



24 SERBESTLİK DERECELİ KABUK SONLU ELAMAN FORMULASYONU

Sedat Kömürcü¹, Murat Yılmaz²

^{1,2}İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul

ABSTRACT

A flat 4 node shell element superposing plate bending and membrane components is developed which takes 6 degrees of freedom (DOF) per node. Normally, shell elements possess 5 degrees of freedom, three translational and two rotational, each being in-plane, per node. A sixth DOF is associated with shell normal rotation via imposing an arbitrary out-of-plane-rotation originated in-plane displacement field. Such rotations are called drilling degree and are required in practical applications where shells are connected with other types of elements which possess such DOFs. Various numerical examples are presented in order to compare the performance of the proposed element with trusted commercial finite-element software.

ÖZET

Bu çalışmada plak eğilme davranışı ile membran eleman davranışı süperpoze edilerek düğüm noktası başına 6 serbestlik derecesine ait 4 düğüm noktalı düzlemsel bir kabuk eleman geliştirilmiştir. Genellikle kabuk elemanlar düğüm noktası başına, üç adet öteleme, iki adet düzlem içi dönme olmak kaydıyla 5 adet serbestliğe sahiptirler. Bu çalışmada kabuk düzlemine dik dönme bileşenlerinden kaynaklı düzlem-içi yer değiştirme alanı tanımlanmak suretiyle formülasyona 6. serbestlik derecesi eklenmiştir. Düzlem dışı dönme serbestliği olarak da adlandırılan bu bileşen özellikle kabuk elemanın bu serbestliği ihtiva eden diğer eleman tipleri ile birlikte hesaplanması gerektiği durumlarda oldukça önem kazanmaktadır. Geliştirilen elemanın performansını test etmek üzere çeşitli sayısal uygulamalar ortaya konulmuş ve sonuçlar literatürde güvenilen ticari sonlu eleman paket programları ile karşılaştırılmalı olarak sunulmuştur.

GİRİŞ

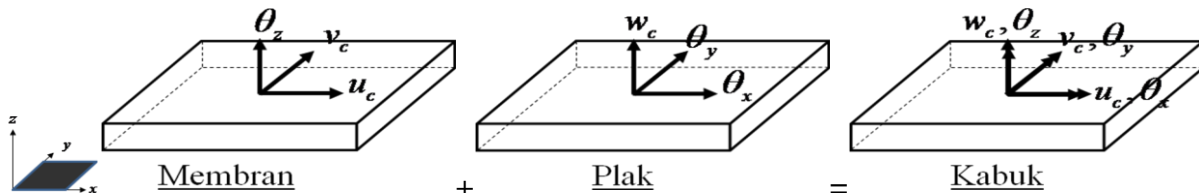
Yeni sonlu elemanların geliştirilmesi yeni bir konu olmayıp son yıllarda hız kazanmıştır. Kabuk elemanların mühendislik uygulamalarında geniş bir kullanım alanı bulması birçok araştırmacının ilgisini bu konuya çekmiştir. Yeni sonlu eleman formülasyonlarındaki amaç, sonlu eleman ağının bozulmaya karşı hassasiyetini düşürmek ve seyrek sonlu eleman ağıyla yapılan çalışmaların başarısını arttırmaktır. Basit ve etkili bir kabuk sonlu eleman oluşturmak için farklı yaklaşımlar denenebilir. Eğrisel koordinatlarda klasik kabuk teorisi temel alınarak eğrisel kabuk elemanlar oluşturulabilir, üç boyutlu katı elemanlardan türetilerek bozulmaya uğramış kabuk elemanlar yapılabilir, ya da membran eleman ve plak eğilme elemanının birleştirilmesiyle düz kabuk elemanlar elde edilebilir [1]. Bu yöntemlerden saydığımız son yöntem formülasyonun basitliği ve hem membran hem de plak davranışında daha esnek bir davranış göstermesi sebebiyle çok yaygın olarak kullanılmaktadır. Buna bir de düzlem dışı

