

HARMONİK TEKİL YÜK ETKİSİNDEKİ BOŞLUK İÇEREN YARIM UZAYIN TİTREŞİMLERİ

Aydın Özmutlu*, Hasan Engin**

*İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Maslak, İstanbul.

**İTÜ, İnşaat Fakültesi, Mekanik Anabilim Dalı, Maslak, İstanbul.

ÖZET

Bu çalışmada, harmonik tekil kuvvet zorlaması için homogen, izotrop ve lineer elastik, silindirik boşluklu yarım uzayın davranışı incelenmiştir. Silindirik boşluğun eksenine boyunca geometri, malzeme özellikleri ve zorlamanın değişmemesi nedeni ile düzlem şekildeğiştirme hali göz önüne alınmıştır. Helmholtz yerdeğiştirme potansiyellerinin kullanılması ile yönetici denklem takımı kutupsal koordinatlarda iki adet ayrık dalga denklemine indirgenmiştir. İndirgenmiş dalga denklemleri Fourier-Bessel serileri ile analitik olarak çözülmüştür. Çözüm sonunda ortaya çıkan bilinmeyen sabitler delik yüzeyi ve serbest yüzey üzerinde yazılan sınır koşulları yardımıyla hesaplanmıştır. Oyuk yüzeyinde sınır koşullarının tam olarak sağlatılmasıyla bilinmeyen sabitlerin yarısı diğer yarısı cinsinden elde edilmiştir. Geri kalan bilinmeyenler, serbest yüzey üzerindeki gerilme bileşenlerinin sıfır olması koşulunun “En Küçük Kareler Yöntemi” kullanılarak yaklaşık olarak sağlatılması ile elde edilmiştir. Çözüm sonunda ω zorlama frekansı ve N terim sayısının çeşitli değerlerine göre yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerinin değişimleri grafikler yardımı ile verilmiştir.

ABSTRACT

In this study, response of a homogeneous, isotropic and linear elastic semi-infinite medium, which includes a cylindrical cavity, is investigated when subjected to a harmonic point load. Because of the geometry, material properties of the medium and the forcing function have never changed through the axis of cylindrical cavity; the plane strain case is used. Coupled equation of motions is reduced into two wave equations by use of Helmholtz potentials in polar coordinates. Fourier-Bessel series are used to solve these reduced wave equations. Unknown coefficients are calculated by applying boundary conditions on the cavity and free surface. Boundary conditions on the cavity surface are satisfied exactly. Using these conditions, half of the unknown coefficients are calculated in terms of the others. The stress components on the free surface must be zero. Using the Least Square Technique, these conditions have been satisfied approximately. Graphical variation of displacement and stress components on cavity and free surface are evaluated with respect to ω circular frequency and N number of term.

1.GİRİŞ

Literatürde, boşluk içeren sonsuz ortamın dinamik etkiler altındaki davranışı, matematik modellemesinin kolay olması nedeniyle Eringen ve Şuhubi [1], Graff [2] tarafından geniş olarak incelenmiştir. Sonsuz ortamla ilgili çalışma çokluğuna karşılık yarı sonsuz ortamdaki yapıların dinamik etkiler altındaki davranışıyla ilgili çalışmalar yakın zamana dayanmaktadır.

