	0,0654	0,0602	0,0646	0,0655	0,0663	0,0652
0.10	0,0607	0,0716	0,0759	0,0786	0,0638	0,0771	0,0829	0,0873	0,0717	0,0765	0,0796	0,0833	0,0731	0,0799	0,0855	0,0907	0,0849
0.15	0,0538	0,0766	0,0848	0,0891	0,0543	0,082	0,0951	0,1046	0,0866	0,0991	0,1098	0,1202	0,0907	0,1117	0,1284	0,143	0,1173
0.20	0,0808	0,1058	0,1157	0,1216	0,082	0,1173	0,1387	0,1562	0,1108	0,1379	0,1625	0,1859	0,1242	0,1668	0,2023	0,2321	0,1623
0.25	0,1117	0,1413	0,1542	0,1626	0,1154	0,1654	0,2009	0,2304	0,1459	0,196	0,2428	0,2846	0,1725	0,2499	0,312	0,3633	0,2197
0.30	0,1476	0,1836	0,2007	0,2122	0,1568	0,2297	0,2849	0,3297	0,1929	0,2778	0,3545	0,4199	0,2391	0,3646	0,4618	0,5411	
0.35	0,1889	0,2331	0,2554	0,2706	0,2079	0,3126	0,3926	0,4555	0,2538	0,3862	0,5011	0,5941	0,3276	0,5145	0,6555	0,77	

Tablo 5.8 Tekil kuvvet etkisi altındaki dört kenar basit mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri – 2. DURUM($wxEh^3/(Pa^2)$)

h/a	ÜÇ BOYUTLU SEKİZ NOKTALI ELEMAN								ÜÇ BOYUTLU YİRMİ NOKTALI ELEMAN								[25]
	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	
0.001	0,1097	0,1043	0,1037	0,1036	0,1271	0,1208	0,1202	0,12	0,1052	0,124	0,1259	0,1264	0,1068	0,1241	0,1259	0,1264	0,1244
0.005	0,1098	0,1044	0,1038	0,1037	0,1272	0,1209	0,1203	0,1202	0,1202	0,1266	0,1269	0,127	0,1205	0,1266	0,1269	0,127	0,1245
0.01	0,0723	0,1046	0,1041	0,1041	0,1273	0,1211	0,1206	0,1206	0,1255	0,1272	0,1274	0,1275	0,1256	0,1273	0,1275	0,1276	0,1249
0.05	0,1145	0,1113	0,1122	0,1128	0,1321	0,1282	0,1292	0,1298	0,1328	0,1342	0,1348	0,135	0,1331	0,1346	0,1352	0,1358	0,1343
0.10	0,1288	0,1308	0,1341	0,1365	0,1451	0,1476	0,1516	0,1555	0,1465	0,1498	0,152	0,1554	0,1471	0,1527	0,158	0,1631	0,1575
0.15	0,1025	0,1316	0,1418	0,147	0,1092	0,1457	0,1616	0,1723	0,1627	0,1735	0,184	0,1942	0,1654	0,1864	0,203	0,2176	0,1928
0.20	0,1367	0,1643	0,1752	0,1816	0,1455	0,1849	0,2078	0,226	0,1894	0,2137	0,238	0,2612	0,2005	0,2432	0,2784	0,3082	0,2403
0.25	0,1724	0,2022	0,2156	0,2242	0,1845	0,2353	0,2716	0,3015	0,2243	0,2724	0,3188	0,3605	0,2499	0,3269	0,3888	0,4399	0,2998
0.30	0,2117	0,2463	0,2637	0,2753	0,2292	0,3007	0,3563	0,4012	0,2717	0,3538	0,4303	0,4955	0,3169	0,4417	0,5385	0,6175	
0.35	0,2556	0,2974	0,3196	0,3349	0,2823	0,3839	0,4639	0,5269	0,3324	0,4617	0,5759	0,6689	0,4047	0,591	0,7313	0,8458	

