



FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ İÇİ BOŞ SİLİNDİRLERDE SICAKLIK DAĞILIMININ BULUNMASINDA BİR SAYISAL YÖNTEM

Hakan Pekel

Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü,
Niğde

ABSTRACT

This study presents a numerical approach solution of one-dimensional transient temperature distribution problem cases where the analytical results are difficult to get for the thick walled hollow cylinders made by Functionally Graded Material (FGM). Since the current problem is solved in Laplace domain the numerical methods Durbin Inverse, Stehfest, and Papoulis, respectively are employed for time domain responses. The results are compared with the analytical one using various test functions and it is aimed to get the numerical result which one has the minimum relative error value. The governing equation to find the temperature distribution is solved as a function of the radial coordinate for different time steps in non-dimensional form. The non-dimensional thermal relaxation time as a material property is investigated the relation with the temperature distribution.

ÖZET

Bu çalışma Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeden (FDM) yapılmış kalın cidarlı içi boş silindirelerin tek boyutlu zamana bağlı sıcaklık dağılımının analitik olarak çözümüne ulaşmanın zor olduğu durumlara sayısal olarak bir yaklaşım sunmaktadır. Problem Laplace uzayında çözüldüğü için zaman uzayına geçişte Durbin, Stehfest ve Papoulis yöntemleri kullanılmaktadır. Farklı test fonksiyonlarının analitik çözümleri bu yöntemlerin sonuçları ile karşılaştırılmakta ve hata miktarı en az olan yöntem ile sayısal sonuçlar elde edilmektedir. Sıcaklık dağılımını idare eden diferansiyel denklem radyal koordinatın bir fonksiyonu olarak farklı zaman aralıkları için boyutsuz olarak çözülmüş ve sıcaklık dağılımının bir malzeme parametresi olan boyutsuz ısı gevşeme zamanı parametresiyle değişimi incelenmiştir.

GİRİŞ

Isı iletimi analizi bazı yapılar için özellikle ısıya karşı yalıtım ihtiyacı gerektiren yapılarda önem arz etmektedir. Gerilme oluşumuna sebep olan sıcaklık dağılımı yapıda mevcut bir çatlağın ilerlemesine sebep olabilmektedir. Bunun sonucunda yapının tasarımını güvenli bir bölgede gerçekleştirebilmek için sıcaklık dağılımını bilmek önemlidir. Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir malzemede (FDM) yüksek ısı özelliklerinin kullanımını gerektiren uygulamalar gibi durumlar örnek olarak verilebilir.

Fourier ısı iletimi teorisi ısı şok gibi yüksek değişkenli ısı yüklemelerin sebep olduğu durumları tam olarak açıklamakta yetersiz kalmaktadır. [1]. Katı yapılarda bu durumu daha iyi açıklayabilmek için Fourier olmayan teoriler geliştirilmiştir. Bu teorilerden biri de enerji yayılımında ısı gevşeme zamanının bir malzeme özelliğinin kullanıldığı hiperbolik ısı iletimi teorisidir. Buradaki özellik sıcaklığın dikkate alındığı bölgede sıcaklık dağılımının ayarlandığı zamandır. Bu teoride hiperbolik diferansiyel denklemler kullanılmaktadır.

Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş ve homojen malzemelerin Fourier ısı iletimi konusunda çok sayıda çalışma olmasına karşın hiperbolik konulu çalışmalar oldukça sınırlıdır. Bu kapsamda Jabbari et ve ark. [2] FDM'den yapılmış kalın cidarlı bir silindirin tek boyutlu durağan haldeki sıcaklık dağılımını incelemişlerdir. Dağılımı yarıçapın bir fonksiyonu olarak kabul etmişler ve Navier denklemlerinden türetilen problemi direkt yöntemi ile çözmüşlerdir. Ootao and Tanigawa [3] düzgün bir ısı kaynağına maruz bırakılan FDM içi boş silindirdeki termoelastik problemi teorik olarak çözmüşlerdir. Çözüme tek boyutta Laplace dönüşümü kullanarak ulaşmışlardır. Babaei and Chen [4] içi boş bir kürede zamana bağlı hiperbolik ısı iletim problemini ele almışlar, başka bir çalışmada [5] ise benzer yöntemi içi boş bir silindir için kullanmışlardır.