Yarım uzaya gömülü, bir silindirik borunun düzlem veya Rayleigh dalgaları altındaki davranışı El-Akily and Datta [3, 4] tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalarda çözüm tekniği olarak, asimptotik açılımların birbiri ile uyuşturulması ve ardışık yansımalar yöntemleri kullanılmıştır. Datta vd. [5] yarı sonsuz elastik bir ortamdaki gömülü boruların dinamik davranışını, Wong vd. [6] ise tünel geometrisinin dairesel kabuktan farklı olması halini göz önüne almışlardır. Çalışmalarda iç bölgede sonlu eleman modülasyonu yapılmış, dış bölgede analitik çözüm teknikleri kullanılmıştır. Elastik bir yarım uzayda gömülü, harmonik iç basıç etkisindeki silindirik kabuğun ve yarım uzayın davranışı Bayıroğlu [7] tarafından incelenmiştir. Çalışmada ortamın davranışı Fourier-Bessel serileri yardımıyla ifade edilmiştir. Elastik bir yarım uzaydaki, dairesel silindirik bir boşluktan, düzlem SV dalgalarının saçılması ve kırılması Lee ve Karl [8] tarafından araştırılmıştır. Dalga denklemini ve sınır koşullarını sağlamak için Fourier-Bessel serileri kullanılmıştır. Homogen, elastik bir yarım uzayda, dairesel bir oyuk ve üzerindeki yarı dairesel bir vadiden, SH dalgası saçılması ve kırılmasını, Lee vd. [9] incelemişlerdir. Keyfi bir açıda gelen dalga için kesin analitik seri çözümünü kullanarak oyukta, serbest yüzeyde ve vadi civarında yer hareketini hesaplamışlardır. Yeraltındaki silindirik boşlukların, SV kayma dalgaları etkisindeki enine davranışı Davis vd. [10] tarafından araştırılmıştır. Elastik yarım uzaya gömülü boşluğun, Fourier-Bessel serileri ve yarım uzay sınırı için içbükey serbest yüzey modeli kullanılarak analitik çözümü yapılmıştır.

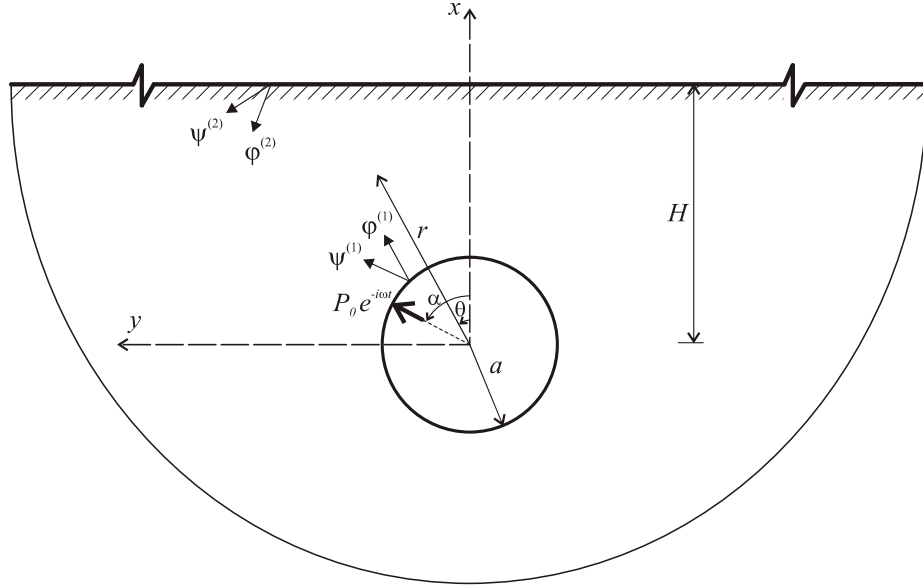
Bu çalışmada, silindirik bir oyuk içeren yarım uzayın, oyuk iç yüzeyinden yapılan bir harmonik tekil zorlama etkisindeki davranışı incelenmiştir. Navier hareket denklemine, Helmholtz ayrışımı uygulanarak kutupsal koordinatlarda iki adet dalga denklemi elde edilmiştir. İndirgenmiş dalga denklemleri Fourier-Bessel serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür. Çözüm sonunda ortaya çıkan bilinmeyenler oyuk yüzeyi ve serbest yüzey üzerinde yazılan sınır koşulları sağlatılarak hesaplanmıştır. Serbest yüzey üzerindeki sınır koşullarının sağlatılmasında “En Küçük Kareler Yöntemi” kullanılmıştır.