Tablo 5.9 Tekil kuvvet etkisi altındaki dört kenar ankastre mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri – 3. DURUM($wxEh^3/(Pa^2)$)

h/a	ÜÇ BOYUTLU SEKİZ NOKTALI ELEMAN								ÜÇ BOYUTLU YİRMİ NOKTALI ELEMAN								[25]
	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	
0.001					0,0466	0,0545	0,0561	0,0531	0,0207	0,0397	0,0574	0,0597	0,0213	0,0399	0,0578	0,0600	0,0586
0.005					0,0467	0,0546	0,0562	0,0568	0,0264	0,0577	0,0599	0,0604	0,0268	0,0583	0,0603	0,0607	0,0586
0.01					0,0468	0,0548	0,0564	0,0571	0,0364	0,059	0,0602	0,0606	0,0367	0,0597	0,0607	0,0609	0,0588
0.05					0,0511	0,0606	0,063	0,0642	0,0593	0,0641	0,0652	0,0657	0,0605	0,065	0,0659	0,0663	0,0652
0.10					0,0644	0,0782	0,0829	0,0856	0,0725	0,0778	0,0797	0,0815	0,0742	0,0791	0,0822	0,0852	0,0849
0.15					0,0553	0,0809	0,0907	0,097	0,0885	0,0985	0,1051	0,1117	0,0907	0,1041	0,1139	0,1225	0,1173
0.20					0,0826	0,111	0,1249	0,1348	0,115	0,1313	0,1471	0,1612	0,1182	0,1448	0,1654	0,1837	0,1623
0.25					0,1133	0,1496	0,1701	0,1854	0,1471	0,1788	0,2073	0,232	0,1569	0,2028	0,2399	0,2729	0,2197
0.30					0,1488	0,1978	0,2275	0,25	0,186	0,2419	0,2879	0,3259	0,2071	0,2806	0,3408	0,394	
0.35					0,1922	0,2569	0,2981	0,329	0,2384	0,3228	0,3903	0,4445	0,2706	0,3807	0,4713	0,5509	

Tablo 5.10 Tekil kuvvet etkisi altındaki dört kenar basit mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri - 3. DURUM($wxEh^3/(Pa^2)$)

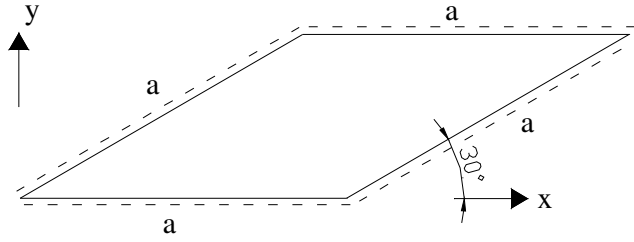
h/a	ÜÇ BOYUTLU SEKİZ NOKTALI ELEMAN								ÜÇ BOYUTLU YİRMİ NOKTALI ELEMAN								[25]
	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	
0.001					0,1271	0,1208	0,1202	0,12	0,1052	0,124	0,1259	0,1264	0,1068	0,1241	0,1259	0,1264	0,1244
0.005					0,1272	0,1209	0,1203	0,1202	0,1202	0,1266	0,1269	0,127	0,1205	0,1266	0,1269	0,127	0,1245
0.01					0,1273	0,1211	0,1206	0,1206	0,1255	0,1273	0,1274	0,1275	0,1256	0,1273	0,1275	0,1276	0,1249
0.05					0,1322	0,1285	0,1295	0,1302	0,133	0,1345	0,1351	0,1354	0,1334	0,135	0,1357	0,136	0,1343
0.10					0,1473	0,149	0,1523	0,1543	0,1474	0,1513	0,1527	0,1538	0,1486	0,1525	0,1549	0,1578	0,1575
0.15					0,1108	0,146	0,1576	0,1651	0,165	0,1746	0,1797	0,1861	0,167	0,1793	0,189	0,1975	0,1928
0.20					0,1482	0,1792	0,1948	0,2053	0,1941	0,2079	0,2233	0,2372	0,1965	0,2218	0,2423	0,2604	0,2403
0.25					0,1858	0,2205	0,2419	0,2576	0,2288	0,2563	0,2845	0,3091	0,2354	0,2811	0,3179	0,3506	0,2998
0.30					0,2255	0,2704	0,3005	0,3232	0,2687	0,3199	0,3655	0,4035	0,2864	0,3594	0,4193	0,4722	
0.35					0,2684	0,3303	0,3717	0,4027	0,319	0,4003	0,4679	0,5217	0,3502	0,4596	0,5495	0,6287	

