KÖPÜK DRANAJ DENKLEMİNİN LIE GRUP ANALİZİ VE KORUNUM YASALARI

Emrullah Yaşar
Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences,
Uludag University, 16059 Bursa, Turkey
eyasar@uludag.edu.tr
ve
Teoman Özer
Faculty of Civil Engineering, Division of Mechanics,
İstanbul Technical University, 34469 ·Istanbul, Turkey
E-mail: tozer@itu.edu.tr

Abstract
This study deals with symmetry group properties and conservation laws of the foam drainage equation. Foaming occurs in many distillation and absorption processes. The drainage of liquid foams involves the interplay of gravity, surface tension, and viscous forces. Firstly we study the classical Lie symmetries of the foam drainage equation which are obtained through the Lie group method of infinitesimal transformations. Secondly using the new general theorem on nonlocal conservation laws local conservation laws are also studied.

Özet
Bu çalışma köpük dranaj denkleminin simetri grup özellikleri ve korunum yasaları ile ilgilidir. Köpükleme birçok damıtma ve absorbsiyon süreçlerinde ortaya çıkar. Sıvı köpüğün dranajı yerçekimi, yüzey gerilimi ve viskoz kuvvetlerinin etkileşimini ihtiva eder. Bu çalışmada ilk olarak Lie grup metodunun sonsuz küçük dönüşümleri aracılığıyla denklemin klasik Lie simetrileri elde edilir. İkinci olarak ise bu denklemin korunum yasaları, yerel olmayan korunum teoremi yardımıyla oluşturulur. Elde edilen korunum yasaları lokaldir.

1. GİRİŞ

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin (KDD) çözümlerini incelemek için en kuvvetli yaklaşımlardan biri, onların bir parametreli Lie grup nokta dönüşümleri altında invaryanslıklarının incelenmesidir. Bu yaklaşım diferensiyel denklemlerin simetrilerinin analizinde kullanılır. Böylelikle karşı gelen simetri grupları mühendislik bilimleri, matematiksel fizik ve mekanikte diferensiyel denklemlerle ifade edilen problemlerin analizini basitleştirmekte kullanılabilir.

Son yüzyılda Lie gruplarının uygulaması birçok matematikçi tarafından geliştirildi. Ovsiannikov [1], Ibragimov [2], Olver [3], Bluman ve Kumei [4] bu alanda çok sayıda çalışma yapan matematikçilerden bazılarıdır.
Bu çalışmada lineer olmayan evolüsyon türü denklem olan

$$u_t + (u^2 - \frac{\sqrt{u}}{2} u_x)_x = 0 \tag{1}$$

köpük dranaj denkleminin [5] simetri grupları ve korunum yasalarını analiz ettik.
Köpük birçok doğal ve endüstriyel olayda merkezi bir öneme sahiptir. Bir örnek mineraller ve kömürün köpük flotasyon ayrılması durumudur [6]. Köpükleme ayrıca bir çok damıtma ve absorbsiyon süreçlerinde kullanılır. Bunun yanında birçok teknolojik süreç ve uygulamalarda önemlidir.
Literatürde (1) denkleminin bazı tam (ilerleyen dalga) çözümleri tanh-coth [7-8] ve Exp-fonksiyon metotları [9] ile analiz edildi.

2. KÖPÜK DRANAJ DENKLEMİNİN SİMETRİ GRUP ANALİZİ

Bu kısımda, (1) köpük dranaj denklemini invaryant bırakan en genel Lie grup nokta dönüşümlerini sunacağız.