2.TEMEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Yarı sonsuz ortamda, serbest yüzeyden H kadar derinlikte, a yarıçaplı, Şekil 1’de görüldüğü gibi silindirik bir oyuk göz önüne alalım. Bu oyuk x eksenine ile α açısı yapan bir noktada, $P = P_0 e^{-i\omega t}$ şeklinde harmonik bir tekil yük ile zorlansın. z oyuk eksenine boyunca ortamın geometrisi, malzeme özellikleri ve zorlamanın değişmediği kabul edildiğinden, problem bir düzlem şekil değiştirme hali olarak göz önüne alınır. Problemin geometrisi nedeniyle kutupsal koordinatların kullanılması uygundur. Bu durumda yönetici denklemimiz olan Navier denklemi aşağıdaki gibi vektörel formda yazılabilir.

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\vec{U} + \mu\nabla^2\vec{U} = \rho\vec{\ddot{U}} \quad (1)$$

Burada $\vec{U}(r, \theta, t)$ yerdeğiştirme vektörünü, ρ kütle yoğunluğunu λ ve μ Lamé değişmezlerini, ∇ Nabla operatörünü, t ’de zamanı göstermektedir. r ve θ kutupsal koordinatlardır.



Şekil 1. Problemin geometrisi

Zorlamanın harmonik olması nedeni ile ortamın davranışı da harmonik olacaktır. Bu nedenle yerdeğiştirme vektörünü $\vec{U}(r, \theta, t) = \vec{u}(r, \theta)e^{-i\omega t}$ olarak alınabilir. $\vec{u}(r, \theta)$ yerdeğiştirme genliğidir. Bu durumda kutupsal koordinatlarda yönetici denklem:

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\vec{u} + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\omega^2\vec{u} = 0 \quad (2)$$

olarak elde edilir. Yerdeğiştirme genliği $\phi(r, \theta)$ ve $\vec{\psi}(r, \theta)$ Helmholtz potansiyelleri cinsinden $\vec{u} = \text{grad}\phi + \text{rot}(\vec{\psi}\vec{e}_z)$ şeklinde yazılırsa, hareket denklemi aşağıda verilen indirgenmiş dalg denklemlerine dönüşür.

$$\nabla^2\phi + k_1^2\phi = 0, \quad \nabla^2\vec{\psi} + k_2^2\vec{\psi} = 0 \quad (3)$$

Burada, çözümün tek değerli olabilmesi için $\vec{\psi}$ vektör potansiyeli üzerinde $\nabla\cdot\vec{\psi}\vec{e}_z = 0$ kısıtı konmalıdır. İndirgenmiş dalg denklemindeki $k_1 = \omega/\sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}$ boyuna dalg sayısı, $k_2 = \omega/\sqrt{\rho/\mu}$ de enine dalg sayısı olarak tanımlanmaktadır.

Çarpanlara ayırma yönteminin kullanılmasıyla (3) dalg denklemlerinin seri çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$\phi^{(1)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_1 H_n^{(1)}(k_1 r) + C_2 H_n^{(2)}(k_1 r)] e^{\pm in\theta} \quad (4a)$$

$$\vec{\psi}^{(1)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_3 H_n^{(1)}(k_2 r) + C_4 H_n^{(2)}(k_2 r)] e^{\pm in\theta} \quad (4b)$$

Burada $H_n^{(1)}(\cdot)$ ve $H_n^{(2)}(\cdot)$ birinci ve ikinci nevi Hankel fonksiyonlarıdır. Çözümde kullanılacak fonksiyonların seçimi, tamamen problemin fizikine bağlıdır. Sonsuzda Sommerfeld ışına koşulu sağlatılmalıdır. Bunun için Hankel fonksiyonlarının asimptotik açılımlarına bakılacak olursa $H_n^{(1)}$ ışına koşulunu sağlamaktadır. Bu durumda çözüm,

$$\varphi^{(1)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_1 r) \left[A_n^{(1)} \cos n\theta + B_n^{(1)} \sin n\theta \right] \quad (5a)$$

$$\psi^{(1)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(k_2 r) \left[C_n^{(1)} \sin n\theta + D_n^{(1)} \cos n\theta \right] \quad (5b)$$