Tablo 5.9 ve Tablo 5.10 incelendiğinde diğer örneklerde olduğu gibi bu örnekte de üç boyutlu yirmi noktalı eleman kullanılarak yapılan çözümlerin daha iyi yakınsadığı sonucuna varılmıştır. Örneğin Tablo 5.9'daki $h/a=0.20$ oranı için, [25] çalışmasındaki değerler baz alınarak hesaplanan hata oranları, $6 \times 6 \times 2$ 'lik sonlu eleman ağı kullanılarak yapılan çözümlerde, üç boyutlu sekiz noktalı eleman için $\%23.04$ iken üç boyutlu yirmi noktalı elemanda $\%1.91$ 'dir.

Tablo 5.9 ve Tablo 5.10 incelendiğinde üç boyutlu yirmi noktalı eleman kullanılarak oluşturulan $6 \times 6 \times 2$ 'lik sonlu eleman ağıyla yapılan çözümlerde [25] çalışmasında ulaşılan çökme değerlerine yakın değerler bulunduğu gözlenmiştir.

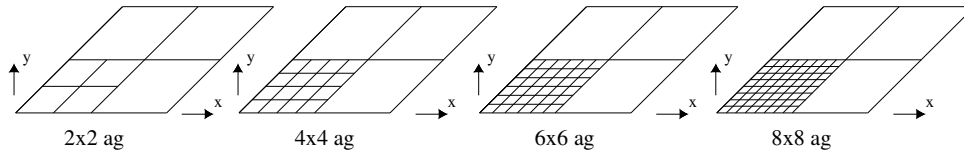
5.5 Morley verev plağı

Şekil 5.15'te geometrisi verilen verev plak Morley verev plağı olarak adlandırılmaktadır. Dört kenarı basit mesnetli olarak alınan plak düzgün yayılı yük etkisi altında çözülmüştür. Bu plağın çözümünde $E = 10.92 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.3$, $a = 8 \text{ m}$, $h = 0.008 \text{ m}$, $q = 1 \text{ kN/m}^2$ olarak alınmıştır.



Şekil 5.15 Morley verev plağı

Üç boyutlu sekiz ve yirmi noktalı eleman kullanılarak yapılan çözümlerde, diğer örneklerde de olduğu gibi, kalınlık doğrultusunda tek ve çift sıra eleman kullanılmıştır. Sistemin simetrik olması özelliğinden faydalanılmış ve dörtte bir parça düşünülerek hesap yapılmıştır. Çözümde toplam sekiz tane birbirinden farklı sonlu eleman ağı kullanılmıştır. Kullanılan sonlu eleman ağlarının planları Şekil 5.16'da gösterildiği gibidir.