dönme serbestliği eklenerek oluşturulan sonlu eleman birçok mühendislik problemine etkili bir çözüm sağlamaktadır. Bu çalışmada da düzlem gerilme elemanı ve plak eğilme elemanı birleştirilerek her nodunda 6 adet serbestlik derecesine sahip ve toplamda 24 serbestlik dereceli dikdörtgen formda bir kabuk sonlu eleman elde edilmiştir. 3 veya 4 nodlu kabuk elemanlar izotrop malzeme kanunları çerçevesinde yaygın olarak çalışılmaktadır. Her ikisinin de zayıf ve güçlü yönleri bulunmaktadır. Üçgen elemanlar karmaşık cisimlerin sonlu elemanlara bölünmesinde yeteneklidirler, dikdörtgen elemanlar ise problemin çözümünde daha yüksek bir yakınsama performansına sahiptirler [2]. Dikdörtgen formdaki elemanlar birçok sayısal uygulamada yüksek başarıyla kullanılan eleman türlerindedir.

Günümüze kadar sonlu eleman formülasyonu konusunda çeşitli çalışmalar yapılmıştır. 4 nodlu kabuk elemanlar üzerinde Dovey 1974, Dvorkin ve Bathe 1984, Taylor ve Simo 1985, Frey 1989, Groenwold ve Stander 1995 çalışmış ve plak membran birleşim denemeleri yapmışlardır [3]. 5 serbestlik dereceli elemanlar aşırı rijit bir yapı sergilemektedirler. Düzlem dışı serbestliğin eklenmesi elemanın nod sayısını arttırmadan elemanın yer değiştirme alanının derecesini arttırmaktadır. Düzlem dışı dönme serbestliğine haiz düzlem elemanlar üzerinde birçok araştırma yapılmıştır. Allman tarafından eleman nodlarında düzlem dışı dönme serbestliğini sağlayan kuadratik yer değiştirme yaklaşımıyla kayda değer bir çalışma hazırlanmıştır 1984, 1988 [4]. Bergan ve Fellipa 1985'te düzlem dışı yer değiştirmeyi de düşünerek serbest bir formülasyon hazırlamışlardır [5]. Cook 1986 ve 1987'de düzlem dışı serbestlikle bir hibrid metodu birleştirmiştir [6]. MacNeal ve Harder 1988'de Allman'ın elemanını düzenlemişlerdir [7]. Long ve Xu düzlem dışı dönme serbestliğine yeni bir tanım önermiş ve uygun eleman modelleri geliştirmişlerdir [8]. Pimpinelli de gerilme elemanları üzerinde çalışmalar ortaya koymuştur [9]. Geyer ve Groenwold hibrid gerilme tekniğiyle düzlem dışı dönme serbestliğine sahip membranları formülize etmişlerdir [10]. Ibrahimbegovic 1990 da Hughes ve Brezzi'nin 1989'da yaptığı teorik çalışmasını temel alarak penaltı formülasyonunu geliştirmiştir [11]. Düzlem dışı dönme serbestliğine sahip dikdörtgen elemanların formülasyonu konusunda Naghdi 1964, Reissner 1965, Ahmad 1970, de Veubeke 1972, Amara ve Thomas 1979, Suzuki ve Kaneko 1982, Herrmann 1983, Arnold 1984, Atluri 1984, Sabir 1985, Lee ve Yoo 1988, Yunus 1988 tarafından da çalışmalar yapılmıştır. Gelecek çalışmalar, mevcut eleman formülasyonlarında küçük değişimler yaparak sonuçların iyileştirilmesi şeklinde olacaktır.