Tanım 1. s.mertebeden skalar

$$F(x,u,u_1,...,u_{(s)}) = 0, \tag{2}$$

KDD yi göz önüne alalım. Burada $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n bağımsız değişken, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ m bağımlı (diferensiyel) değişkeni ve u_j, u nun x değişkenine göre j. mertebeden kısmi türevlerinin cümlesini göstersin. (2) denklemi için bir parametreli Lie grup dönüşümlerinin sonsuz küçük üreteci

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m} \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{3}$$

dir. Burada $\xi_i(x,u)$, $\eta^\alpha(x,u)$ (3) ün sonsuz küçükleri ve (3) sonsuz küçük üretecinin s. uzanımı

$$X_s = X + \eta^{(1)\alpha}{}_i(x,u,u_1)\frac{\partial}{\partial u^\alpha{}_i} + ... + \eta_{i_1 i_2 ... i_s}{}^{(1)\alpha}(x,u,u_1,...,u_s)\frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 ... i_s}{}^\alpha} \tag{4}$$

dir. Burada

$$\eta_i^{(1)\alpha} = D_i\eta^\alpha - (D_i\xi^j)u_j^\alpha, \quad i,j = 1,2,...,n; \ \alpha = 1,2,...,m$$

ve

$$\eta_{i_1 i_2 ... i_s}{}^{(s)\alpha} = D_{i_s}\eta_{i_1 i_2 ... i_{s-1}}{}^{(s-1)\alpha} - (D_i\xi_j)u^\alpha{}_{i_1 i_2 ... i_{s-1} j}, \ s = 2,3,..o.ü \ l = 1,2,...,s \ için \ i_l = 1,2,...,m \tag{5}$$

dir. Burada D_i total türev operatörü olup, toplam yinelenen indeks üzerinde olmak üzere

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u^\alpha{}_i\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u^\alpha{}_{ij}\frac{\partial}{\partial u_j{}^\alpha} + ..., \ i = 1,...n \tag{6}$$

olarak tanımlanır.
Şimdi bağımsız değişkenler x,t ve bağımlı değişken u olmak üzere aşağıdaki

$$x^* = x^*(x,t,u,a), \ t^* = t^*(x,t,u,a), u^* = u^*(x,t,u,a) \tag{7}$$

Lie grup dönüşümlerini göz önüne alalım. Burada a grup parametresidir. Lie grup dönüşümleri için sonsuz küçük üreteç, (3) formülünden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$X = \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \eta^u \frac{\partial}{\partial u} \tag{8}$$

Burada ξ^x, ξ^t, η grup değişkenleri (bağımsız ve bağımlı değişkenler) nin sonsuz küçük fonksiyonlarıdır.

Önerme: Köpük dranaj denklemi üç parametreli

$$X = (\alpha_1 - \frac{x\alpha_2}{2})\frac{\partial}{\partial x} + (\alpha_3 - \frac{3t\alpha_2}{2})\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_2 u \frac{\partial}{\partial u} \tag{9}$$

simetri grup üretecine sahiptir. Burada α_1, α_2 ve α_3 sabitler olup grup parametreleri olarak adlandırılır.

İspat: (1) denklemi ikinci mertebe kısmi türev içerdiğinden Lie nokta simetrilerini hesaplamak için (8) ile verilen sonsuz küçük üretecin ikinci uzanımını yazmamız gerekir. (4) formülünden dolayı sonsuz küçük üretecin ilgili terimleri ihtiva eden uzanımı aşağıdaki formdadır:

$$X = \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \eta^u \frac{\partial}{\partial u} + \eta_t^u \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta_x^u \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_{xx}^u \frac{\partial}{\partial u_{xx}} \tag{10}$$

Burada $\eta_t^u, \eta_x^u, \eta_{xx}^u$ terimleri (5) ifadesi ile verilir. (8) üretecinin ikinci uzanımının (1) denklemine uygulanmasıyla

$$(\eta_t^u + 2u_x\eta^u + 2u\eta_x^u + \frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}u_x^2\eta^u - \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u_x\eta_x^u - \frac{1}{4}u^{-\frac{1}{2}}u_{xx}\eta^u - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{2}\eta_{xx}^u)|_{(1)} = 0 \tag{11}$$

belirleyici denklemine ulaşırız. (11) de gerekli terimlerin hesaplanması ve bağımsız terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki denklem sistemine (önemli basitleştirmelerden sonra)