Şekil 5.16 Morley verev plağı çözümünde kullanılan sonlu eleman ağları

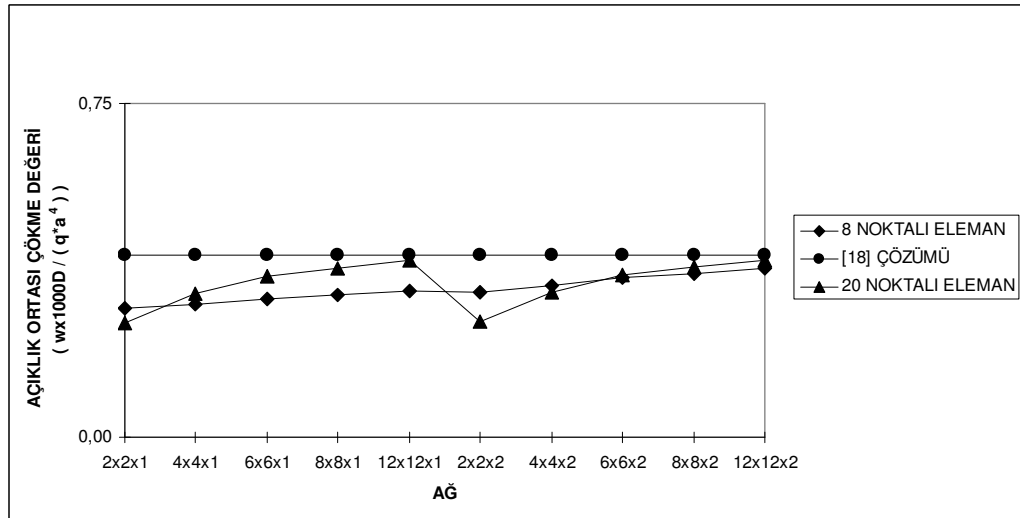
Morley verev plağı farklı sonlu eleman ağları için üç boyutlu sekiz ve yirmi noktalı elemanlarla çözülmüş ve plağın açıklık ortasındaki çökme değerleri Tablo 5.11’de boyutsuz olarak verilmiş ve ayrıca Şekil 5.17’de de grafiksel olarak ifade edilmiştir. Bu örneğin çözümünde, diğer örneklerin çözümünde kullanılan sonlu eleman ağlarına ek olarak 12x12x1 ve 12x12x2’lik sonlu eleman ağları da kullanılmıştır. Tablo 5.11’de, 12x12x2’lik sonlu eleman ağı kullanılarak bulunan sonuçlar incelendiğinde, üç boyutlu sekiz noktalı elemanın -%7.03, üç boyutlu yirmi noktalı elemanın da -%2.43 hata oranlarına sahip olduğu görülmektedir. Tablolarda geçen D simgesi (5.3) ifadesiyle bulunur.

Tablo 5.11’deki üç boyutlu sekiz noktalı eleman kullanılarak yapılan çözümler incelendiğinde, kalınlık doğrultusunda iki sıra eleman kullanımının tek sıra eleman kullanımından daha avantajlı sonuçlar verdiği görülmektedir. Örneğin 12x12x1’lik sonlu eleman ağıyla yapılan 144 elemanın kullanıldığı çözümün hata oranı -%19.53 iken 4x4x2’lik sonlu eleman ağıyla yapılan 32 elemanın kullanıldığı çözümde hata oranı -%16.23 olmaktadır.

Tablo 5.11 Morley verev plağı açıklık ortası çökme değerleri ($w \times 1000D / (qa^4)$)

Gel. S. Eleman	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	12x12x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	12x12x2	[18]
8 NE	0,289	0,2997	0,3119	0,3192	0,3283	0,3258	0,3418	0,3580	0,3675	0,3793	0,408
20 NE	0,258	0,3224	0,3620	0,3800	0,3967	0,2594	0,3247	0,3639	0,3817	0,3981	

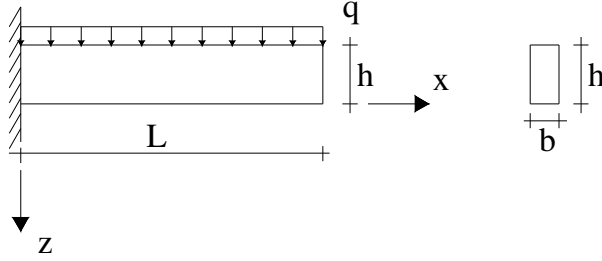
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5.3)$$



Şekil 5.17 Morley verev plağının açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağına bağlı değişimi

5.6 Düzgün yayılı yük etkisi altında ankastre mesnetli kiriş

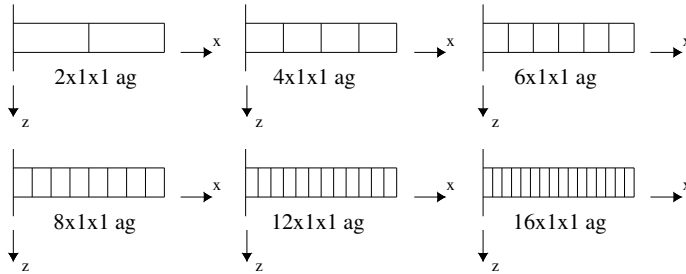
Geliştirilen sonlu elemanların genel olduğunun gösterilmesi amacı ile düzgün yayılı yük etkisi altında bir ankastre kiriş örneği çözülmüştür(Şekil 5.18).