Guo and Noda [6] FDM'den yapılmış ince cidarlı bir silindirik kabuğun ısıl şok durumunda meydana gelen ısıl gerilmeleri düzleme problem tipine dönüştürerek incelemişlerdir. Genel malzeme özelliklerini düzensizlik yöntemi kullanarak tanımlamışlardır. Bu çalışma ile ısıl şok kullanmanın malzemedeki hatayı tespit etmede normal ısıl yüklemenden daha kolay sonuca götürdüğüne ulaşmışlardır.

Tek boyutlu çalışmalardan birini de Akbarzadeh and Chen [7] sunmuşlardır. Parabolik, hiperbolik ve klasik Fourier modelini kullanarak çift fazlı gecikme durumundaki FDM silindirlerin hem zamana bağlı hem de durağan haldeki durumlarını yarı analitik olarak çözmüşlerdir. Sonuçları ısı akısının faz gecikmesi ısıl dalga hızı ve zamana bağlı sıcaklık arasındaki ilişkileri ortaya koymaktadır.

Bu çalışmanın amacı kalın cidarlı içi boş bir FDM silindirin değişen ısıl gevşeme zamanları altındaki sıcaklık dağılımını sayısal olarak en hassas bir biçimde ortaya koymaktır. Ele alınan bu problem tipi Laplace uzayında çözülmüş zaman uzayına geçmek için de Durbin, Stehfest ve Papoulis yöntemleri kullanılmıştır. Bir test fonksiyonu kullanılarak uygun olan en iyi yöntem belirlenmeye çalışılmıştır.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Kalın cidarlı içi boş silindirede zamana bağlı tek boyutlu ısı transferi denklemi silindirik koordinatlar gözüne alınarak şu şekilde yazılabilir [8].

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}(1-\beta)\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\kappa_o} \left(\frac{r}{r_o}\right)^\beta \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)$$

Burada T sıcaklık, r radyal koordinat, β inhomojenlik parametresi, κ ısıl yayılma, t zaman ve τ gevşeme zamanı ve o dış yüzey olmak üzere ikinci dereceden bu diferansiyel denklem boyutsuz halde çözüldükten sonra ilgili sayısal yöntemlerle karşılaştırılmaktadır.

Burada boyutsuz parametreler şu şekildedir;

$$R = \frac{r}{r_o} \Rightarrow r = r_o R$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_{w_o} - T_\infty} \Rightarrow T = \theta (T_{w_o} - T_\infty) + T_\infty$$

$$\xi = \frac{\kappa t}{r_o^2} \Rightarrow t = \frac{\xi r_o^2}{\kappa}$$

$$\varepsilon_o = \frac{\kappa \tau}{r_o^2} \Rightarrow \tau = \frac{\varepsilon_o r_o^2}{\kappa}$$

$$\kappa_o = \frac{k_o}{\rho_o C_{p_o}}$$

Denklem bu parametrelerle yeniden yazılırsa;

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + (1 - \beta) \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} = R^\beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \varepsilon_o \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right)$$

Laplace uzayında denklem şu hali alır;

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}}{dR^2} + (1 - \beta) \frac{1}{R} \frac{d \tilde{\theta}}{dR} = R^\beta s (1 + \varepsilon_o s) \tilde{\theta}$$

Aşağıdaki sınır şartları kullanılarak denklemin çözümü yapılır.