KABUK ELEMAN FORMÜLASYONU

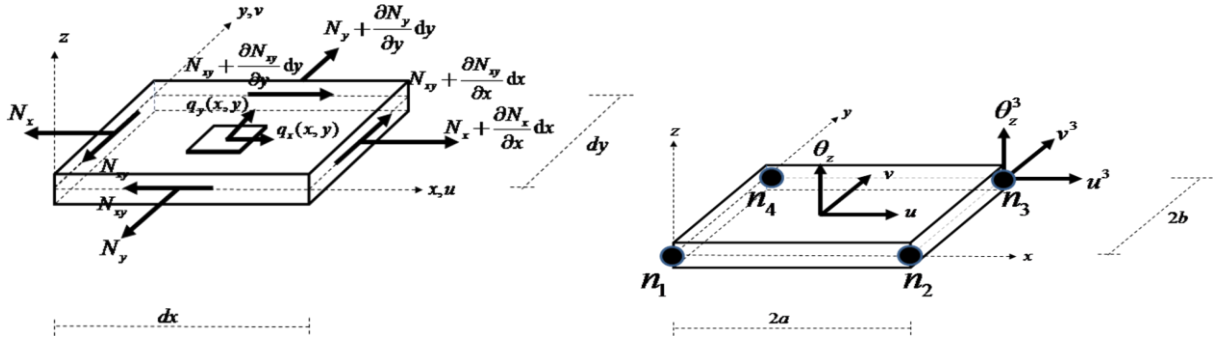
Kabuk sonlu eleman, düzlem dışı dönme serbestliğini de içeren membran eleman ve plak eğilme elemanının birleştirilmesiyle elde edilmiştir.



Şekil 1. Kabuk elemanın oluşturulmasında izlenen yöntem

Membran Eleman Formülasyonu

Tipik bir membran eleman, düzlemde iki doğrultuda yer değiştirme serbestliğine sahiptir. Buna bir de düzlem dışı dönme serbestliği eklendiğinde daha etkili bir membran eleman elde edilir.



Şekil 2. Membran denge denklemleri ve nodal serbestlikler

Membran elemanın x ve y doğrultularında denge denklemlerini yazarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x(x, y) = 0 \quad (\text{x yönünde D.D.})$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + q_y(x, y) = 0 \quad (\text{y yönünde D.D.})$$

Normal kuvvet ve şekil değiştirme ilişkileri matris formda da gösterilebilir.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_c}{\partial x} \\ \frac{\partial v_c}{\partial y} \\ \frac{\partial u_c}{\partial y} + \frac{\partial v_c}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Membran eleman her nodunda 3 serbestlik derecesine sahip olup toplamda 12 adet serbestlik derecesine sahiptir. Bunlar x ve y ekseninde yer değiştirmeler ile düzleme dik dönme serbestliğidir.

u

v

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y} \right)$$

Boyutları 2ax2b olan dikdörtgen elemanda lokal koordinatlar (s,t) ile global koordinatlar (x,y) arasındaki bağıntılar dikkate alınarak formülasyonda sekiz sabit içeren bölge terimleri yaklaşım fonksiyonları aşağıdaki gibi seçilmiştir.

$$u = u(s, t) = \alpha_1 + s\alpha_2 + t\alpha_3 + st\alpha_4 + t^2\alpha_5 + st^2\alpha_6 + t^3\alpha_7 + st^3\alpha_8$$

$$v = v(s, t) = \beta_1 + s\beta_2 + t\beta_3 + st\beta_4 + s^2\beta_5 + ts^2\beta_6 + s^3\beta_7 + ts^3\beta_8$$

Yerel koordinat değerleri 1,2,3,4 nodları için sırasıyla (-1,-1), (1,-1), (1,1) ve (-1,1) olduğu göz önüne alınıp her nod için değerler yerine konulduktan sonra ortaya çıkan 8'er denklem sayesinde bilinmeyen katsayılar bulunur. Ara işlemlerden sonra şekil fonksiyonları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$N_u = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} s(-t^3 + 3t - 2) + t^3 - 3t + 2 \\ b(s-1)(t+1)(1-t)^2 \\ s(t^3 - 3t + 2) + t^3 - 3t + 2 \\ b(-s-1)(t+1)(1-t)^2 \\ s(-t^3 + 3t + 2) - t^3 + 3t + 2 \\ b(-s-1)(t-1)(t+1)^2 \\ s(t^3 - 3t - 2) - t^3 + 3t + 2 \\ b(s-1)(t-1)(t+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$N_v = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} s^3(1-t) + s(3t-3) - 2t + 2 \\ a(s+1)(1-s)^2(1-t) \\ s(3-3t) + s^3(t-1) - 2t + 2 \\ a(s-1)(s+1)^2(1-t) \\ s^3(-t-1) + s(3t+3) + 2t + 2 \\ a(s-1)(s+1)^2(t+1) \\ s^3(t+1) + s(-3t-3) + 2t + 2 \\ a(s+1)(t+1)(1-s)^2 \end{pmatrix}$$