Şekil 5.18 Düzgün yayılı yük etkisi altında ankastre mesnetli kiriş

Çözümde $E = 1500 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.25$, $q = 1 \text{ kN/m}^2$, $L = 10 \text{ m}$, $h = 2 \text{ m}$ ve $b = 1 \text{ m}$ olarak alınmıştır.

Üç boyutlu sekiz ve yirmi noktalı eleman kullanılarak yapılan çözümlerde kalınlık doğrultusunda tek sıra eleman kullanılmıştır. Çözümler 2x1x1, 4x1x1, 6x1x1, 8x1x1, 12x1x1 ve 16x1x1 olmak üzere toplam altı tane birbirinden farklı sonlu eleman ağları ile yapılmıştır. Kullanılan sonlu eleman ağlarının yandan görüşleri Şekil 5.19’da gösterildiği gibidir.



Şekil 5.19 Ankastre mesnetli kirişin çözümünde kullanılan sonlu eleman ağları

Çözüm sonunda bulunan maksimum çökme ve mesnet momenti değerleri Tablo 5.12 ve Tablo 5.13’te verilmiştir.

Tablo 5.12 Düzgün yayılı yük etkisi altında ankastre mesnetli kirişin maksimum çökme değerleri (w(m))

Geliştirilen Sonlu Eleman	2x1x1	4x1x1	6x1x1	8x1x1	12x1x1	16x1x1	Kiriş Çözümü
8 NE	0,3863	0,7635	0,9501	1,0416	1,1203	1,1513	1,25
20 NE	1,1932	1,2518	1,2668	1,2720	1,2756	1,2800	

Tablo 5.13 Düzgün yayılı yük etkisi altında ankastre mesnetli kirişin mesnet momenti değerleri (M(kNm/m))

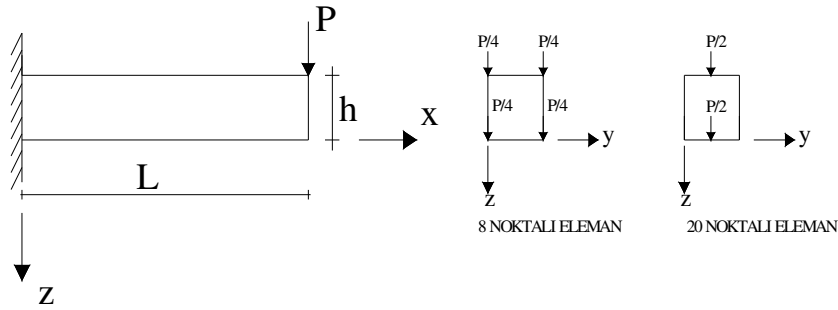
Geliştirilen Sonlu Eleman	2x1x1	4x1x1	6x1x1	8x1x1	12x1x1	16x1x1	Kiriş Çözümü
8 NE	10.3577	26.7157	36.1597	41.2570	46.0725	48.1611	50
20 NE	45.2624	51.1655	51.8620	51.8618	51.7001	51.7909	

Üç boyutlu yirmi noktalı eleman kullanılarak oluşturulan 4x1x1'lik eleman ağı ile bile kiriş çözümüne epeyce yakın sonuçlar elde edilmiştir. Bu yakınlık üç boyutlu sekiz noktalı eleman kullanılarak oluşturulan 16x1x1'lik eleman ağıyla dahi sağlanamamıştır.

Tablo 5.12'den üç boyutlu yirmi noktalı elemanla elde edilen sonuçların üç boyutlu sekiz noktalı elemanla elde edilen sonuçlara göre çok daha iyi yakınsadığı gözlenmektedir.

5.7 Tekil yük etkisi altında ankastre mesnetli kiriş

Üç boyutlu sekiz ve yirmi noktalı elemanlar kullanılarak tekil yük etkisi altında bir ankastre mesnetli kiriş örneği çözülmüştür(Şekil 5.20).



Şekil 5.20 Tekil yük etkisi altında ankastre mesnetli kiriş ve yüklem durumları

Daha önce çözülen tekil yük etkisindeki plak örneğinde tekil yükün birden fazla düğüm noktasına paylaştırılmasının çözümde avantaj sağladığı sonucuna varılmıştı. Bu sonuçtan hareketle tekil yük etkisindeki ankastre kiriş örneği de çözülmürken tekil yük, Şekil 5.20'de gösterildiği gibi paylaştırılmıştır.