$$\tilde{\theta} = 1/s \Rightarrow R = 1$$

$$\tilde{\theta} = 0 \Rightarrow R = 0.6$$

Elde edilen analitik çözüm

$$R \left[\frac{(Bessell(-A, 2B) BesselK(A, 2C)) - (Bessell(-A, 2C) BesselK(A, 2B))}{sR \left[(Bessell(-A, 2B) BesselK\left(A, \frac{2C}{R}\right)) - (Bessell\left(-A, \frac{2C}{R}\right) BesselK(A, 2B)) \right]} \right]$$

$$\frac{\left(\frac{s(1 + s\varepsilon_o)}{(2 + \beta)^2} \right)^{-\left(\frac{1}{4+2\beta}\right)} \left(\frac{sR^{2+\beta}(1 + s\varepsilon_o)}{(2 + \beta)^2} \right)^{\left(\frac{\beta}{4+2\beta}\right)}}{sR \left[(Bessell(-A, 2B) BesselK\left(A, \frac{2C}{R}\right)) - (Bessell\left(-A, \frac{2C}{R}\right) BesselK(A, 2B)) \right]}$$

Denklemden yer alan katsayılar

$$A = \frac{\beta}{2 + \beta}$$

$$B = \frac{sr_\gamma^{2+\beta}(1 + s\varepsilon_o)}{(2 + \beta)^2}$$

$$C = \frac{sR^{2+\beta}(1 + s\varepsilon_o)}{(2 + \beta)^2}$$

Aşağıda ele alınan test fonksiyonu verilmektedir. Bu fonksiyon Mathematica paket programında kullanılan kodlar aracılığıyla sırasıyla, Durbin, Stehfest ve Papoulis yöntemleri ile çözülmüştür (Çizelge 1). Burada Papoulis yönteminin trigonometrik ifade içeren bazı denklemlerde analitik sonuçtan daha çok sapma gösterdiği görülmüş, daha hassas sonuçların elde edildiği Durbin yönteminin kullanımı ile ısı problemi çözümüne gidilmiştir. Stehfest ve Papoulis yöntemlerinin nasıl kullanıldığına dair detaylı bilgiler [9] nolu referansta bulunabilir.

$$F(s) = \frac{2s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

Durbin yönteminin aşamaları aşağıda açıklanmaktadır.

Gerçek bir $f(t)$ fonksiyonunun $t < 0$ olmak üzere $f(t) = 0$ için ifadesi

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Ters dönüşümü

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

burada s Laplace parametresi ve a keyfi bir reel sayıdır.

$$s = a + iw$$

Karmaşık yapıda bulunan fonksiyonların analitik çözümlerini elde etmenin zor olması sebebiyle yaklaşık çözüm verecek, hassas ve kolaylık sağlayacak bazı sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Bunların bir kısmı da Fourier serisi yaklaşımlarıdır. Bu kapsamda Fourier serileri ilk kez Dubner ve Abate [10] tarafından kullanılmıştır. Daha sonra Durbin [11] 1974 yılında $[0, 2T]$ aralığını kullanarak formülü geliştirmiştir.

$$f(t) = \frac{e^{at}}{T} \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F(a)\} + \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re}\left\{F\left(a + i \frac{k\pi}{T}\right)\right\} \cos \frac{k\pi t}{T} \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im}\left\{F\left(a + i \frac{k\pi}{T}\right)\right\} \sin \frac{k\pi t}{T} \end{array} \right] - E_1$$

burada E_1 ayırıklaştırma hatasını belirtmektedir. Sonsuz seri açılımında N sonlu sayısı alındıktan sonra $f(t)$ 'nin yaklaşık çözümü için formül şu hali alır:

$$f_N(t) \cong \frac{e^{at}}{T} \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F(a)\} + \sum_{k=0}^N \operatorname{Re}\left\{F\left(a + i \frac{k\pi}{T}\right)\right\} \cos \frac{k\pi t}{T} \\ - \sum_{k=0}^N \operatorname{Im}\left\{F\left(a + i \frac{k\pi}{T}\right)\right\} \sin \frac{k\pi t}{T} \end{array} \right]$$

ve

$$f(t) = f_N(t) - E_1 + E_2$$

burada E_2 kesme hatasını göstermektedir. Ayırıklaştırma hatasının kesme hatasından daha küçük olduğu kanıtlanmıştır.