$$\begin{aligned} &\xi^x = \xi^x(x),\ \xi^t = \xi^t(t),\ \eta^u = \eta^u(u), \\ &\eta^u + u\xi_t^t - u\xi_x^x = 0, \\ &\frac{\eta^u}{8u^{\frac{3}{2}}} - \frac{\eta_u^u}{4\sqrt{u}} - \frac{\xi_t^t}{4\sqrt{u}} + \frac{\xi_x^x}{2\sqrt{u}} = 0, \\ &-\frac{\eta^u}{4\sqrt{u}} - \frac{\sqrt{u}\xi_t^t}{2} + \sqrt{u}\xi_x^x = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

ulaşılır. (12) den sistemin tek çözümünün

$$\xi^x = \alpha_1 - \frac{x\alpha_2}{2}, \xi^t = \alpha_3 - \frac{3t\alpha_2}{2}, \eta^u = \alpha_2 u \tag{13}$$

olduğunu görmek kolaydır. Bunlar sonsuz küçükler olup α_1, α_2 *ve* α_3 keyfi sabitlerdir. Karşı gelen simetri grup üreteçleri

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u} \tag{14}$$

dir.

Tablo Kamütatör tablosu

Operatörler	X_1	X_2	X_3
X_1	0	0	$3X_1$
X_2	0	0	X_2
X_3	$-3X_1$	$-X_2$	0

Aslında (14), (1) köpük dranaj denkleminin üç parametreli Lie nokta grup dönüşümlerine sahip olduğunu ima eder. Ayrıca, Tablo 1 ile verilen kamütatör bağıntılarından (14) vektörleri ile üretilen simetri grup dönüşümlerinin Lie cebiri çözülebilirdir ve kamütatör tablosu $[X_i, X_j] = -[X_j, X_i]$, $i, j = 1,2,3$ olduğu için skew-simetriktir.

3. KORUNUM YASALARI

Korunum yasaları, çalışılan fiziksel sistemlerin sonuçlarını elde etmemizde etkin olduklarından fiziğin her alanında önem taşımaktadırlar. Birçok önemli metot örneğin; Noether metodu [10], doğrudan oluşturma formülü metodu [11]- [12], karakteristik metot [13], varyasyonel yaklaşım (çarpan yaklaşımı) [3], korunum nicelikleri üzerindeki simetri koşulları metodu [14], kısmi Noether yaklaşımı [15] kdd'nin korunum yasalarını araştırmak için kullanılmıştır.

Son zamanlarda, Ibragimov [16] kdd'lerin korunum yasalarının bulunmasında kuvvetli bir yaklaşım olarak lokal olmayan korunum teoremi metodunu tanımladı. Daha sonra lokal olmayan korunum teoremi metodu bir çok yerde örneğin [17]-[20] de büyük ölçüde kullanılmıştır.

Bu metodun temel adımları şu şekilde özetlenebilir [16]:

1.Adım: $x^1 = t$, $x^2 = x$ olmak üzere $x = (x^1, x^2)$ bağımsız değişken, bir bağımlı değişken u ve u nun r. keyfi mertebesine göre türevleri olsun. Yani, r. mertebede kdd olan

$$F(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(r)}) = 0 \tag{15}$$

daima formal lagrangiana sahiptir. Formal Lagrangian, verilen denklem ile yeni bir $v(x,t)$ eşlenik değişkenin çarpımıdır. Şöyle ki;

$$L = vF \tag{16}$$

dir.

2. Adım: Bu formal Lagrangian ile

$$F^* = \frac{\delta L}{\delta u} \tag{17}$$

eşlenik denklemi oluşturulur. Burada $\frac{\delta}{\delta u}$, $\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - D_i(\frac{\partial}{\partial u_i}) + D_i D_j(\frac{\partial}{\partial u_{ij}}) + \dots$ olmak üzere varyasyonel türev(Euler-Lagrange operatörü) dir.