Rijitlik matrisini elde etmek için kullanılan olan virtüel iş ifadesi aşağıdaki şekildedir:

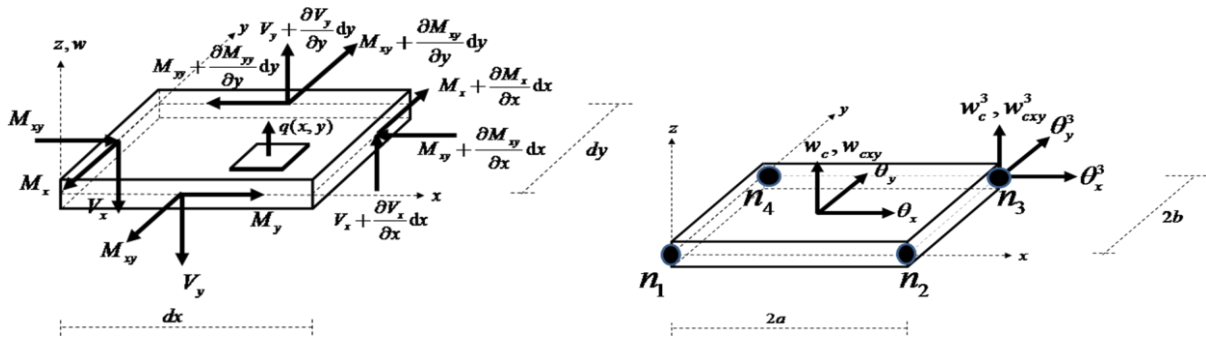
$$\iint_A \left(N_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + N_{xy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + N_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{u}q_x + \bar{v}q_y \right) dA = Q_x^i \bar{u}_i + Q_y^i \bar{v}_i$$

Ara işlemler sonucu elde edilen membran rijitlik matrisi elde edilir. Burada x ve y doğrultularındaki yerdeğiştirme serbestliklerinden yola çıkarak elde edilen 8x8 membran eleman rijitlik matrisiyle düzlem dışı dönme serbestliğini hesaba katarak elde edilen 4x4 rijitlik matrisi birleştirilerek 12x12 membran eleman sistem rijitlik matrisi elde edilir.

$$\mathbf{K}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{8,8}^{u_c, v_c} & \mathbf{K}_{8,4} \\ \mathbf{K}_{4,8} & \mathbf{K}_4^{\theta_z} \end{bmatrix}$$

Plak Eleman Formülasyonu

Plaklar kalınlıkları diğer iki boyutundan küçük olan yapılardır. Plaklara yapılan düşey yükleme kesme kuvveti ve momentin oluşmasına sebep olur. İnce plaklarda oluşan momentlerin hesaplanması için geliştirilen en genel teorem Kirchhoff Teorisidir. Kirchhoff teorisinde bulunan sonuçlar fiziksel olarak, klasik kiriş eğilme teorisinin aksine, M_x y ekseninde oluşan eğilme momentini, M_y x ekseninde oluşan eğilme momentini ifade eder. M_{xy} ise karışık türevli momentlerdir. V_x ve V_y kesme kuvvetleridir. Burada D eğilme rijitliğini, h plak kalınlığını ν Poisson oranını, w düşey yer değiştirmeyi göstermektedir.



Şekil 3. Plak denge denklemleri ve nodal serbestlikler

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Plak elemanda düşey denge denklemleri ile x ve y doğrultularında dengeleri yazarak aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q(x, y) = 0 \quad (\text{Düşey D.D.})$$

$$V_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (\text{Moment x-ekseni D.D.})$$

$$V_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad (\text{Moment y-ekseni D.D.})$$

Kesme kuvvetleri düşey denge denkleminde yerleştirilirse genel yönetici denklem elde edilir.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y) = 0$$

Moment eğrilik ilişkileri matris formunda da gösterilebilir.