Bu yöntemin kullanımında a, T , ve N gibi bazı keyfi sabitler vardır. Genel olarak $5 \leq aT \leq 10$ ve $5 \leq N \leq 5000$ aralıklarında seçim yapmak tavsiye edilir. Parametrelerin seçimi sözü edilen miktarlarını azaltmaktadır. Hata miktarının arttığı durumlar yöntemin kullanımında bir dezavantaj olarak ortaya çıkmaktadır.

Formülü geliştirmek için bir de Lanczos faktörü, L_k kullanılmaktadır [12].

$$f(t_n) \cong \frac{2e^{an\Delta t}}{T} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F(a)\} + \operatorname{Re}\left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \left[F\left(a + i \frac{2k\pi}{T}\right) L_k \right] e^{i \frac{2\pi kn}{N}} \right\} \right]$$

$$L_k = \frac{\sin \frac{k\pi}{N}}{\frac{k\pi}{N}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

burada p_k k. Laplace parametresini, Δt zaman artış miktarını ve $T = N\Delta t$ çözüm aralığını vermektedir.

$$p_k = a + i \frac{2k\pi}{T}$$

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

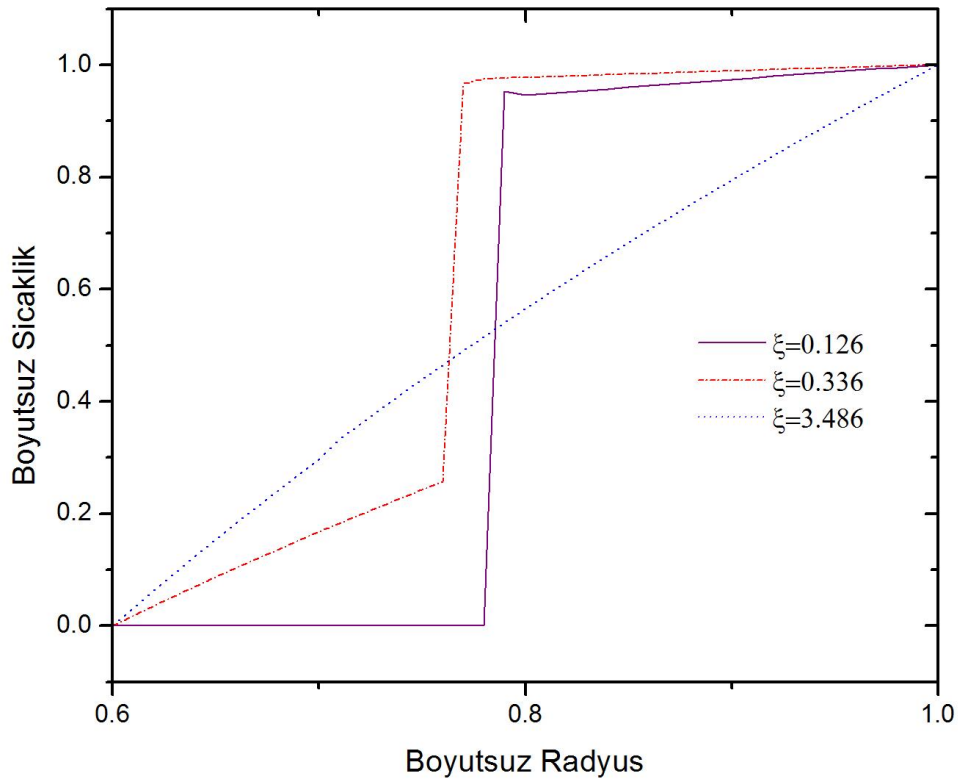
SAYISAL SONUÇLAR

Birinci test fonksiyonuna ait analitik sonuçlar [13] diğer sayısal sonuçlar ile karşılaştırılmış, sonuçlar farklı zaman aralıkları kullanarak Çizelge 1’de gösterilmektedir.