Bu örneğin çözümünde, $E = 1500 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.25$, $P = 300 \text{ kN}$, $L = 10 \text{ m}$, $h = 2 \text{ m}$ ve $b = 1 \text{ m}$ olarak alınmıştır.

Üç boyutlu sekiz ve yirmi noktalı eleman kullanılarak yapılan çözümlerde kalınlık doğrultusunda tek sıra eleman kullanılmıştır. Çözümler 2x1x1, 4x1x1, 6x1x1, 8x1x1,

12x1x1 ve 16x1x1 olmak üzere toplam altı tane birbirinden farklı sonlu eleman ağları ile yapılmıştır. Kullanılan sonlu eleman ağlarının yandan görünüşleri Şekil 5.19’da gösterildiği gibidir.

Üç boyutlu sekiz ve yirmi düğüm noktalı elemanlar kullanılarak hesaplamalar yapılmış ve maksimum çökme ile mesnet kesiti maksimum gerilme(σ_x) değerleri Tablo 5.14 ve Tablo 5.15’te verilmiştir.

Tablo 5.14 Tekil yük etkisi altında ankastre mesnetli kirişin maksimum çökme değerleri (w(m))

Geliştirilen Sonlu Eleman	2x1x1	4x1x1	6x1x1	8x1x1	12x1x1	16x1x1	Kiriş Çözümü
8 NE	21.8167	55.5031	74.8821	82.4003	88.8332	91.3584	100
20 NE	95.9711	99.8659	100.8629	101.1459	101.3944	101.6197	

Tablo 5.15 Tekil yük etkisi altında ankastre mesnetli kirişin mesnet kesiti gerilme değerleri (σ_x (kN/m²))

Geliştirilen Sonlu Eleman	2x1x1	4x1x1	6x1x1	8x1x1	12x1x1	16x1x1	Kiriş Çözümü
8 NE	850.058	2649.899	3524.938	3946.9207	4321.571	4471.971	4500
20 NE	4473.536	4702.096	4713.004	4690.755	4668.953	4673.2479	

Tablo 5.14 incelendiğinde üç boyutlu yirmi noktalı eleman kullanılarak oluşturulan 4x1x1’lik sonlu eleman ağıyla yapılan çözümde bulunan maksimum çökme değerinin kiriş çözümüyle bulunan maksimum çökme değerine epeyce yaklaştığı dikkat çekmektedir. Üç boyutlu sekiz noktalı eleman kullanılarak 16x16x1’lik sonlu eleman ağıyla dahi bu yakınsaklık sağlanamamıştır.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, kalın plakların çözümü için üç boyutlu, sekiz ve yirmi noktalı iki ayrı eleman modeli geliştirilmiştir. Geliştirilen sonlu elemanların genel olduğunun gösterilmesi amacı ile kalın plak örnekleri yanında ankastre mesnetli kiriş örnekleri de çözülmüştür. Sayısal uygulamaların çözümü için Bölüm 4'te esasları verilen bilgisayar programları geliştirilmiştir. Bu tez çalışması neticesinde aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