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = -D \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}$$

Kirchhoff teorisinde elde edilen diferansiyel denklem 4. Dereceden olup eleman sınırlarında yer değiştirme ve eğim sürekliliğinin sağlanması gerekir. Bu süreklilikler sağlanmazsa uyumlu ya da uygun olarak adlandırdığımız elemanlar oluşamaz. Uyumlu bir eleman oluşması için elemanın bütün süreklilik gereksinimlerini sağlaması gerekir. Bu gereklilikler ve uyumlu elemanların formülasyonun katı matematik temellere dayanması sebebiyle basit ve etkili bir uyumlu Kirchhoff plak elemanının elde edilmesi zordur. Bu nedenle piyasada çok iyi yakınsama özelliğine sahip olan uyumlu elemanların yerine yaklaşık yakınsaklığa sahip olan uyumsuz elemanlar yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada ise Kirchhoff plak teorisine dayanan uyumlu bir eleman olan BFS (Bogner, Fox ve Schmit) dikdörtgen plak elemanı kullanılmıştır. BFS elemanı düşey yer değiştirme, x ve y eksenleri etrafında dönme serbestliklerine sahip olup aynı zamanda ikinci derece karışık yer değiştirme türevlerini de serbestlik derecesi olarak bünyesinde barındırır. Böylece her nodunda 4 serbestlik derecesine sahip olup toplamda 16 serbestlik derecesine sahiptir.

$$\begin{aligned} w \\ \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_y &= -\frac{\partial w}{\partial x} \\ w_{xy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Boyutları 2a x2b olan dikdörtgen elemanda lokal koordinatlar (s,t) ile global koordinatlar (x,y) arasındaki bağıntılar dikkate alınarak 16 serbestlik derecesine sahip olan bu elemanda şekil fonksiyonlarını türetmek için 16 katsayılı bir polinom kullanılır.

$$\begin{aligned} w(s,t) &= a_1 + sa_2 + ta_3 + s^2a_4 + sta_5 + t^2a_6 + s^3a_7 + s^2ta_8 + st^2a_9 + t^3a_{10} + \\ &+ s^3ta_{11} + s^2t^2a_{12} + st^3a_{13} + s^2t^3a_{14} + s^3t^2a_{15} + s^3t^3a_{16} \\ \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{b} \quad a_3 + sa_5 + 2ta_6 + s^2a_8 + 2sta_9 + 3t^2a_{10} + \\ &+ s^3a_{11} + 2s^2ta_{12} + 3st^2a_{13} + 3s^2t^2a_{14} + 2s^3ta_{15} + 3s^3t^2a_{16} \\ \theta_y &= -\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{a} \quad a_2 + 2sa_4 + ta_5 + 3s^2a_7 + 2sta_8 + t^2a_9 + \\ &+ 3s^2ta_{11} + 2st^2a_{12} + t^3a_{13} + 2st^3a_{14} + 3s^2t^2a_{15} + 3s^2t^3a_{16} \end{aligned}$$

$$w_{xy} = \frac{1}{ab} a_5 + 2sa_8 + 2ta_9 + 3s^2a_{11} + 4sta_{12} + 3t^2a_{13} + 6st^2a_{14} + 6s^2ta_{15} + 9s^2t^2a_{16}$$

Yerel koordinat değerleri 1,2,3,4 nodları için sırasıyla (-1,-1), (1,-1), (1,1) ve (-1,1) olduğu göz önüne alınıp her nod için değerler yerine konulduktan sonra ortaya çıkan 16 denklem sayesinde bilinmeyen katsayılar bulunur. Ara işlemlerden sonra şekil fonksiyonları şu şekilde elde edilir:

$$N = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} s^3 (1. t^3 - 3. t + 2.) + s (-3. t^3 + 9. t - 6.) + 2. t^3 - 6. t + 4. \\ b (1. s^3 - 3. s + 2.) (1. t + 1.) (1. - 1. t)^2 + 0. \\ a (s (s (1. s - 1.) - 1.) + 1.) (-1. t^3 + 3. t - 2.) + 0. \\ 1. a b (1. s + 1.) (1. t + 1.) (1. - 1. s)^2 (1. - 1. t)^2 \\ s^3 (-1. t^3 + 3. t - 2.) + s (3. t^3 - 9. t + 6.) + 2. t^3 - 6. t + 4. \\ b (-1. s^3 + 3. s + 2.) (1. t + 1.) (1. - 1. t)^2 + 0. \\ a (s (s (1. s + 1.) - 1.) - 1.) (-1. t^3 + 3. t - 2.) + 0. \\ 1. a b (1. s - 1.) (1. s + 1.)^2 (1. t + 1.) (1. - 1. t)^2 \\ s^3 (1. t^3 - 3. t - 2.) + s (-3. t^3 + 9. t + 6.) - 2. t^3 + 6. t + 4. \\ b (-1. s^3 + 3. s + 2.) (1. t - 1.) (1. t + 1.)^2 + 0. \\ a (s (s (1. s + 1.) - 1.) - 1.) (1. t^3 - 3. t - 2.) + 0. \\ 1. a b (1. s - 1.) (1. s + 1.)^2 (1. t - 1.) (1. t + 1.)^2 \\ s^3 (-1. t^3 + 3. t + 2.) + s (3. t^3 - 9. t - 6.) - 2. t^3 + 6. t + 4. \\ b (1. s^3 - 3. s + 2.) (1. t - 1.) (1. t + 1.)^2 + 0. \\ a (s (s (1. s - 1.) - 1.) + 1.) (1. t^3 - 3. t - 2.) + 0. \\ 1. a b (1. s + 1.) (1. t - 1.) (1. t + 1.)^2 (1. - 1. s)^2 \end{pmatrix}$$

Rijitlik matrisini elde etmek için kullanılmış olan virtüel iş ifadesi aşağıdaki şekildedir.

$$-\iint_A \left(M_x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} + M_y \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \bar{w}q(x, y) \right) dA = Q_i \bar{w}_i$$

Ara işlemler sonucu 16x16 olarak elde edilen plak elemanın rijitlik matrisinde karışık türev serbestlikleri egale edildiğinde 12x12 boyutlarında plak eleman için yeni rijitlik matrisi elde edilir.

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12}^{w_c, \theta_x, \theta_y} & \mathbf{K}_{12,4} \\ \mathbf{K}_{4,12} & \mathbf{K}_4^{w_{cy}} \end{bmatrix}$$

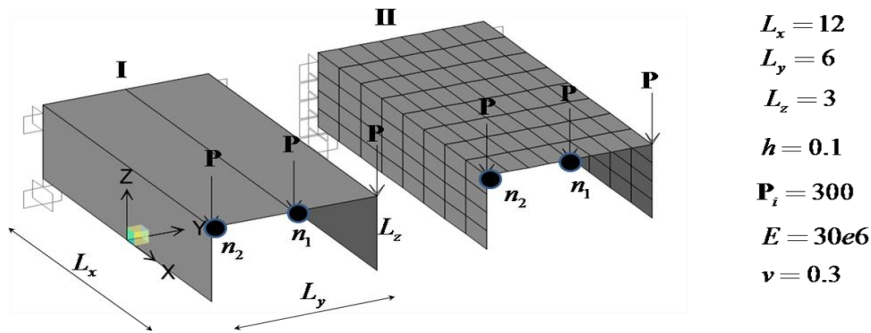
Membran ve Plak Eleman Rijitlik Matrislerinin Birleştirilmesi

Kabuk elemanın sistem rijitlik matrisini elde etmek amacıyla membran eleman ve plak elemanın rijitlik marislerini birleştirdiğimizde yeni sistem rijitlik matrisi elde edilir. Bu birleşimde hiçbir serbestlik bir değerini etkilememektedir.

$$\mathbf{K}_M + \mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12}^{u_c, v_c, \theta_z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12}^{w_c, \theta_x, \theta_y} & \mathbf{K}_{12,4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{4,12} & \mathbf{K}_4^{w_{cxy}} \end{bmatrix}$$

Örnek

Elemanın performansını denemek amacıyla her ikisi de bir ucundan ankastre olarak tutulmuş olan seyrek ve sık sonlu eleman ağı kullanılarak tasarlanan iki özdeş yapı, yapılan özdeş yüklemelerle analiz edilmiştir.