Çizelge 1. Test fonksiyonu sonuçlarının karşılaştırılması

Zaman (saniye)	Analitik Sonuç	Durbin Sonucu	Stehfest Sonucu	Papoulis Sonucu
1.0	0.5032147	0.5032151	0.5031782	0.4983123
2.0	0.1536509	0.153651	0.1536671	0.155942
3.0	0.05226582	0.05226585	0.05223198	0.05404822
4.0	0.0186511	0.01865111	0.01868461	0.01015896
5.0	0.006783347	0.00678335	0.006788913	0.01396891

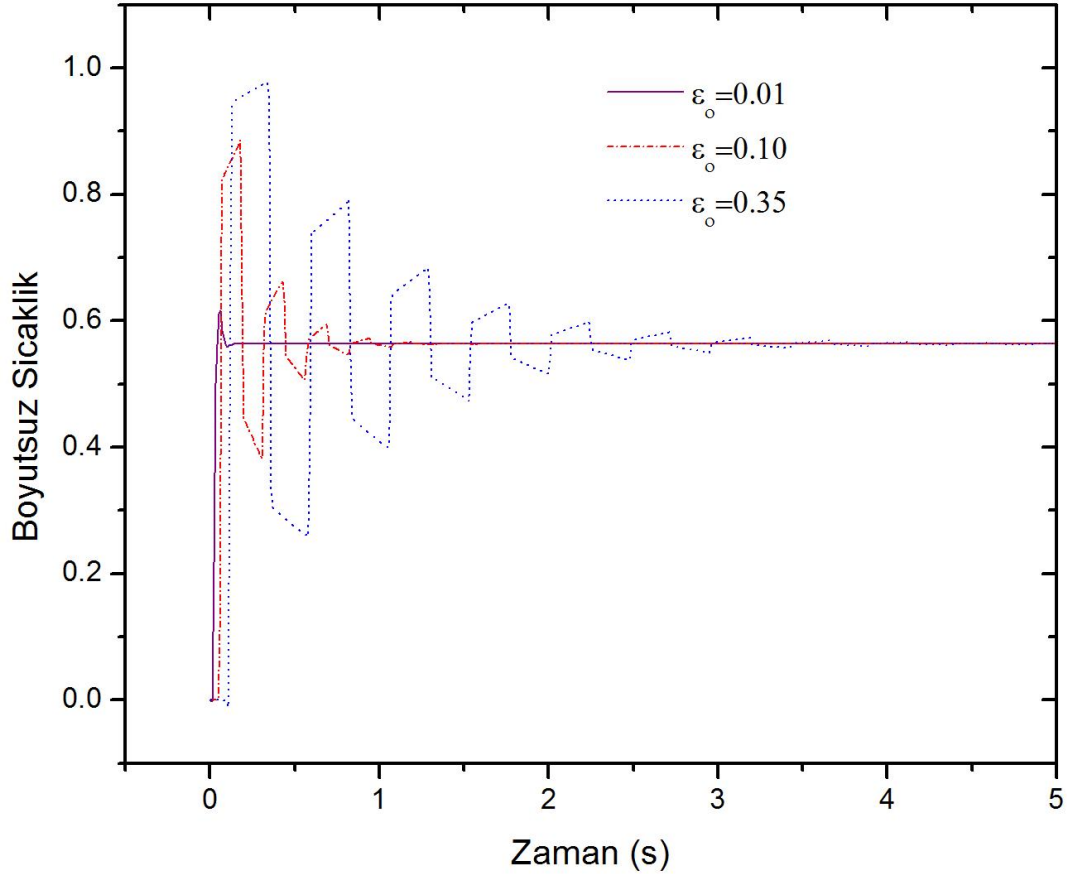
Durbin yöntemi kullanarak homojen, inhomojenlik parametresi sıfır alındığı zaman ve izotrop içi boş bir silindir için boyutsuz sıcaklık dağılımı üç farklı boyutsuz zaman $\xi = 0.126, 0.336, \text{ve } 3.486$ için verilmektedir. Boyutsuz zaman $\xi = 3.486$ değerine iken sıcaklık durağan hali almaktadır. Elde edilen sonuçların referans [5]’teki çalışmalarla örtüştüğü görülmektedir.