3. Adım: F^* eşlenik denklemi, orijinal denklemin tüm (nokta,Lie-Backlund ve nonlokal) simetrilerini kabul eder. Örneğin,

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} \tag{18}$$

nokta simetrisi orijinal denklem tarafından kabul edilirse eşlenik denklem şu simetriye sahiptir:

$$Y = X + \eta^* \frac{\partial}{\partial v} \tag{19}$$

Burada $\eta^* = -(\lambda_\beta{}^\alpha + v^\alpha D_i(\xi^i))$ olup $\lambda_\beta{}^\alpha$, $X(F) = \lambda_\beta{}^\alpha F$ den elde edilir.

4. Adım: Formal Lagrangian ve simetriler

$$C^i = \xi^i L + W^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} - D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha} \right) \right] + D_k(W^\alpha) \frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha} \tag{20}$$

formülünde yerine konulursa (ele aldığımız (1) denklemi 2. mertebeden olduğu için Noether formülünü (20) olarak yazdık), korunum nicelikleri elde edilir. Burada, $W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha$ dır.

□

(15) denkleminin korunum kanunu, (15)'in çözümleri üzerindeki

$$D_i(C^i) = 0 \tag{21}$$

denklemidir. Burada D_i total diferensiyel operatör olup (6) biçiminde tanımlanmaktadır.

(15) denklemi alışılmış Lagrangiana sahip değildir. Dolayısıyla, v eşlenik değişken olmak üzere

$$L = (u_t + 2uu_x - \frac{1}{4} u^{-1/2} u_x^2 - \frac{\sqrt{u}}{2} u_{xx}) v \tag{22}$$

formal Lagrangian'ını yazalım. Bu formal Lagrangian (17) denkleminde yerine konursa eşlenik denklem,

$$F^* = v_t + 2uv_x + \sqrt{u} \frac{u_{xx}}{2} = 0 \tag{23}$$

dır. (1) ve (23) denklemleri birlikte Euler-Lagrange denklemini oluşturur. Gerçekten,

$\frac{\delta L}{\delta v} = u_t + 2uu_x - \frac{1}{4} u^{-1/2} u_x^2 - \frac{\sqrt{u}}{2} u_{xx}$, ve $\frac{\delta L}{\delta u} = v_t + 2uv_x + \sqrt{u} \frac{u_{xx}}{2}$ dir.

(23) denkleminde v yerine u yazıldığında, (1) denklemine ulaşılamaz. Sonuç olarak, (1) denklemi kendine eşlenik değildir.

(1) denklemi, (10) daki her bir Lie-nokta simetrisi için $X(L) + LD_i(\xi^i) = 0$ invaryans testini de sağlar.

(10) daki simetrilere karşılık gelen korunum kanunlarını oluşturalım.

1.Durum: $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ simetrisini ele alalım. $\xi^x = 0, \xi^t = 1, \eta = 0$ ve $W = -u_t$ olmak üzere (20) Noether bağıntısı kullanılırsa,

$C_1^t = L + (-u_t)v = -vu_t$,

$C_1^x = -2uvu_t + \frac{u}{4} u^{-1/2} u_x u_t - \frac{u_x \sqrt{u}}{2} u_t + \frac{u\sqrt{u}}{2} u_{xt}$ elde ederiz.

Eşlenik denklemin bir çözümü olarak $v(x,t) = 1$ alınabilir. C_1^t *ve* C_1^x de yerine yazarak ve sadeleştirerek,

$$C_1^t = u,\ C_1^x = u^2 - \frac{\sqrt{u}}{2} u_x \tag{24}$$

elde edilir.

2.Durum: $X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ operatörü için, $\xi^x = 1, \xi^t = 0, \eta = 0$ ve $W = -u_x$ dir ve (20) bağıntısı kullanılarak

$$C_2^t = -vu_x,\ C_2^x = vu_t - \frac{u_x v_x \sqrt{u}}{2} \tag{25}$$

korunum vektörleri elde edilir.
Önceki aşamada yaptığımız gibi, v yerine 1 yazarsak ve (21) korunum kanunu bağıntısını kullanırsak aşikar (sıfır) korunum vektörüne ulaşırız.