1. Beklenildiği gibi, üç boyutlu yirmi noktalı elemanın yaklaşımının, üç boyutlu sekiz noktalı elemana göre çok daha iyi olduğu sonucuna varılmıştır. Serbestlik derecesinin artması bu durumun sebebi olarak görülebilir.
2. Özellikle plak kalınlığının azalmasıyla birlikte kayma kilitlenmesi görülmüştür. $h/a=0.10$ ve bu değer altındaki oranlarda, kayma terimlerinin hesabında kullanılan integrasyon adımının bir değer azaltılmasının kayma kilitlenmesinin etkisini ortadan kaldırdığı tespit edilmiştir.
3. Dış yük olarak tekil kuvvetin düşünüldüğü sayısal uygulamalarda, tekil yükün tek bir düğüm noktasına değil de ilgili düşey kesitteki düğüm noktalarına paylaştırılmasının, özellikle plak kalınlığı arttıkça, sonuçların yakınsaklığını olumlu yönde etkilediği tespit edilmiştir.
4. Üç boyutlu sekiz ve yirmi noktalı elemanlar kullanılarak çözülen ankastre mesnetli kiriş probleminde de yakınsaklığı çok iyi olan sonuçlar elde edilmiştir. Üç boyutlu yirmi noktalı eleman kullanılarak yapılan çözümlerde az sayıda elemanla çok iyi sonuçlara ulaşıldığı tespit edilmiştir.
5. Plak kalınlığının artmasıyla birlikte plak kalınlığı doğrultusunda çift kat eleman kullanılmasının daha avantajlı olduğu tespit edilmiştir. Eleman sayıları aynı olan tek ve çift sıralı eleman ağları karşılaştırıldığında, çift sıralı eleman ağı kullanılarak yapılan çözümün yakınsaklığının diğerine göre çok daha iyi olduğu görülmüştür.
6. Bu çalışmada kalın plakların çözümü için geliştirilen 24 ve 60 serbestlik dereceli üç boyutlu izoparametrik elemanların, ince plak uygulamaları ile ankastre mesnetli kiriş ve verev plak gibi genel problemlerde de mühendislik analizleri bakımından yeterli yakınsaklıkla sonuçlar verdiği tespit edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **Desai, C. S. and Abel, J. F.**, 1972. Introduction to the finite element method; a numerical method for engineering analysis, Van Nostrand Reinhold Company, New York.
- [2] **Kardestuncer, H.**, 1987. Finite element handbook, McGraw-Hill, New York.
- [3] **Aydoğan, M., Omurtag, M. H.**, 2005. The finite element method : lecture notes, İ.T.Ü., İstanbul.
- [4] **Zienkiewicz, O. C.**, 1971. The finite element method in engineering science, McGraw-Hill, London.
- [5] **Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.**, 2000. The finite element method-Volume 2, McGraw-Hill, London.
- [6] **Orakdöğen, E.**, 2005. Yapı sistemlerinin hesabında matris yöntemleri : ders notu, İ.T.Ü., İstanbul.
- [7] **Çakıroğlu, A., Özden, E., Özmen, G.**, 1974. Yapı sistemlerinin hesabı için matris metodları ve elektronik hesap makinası programları-Cilt 2, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul.
- [8] **İnan, M.**, 1996. Cisimlerin mukavemeti, İ.T.Ü. Vakfı Yayınları, İstanbul.
- [9] **Tameroğlu S.**, 1991. Elastisite teorisi:çözüm yöntemleri ve bazı matematiksel teknikler, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul.
- [10] **Timoshenko, S.**, 1964. Plak ve kabuklar teorisi, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul.
- [11] **Berktaş İ.**, 1992. Plak teorisi ve uygulamaları : küçük sehimli ince plaklar, Yıldız Üniversitesi, İstanbul.
- [12] **Kumbasar, N., Pala, S., Aydoğan, M., Altan, M., Yardımcı, N., Yıldırım, H.**. Bilgisayar programları ile sayısal hesap, TMMOB İnşaat Mühendisleri Odası İstanbul Şubesi, İstanbul.
- [13] **Keskinel, F., Karadoğan, H. F.**, 1992. Açıklamalı örneklerle FORTRAN IV ve FORTRAN 77 algoritma kurma ve program geliştirme, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [14] **Altan, M.**, 1981. Kalın silindirik kabukların çözümü için üç boyutlu bir sonlu eleman ve uygulamaları, Doktora Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