Şekil 1. Cidar kalınlığı boyunca sıcaklık dağılımı

Şekil 2 ise tam orta noktadaki sıcaklık dağılımını vermektedir. Isıl genleşme zamanının boyutsuz sıcaklıktaki etkisini vermektedir.

Elde edilen bu grafikler referans [1]'de verilen Jiang'in elde ettiği grafikler ile benzerlik taşımaktadır. Şekilden de anlaşıldığı üzere içi boş silindirdeki sıcaklık kademeli bir şekilde son ısı sıcaklık değerine ulaşmaktadır. Daha yüksek ısıl gevşeme zamanı ile sıcaklık dalgaları benzerlik taşırken, sıcaklık değişimlerine ait genlikler farklılık göstermektedir.



Şekil 2. Orta noktadaki sıcaklık dağılımı

SONUÇLAR

Bu çalışmada kalın cidarlı içi boş FDM bir silindirin her iki ucu sabit bir sıcaklıkta tutulduğu andaki sıcaklık dağılımının bulunması ele alınmıştır. İlk olarak tek boyutlu ısı iletimini probleminin analitik çözümü Laplace ortamında yapıldıktan sonra Bessel fonksiyonuna dönüştürülmüş ve ters dönüşüm için Durbin yöntemi kullanılmıştır. Elde edilen bulgular sıcaklığın ısıl gevşeme zamanının artmasıyla yükseldiğini göstermiştir. Hiperbolik teori kullanıldığında sıcaklık bölgesinde ısıl dağılımların belirli bir zamana gereksinim duyduğu ve inhomojenlik parametresinin bir rol aldığı anlaşılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] F. Jiang, Solution and analysis of hyperbolic heat propagation in hollow spherical objects. *Heat Mass Transfer*, 42 (2006). 1083-1091.
- [2] M. Jabbari, S. Sohrabpour, M.R. Eslami, Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 79 (2002). 493-497.
- [3] Y. Ootao, Y. Tanigawa, Transient thermoelastic analysis for a functionally graded hollow cylinder, *Journal of thermal stresses*. 29 (2006). 1031-1046.
- [4] M.H. Babaei, Z. Chen, Transient hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow sphere. *Int J Thermophys*. 29 (2008). 1457-1469.
- [5] M.H. Babaei, Z. Chen, Transient hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow cylinder, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 24 (2010). 325–330. doi: 10.2514/1.41368.
- [6] L.C. Guo, N. Noda, An analytical method for thermal stresses of a functionally graded material cylindrical shell under a thermal shock. *Acta Mech*, 214 (2010). 71–78.
- [7] A.H. Akbarzadeh, Z.T. Chen, Heat conduction in one-dimensional functionally graded media based on the dual-phase-lag theory. *Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Science*, 227(4) (2012). 744-759.
- [8] H. Pekel, Dynamic thermal stress analysis of FGM cylinders. PhD thesis, Cukurova University (2014).
- [9] A.H.D. Cheng, P. Sidauruk, Y. Abousleiman, Approximate inversion of the Laplace transform. *The Mathematica Journal*, (1994). 76–82.
- [10] Dubner, H., Abate, J., Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform. *J.ACM*, 15 (1) (1968). 115-123.
- [11] F. Durbin, Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *Comput. J.*, 17 (1974) 371–376.
- [12] G.V., Narayan, Numerical operational methods in structural dynamics. PhD thesis, University of Minnesota (1979).
- [13] A.L. Rabenstein, Introduction to ordinary differential equations second enlarged edition with applications. Academic Press, New York (1972).