3.Durum: $X_3 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + 3t\dfrac{\partial}{\partial t} - 2u\dfrac{\partial}{\partial u}$

operatörü için $\xi^x = x, \xi^t = 3t, \eta = -2u, W = -2u - xu_x - 3tu_t$ olup karşılık gelen korunum vektörleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} C_3^t &= 6tuu_x - \frac{3}{4}tu^{-1/2}u_x^2 - \frac{3}{2}tu^{1/2}u_{xx} - 2u - xu_x, \\ C_3^x &= xu_t - \frac{x}{2}u^{-1/2}u_x^2 - 4u^2 + u^{1/2}u_{xx} + \frac{x}{2}u^{-1/2}u_xu_{xx} - 6tuu_t \\ &\quad + \frac{3}{2}tu^{-1/2}u_tu_{xx} - \frac{3}{4}tu^{-1/2}u_tu_x + u^{1/2}u_x + \frac{3}{2}tu^{1/2}u_{tx}. \end{aligned} \tag{26}$$

REFERANSLAR:

[1] Ovsiannikov L.V, "Group analysis of differential equations". Moscow: Nauka; 1978.

[2] Ibragimov N.H, editor. "CRC handbook of Lie group analysis of differential equa-Tions", vols. I, II, III; 1994.

[3] Olver P.J, "Application of Lie groups to differential equations" Springer-Verlag; 1986.

[4] Bluman G.W and Kumei S, "Symmetries and differential equations" Berlin: Springer; 1989.

[5] Weaire D, Findlay S, Verbist G, "Measurement of foam drainage using AC Conductivity", J. Phys. Condens. Matter 7 , L217-L222, 1995.

[6] Stoyanov SD, Paunov VN, Basheva ES, Ivanov IB, Mehreteab A, Broze G. "Motion of the front between thick and thin film: hydrodynamic theory and experiment with vertical foam" .lms. Langmuir 13 1400-7, 1997.

[7] Wazwaz, A.M, "The tanh.coth method for solitons and kink solutions for non-linear parabolic equations", Applied Mathematics and Computation, 188 2007.

[8] Helal MA, Mehanna MS. "The tanh method and Adomian decomposition method for solving the foam drainage equation". Appl Math Comput 190 599-609, 2007

[9] Darvishi MT, Khani F, Ryu S-W, Nezhad SH. "New solitary wave and periodic solutions of the foam drainage equation using the Exp-function method." Nonlinear analysis: real world applications, in press.

[10] E. Noether, Invariante "Variationsprobleme, Nacr. Konig. Gesell. Wissen"., Gottingen, Math.-Phys. Kl. Heft 2 (1918) 235.257 (English translation in Transport Theory and Statistical Physiscs 1(3) 186-207,1971
[11] P.S. Laplace, (English translation, Celestial Mechanics, New York, 1966), 1798.
[12] S.C. Anco and G.W. Bluman, "Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. Part II: General treatment", Eur. J. Appl. Math. 9 567-585,2002
[13] Steudel, H., ."Uber die Zuordnung zwischen Invarianzeigenschaften und Erhal-Tungssatzen"., Zeit Naturforsch 17A 129-132,1972
[14] A.H. Kara and F.M. Mahomed, "Relationship between symmetries and conservation laws", Int. J. Theor. Phys. 39 23-40, 2000.
[15] A.H. Kara and F.M. Mahomed, "Noether-type symmetries and conservation laws via partial Lagragians", Nonlinear Dynam. 45 367-383 2006.
[16] N.H. Ibragimov, "A new conservation theorem". J. Math. Anal. Appl. 333 311-328 2007.
[17] M.S. Bruzón, M L G, N H Ibragimov "Self-adjoint sub-classes of generalized thin film equations" J. Math. Anal. Appl. 357 307-313,2009.
[18] R Khamitova, "Symmetries and nonlocal conservation laws of the general magma equation", Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 14 3754-3769 2009.
[19] E Yasar, T Ozer, "Conservation laws for one-layer shallow water wave systems", Nonlinear Analysis: Real World Applications (2009), in press.
[20] E Yasar "Variational principles and conservation laws to the Burridge.Knopoff Equation", Nonlinear Dynamics, 54 307-312,2008