- [15] **Aksu, T.**, 1993. Genel biçimli kabuklar için bir sonlu eleman formülasyonu, Doktora Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [16] **Türe, Ü.**, 2002. Mindlin plakların sonlu eleman metodu ile çözümlenmesi, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [17] **Özkul, T. A., Türe, Ü.**, 2004. The transition from thin plates to moderately thick plates by using finite element analysis and the shear locking problem, *Thin-Walled Structures*, **42**, 1405-1430.
- [18] **Soh, A., Cen, S., Long, Y., Long, Z.**, 2001. A new twelve DOF quadrilateral element for analysis of thick and thin plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **20**, 299-326.
- [19] **Kara, N.**, 1997. Genel biçimli kabuklar için 3 boyutlu bir sonlu eleman, Doktora Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [20] **Özaydın, T.**, 2001. Kalın sayılabilecek plaklar için bir sonlu eleman formülasyonu, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [21] **Bleounar, L., Guenfoud, M.**, 2005. A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending, *Thin-Walled Structures*, **43**, 47-63.
- [22] **Spilker, R. L., Munir, N., I.**, 1980. A serendipity cubic-displacement hybrid-stress element for thin and moderately thick plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **15**, 1261-1278.
- [23] **Pala, S.**, 1988. Gerilme ve sınır yer değiştirme fonksiyonları ile sonlu eleman rijitlik matrisi tayini, *İ.T.Ü. Dergisi*, **46**, 24-34.
- [24] **Ibrahimbegovic, A. and Wilson, E. L.**, 1991. Thick shell and solid finite elements with independent rotation fields, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31**, 1393-1414.
- [25] **Yuan, F. and Miller, R. E.**, 1988. A rectangular finite element for moderately thick flat plates, *Computers and Structures*, **30, No.6**, 1375-1387.
- [26] **Levinson, M. and Cooke, D. W.**, 1984. Thick rectangular plates-I : The generalized navier solution, *International Journal of Mechanical Sciences*, **25**, 199-205.
- [27] **Özakça, M., Hinton, E., Rao, N. V. R.**, 1992. Comparison of three-dimensional solid elements in the analysis of plates, *Computers and Structures*, **42, No.6**, 953-968.
- [28] **Salerno, V. L., Goldberg, M. A.**, 1960. Effect of shear deformations on the bending of rectangular plates, *Journal of Applied Mechanics*, **27**, 54-58.
- [29] **Wang, C. M., Lim, G. T., Reddy, J. N., Lee, K. H.**, 2001. Relationships between bending solutions of reissner and mindlin plate theories, *Engineering structures*, **23**, 838-849.

- [30] **Kim, S., Choi, C.**, 1992. Improvement of quadratic finite element for mindlin plate bending, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **34**, 197-208.
- [31] **Liu, I., Kerh, T. and Lin, C.**, 1995. A conforming quadrilateral plate bending element with shear deformations, *Computers and Structures*, **56, No.1**, 93-100.
- [32] **Srinivas, S., Rao, A. K.**, 1973. Flexure of thick rectangular plates. *Journal of Applied Mechanics*, 298-299.
- [33] **Bhashyam, G. R. and Gallagher, R. H.**, 1984. An approach to the inclusion of transverse shear deformation in finite element plate bending analysis, *Computers and Structures*, **19, No.1-2**, 35-40.
- [34] **Crisfield, M. A.**, 1984. A quadratic mindlin element using shear constraints, *Computers and Structures*, **18, No.5**, 833-852.
- [35] **Reissner, E.**, 1945. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **12**, 69-77.
- [36] **Mindlin, R. D.**, 1951. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **18**, 31-38.
- [37] **Lee, K. H., Lim, G. T., Wang, C. M.**, 2002. Thick levy plates re-visited, *International Journal of Solids and Structures*, **39**, 127-144.
- [38] **Kant, T. and Owen, D. R. J. and Zienkiewicz, O. C.**, 1982. A refined higher-order C^0 plate bending element, *Computers and Structures*, **15, No.2**, 177-183.
- [39] **Lim, G. T., Reddy, J. N.**, 2003. On canonical bending relationships for plates, *International Journal of Solids and Structures*, **40**, 3039-3067.
- [40] **Hrabok, M. M. and Hrudey, T. M.**, 1984. A review and catalogue of plate ending finite elements, *Computers and Structures*, **19, No.3**, 479-495.

ÖZGEÇMİŞ

Fatih Gören 1981 yılında İstanbul'da doğmuş, lise öğrenimini, 1999 yılında, Çanakkale Fen Lisesi'nde tamamlamıştır.

1999 yılında öğrenime başladığı Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden 2004 yılında mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Bölümü Yapı Mühendisliği Programı'nda yüksek lisans öğrenimine başlamıştır. 2005 yılında, TÜBİTAK'tan yurt içi yüksek lisans bursu almaya hak kazanmıştır.