Şekil 4. Seyrek ve sık sonlu eleman ağı kullanılarak tasarlanan yapılar

Çizelge 1. Analiz sonucunda 1 nolu nodlarda elde edilen yerdeğiştirmeler

n1	ux	uy	uz	rx	ry	rz
SAP-I	0.001	0.000	-0.114	0.000	0.033	0.000
K24-I	0.001	0.000	-0.160	0.000	0.039	0.000
K20-I	0.000	0.000	-0.154	0.000	0.043	0.000

n1	ux	uy	uz	rx	ry	rz
SAP-II	0.001	0.000	-0.203	0.000	0.076	0.000
K24-II	0.001	0.000	-0.193	0.000	0.074	0.000
K20-II	0.001	0.000	-0.195	0.000	0.075	0.000

Çizelge 2. Analiz sonucunda 2 nolu nodlarda elde edilen yerdeğiştirmeler

n2	ux	uy	uz	rx	ry	rz
SAP-I	0.002	0.000	-0.013	-0.047	0.002	0.000
K24-I	0.002	0.000	-0.013	-0.039	0.002	0.000

K20-I	0.000	0.000	-0.005	-0.041	0.007	-0.010
n2	ux	uy	uz	rx	ry	rz
SAP-II	0.002	0.000	-0.018	-0.067	0.002	0.000
K24-II	0.002	0.000	-0.018	-0.060	0.003	0.000
K20-II	0.002	0.000	-0.017	-0.061	-0.002	-0.005

SONUÇLAR

Bu çalışmada her nodunda altı serbestliğe haiz toplamda yirmi dört serbestlikli dikdörtgen formda bir kabuk eleman elde edilmiştir. Elemanın performansını değerlendirmek amacıyla analizler yapılmıştır. Elemanın formülasyonunu kullanarak tasarlanan program ile ANSYS ve SAP2000 analiz sonuçları karşılaştırılmıştır. Analiz sonuçları göstermiştir ki elemanımız diğer ticari analiz programlarıyla uyumlu sonuçlar sağlamaktadır. Bazı özel örneklerde seyrek ağ durumunda diğer programlarda kullanılan elemanlara göre üstünlükleri bulunduğu tespit edilmiştir. Düzlemine dik dönme serbestliği açısından analizler değerlendirildiğinde; kabuklarda sık seçilen sonlu eleman ağı için düzlemine dik serbestlik tanımlanmasının sonuçlara etkisinin azalmakta olduğu ancak bu serbestliğin kabuklarda membran davranışı etkin bölgeler için seyrek ağ durumda öneme haiz olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Şu ana kadar yapılan çalışmalar, üretilen kabuk elemanların güzel performans gösterdiğini ortaya koymasına rağmen bozuk şekilli ve sonlu eleman ağının sıklığının az olduğu çalışmalarda elemanların başarısını ve kararlılığını artırma çalışmaları sürmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] M. Iura, S.N. Atluri, Formulation of a membrane finite element with drilling degrees of freedom, *Computational Mechanics*. (1992) 9, 417-428.
- [2] K. J. Bathe, E. N. Dvorkin, A four node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and a mixed interpolation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. (1985) vol. 21, pp. 367–383.P.
- [3] A. A. Groenwold, N. Stander, A 24 d.o.f. four-node flat shell finite element for general unsymmetric orthotropic layered composites, *Engineering Computations*. (1998) Vol. 15 Iss 4 pp. 518 – 543.
- [4] D. J. Allman, A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.* (1988) 26, 717-739.
- [5] P. G. Bergan, C. A. Felippa, A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Comput. Meths. Appl. Eng.* (1985) 50, 25-69.
- [6] R. D. Cook, On the Allman triangle and a related quadrilateral element. *Comput. Struct.* (1986) 22, 1065 1067.
- [7] R. H MacNeal, R. L. Harder, A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom. *Comput. Struct.* (1988) 28, 75 84.
- [8] Y. Q. Long, Y. Xu, Generalized conforming quadrilateral membrane element with vertex rigid rotational freedom. *Comput Struct* (1994) 52(4):749–55.

- [9] G. Pimpinelli, An assumed strain quadrilateral element with drilling degrees of freedom. *Finite Elem Anal Des* (2004) 41:267–83.
- [10] S. Geyer, A.A. Groenwold, Two hybrid stress membrane finite element families with drilling rotations. *Int J Numer Methods Eng* (2002) 53:583–601.
- [11] A. Ibrahimbegovic, R. L. Taylor, E. L. Wilson, A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom. *Int. J. Numer. Methods Eng.* (1990) 30, 445-457.