şeklinde elde edilmektedir. Harmonik iç zorlamadan dolayı silindirik oyukta meydana gelen titreşimlerden doğan dalgaların, serbest yüzeyden yansımaları sonucu oluşan yeni dalga potansiyelleri $\varphi^{(2)}$ ve $\psi^{(2)}$ ise sırası ile

$$\varphi^{(2)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_1 r) \left[A_n^{(2)} \cos n\theta + B_n^{(2)} \sin n\theta \right] \quad (6a)$$

$$\psi^{(2)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_2 r) \left[C_n^{(2)} \sin n\theta + D_n^{(2)} \cos n\theta \right] \quad (6b)$$

olacaktır. Burada $J_n(\cdot)$ birinci nevi Bessel fonksiyonudur. Bunun sonucunda lineer teori kabulü ile ortama ait toplam dalga potansiyelleri φ ve ψ ayrı ayrı

$$\varphi(r, \theta) = \varphi^{(1)}(r, \theta) + \varphi^{(2)}(r, \theta) \text{ ve } \psi(r, \theta) = \psi^{(1)}(r, \theta) + \psi^{(2)}(r, \theta) \quad (7)$$

şeklinde yazılabilir. Çözüm serilerindeki $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, A_n^{(2)}, B_n^{(2)}, C_n^{(2)}$ ve $D_n^{(2)}$ bilinmeyen katsayılar olup, bu katsayılar sınır koşullarının sağlatılması ile hesaplanacaktır.

Buna göre yerdeğiştirme ve gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} u_r = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[A_n^{(1)} \left(nH_n^{(1)}(k_1 r) - k_1 r H_{n+1}^{(1)}(k_1 r) \right) + nC_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r) + A_n^{(2)} \left(nJ_n(k_1 r) - k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + nC_n^{(2)} J_n(k_2 r) \right] \cos n\theta + \left[B_n^{(1)} \left(nH_n^{(1)}(k_1 r) - k_1 r H_{n+1}^{(1)}(k_1 r) \right) - nD_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r) \right. \right. \\ \left. \left. + B_n^{(2)} \left(nJ_n(k_1 r) - k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right) - nD_n^{(2)} J_n(k_2 r) \right] \sin n\theta \right\} \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} u_\theta = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[-nA_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_1 r) - C_n^{(1)} \left(nH_n^{(1)}(k_2 r) - k_2 r H_{n+1}^{(1)}(k_2 r) \right) - nA_n^{(2)} J_n(k_1 r) \right. \right. \\ \left. \left. - C_n^{(2)} \left(nJ_n(k_2 r) - k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right) \right] \sin n\theta + \left[nB_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_1 r) - D_n^{(1)} \left(nH_n^{(1)}(k_2 r) - k_2 r H_{n+1}^{(1)}(k_2 r) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + nB_n^{(2)} J_n(k_1 r) - D_n^{(2)} \left(nJ_n(k_2 r) - k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right) \right] \cos n\theta \right\} \end{aligned} \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} t_{rr} = \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[A_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 r^2 \right) H_n^{(1)}(k_1 r) + k_1 r H_{n+1}^{(1)}(k_1 r) \right] \right. \right. \\ \left. \left. + A_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 r^2 \right) J_n(k_1 r) + k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \right. \right. \\ \left. \left. + C_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n \right) H_n^{(1)}(k_2 r) - nk_2 r H_{n+1}^{(1)}(k_2 r) \right] + C_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 r) - nk_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \right\} \cos n\theta \\ \left. + \left[\left\{ B_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 r^2 \right) H_n^{(1)}(k_1 r) + k_1 r H_{n+1}^{(1)}(k_1 r) \right] \right. \right. \right. \\ \left. \left. + B_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n - 0.5k_2^2 r^2 \right) J_n(k_1 r) + k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \right. \right. \\ \left. \left. + D_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) H_n^{(1)}(k_2 r) + nk_2 r H_{n+1}^{(1)}(k_2 r) \right] + D_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 r) + nk_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \right\} \sin n\theta \right] \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned}
t_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r^2 - 0.5k_2^2 r^2 \right) H_n^{(1)}(k_1 r) - k_1 r H_{n+1}^{(1)}(k_1 r) \right] \right. \right. \\
+ A_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r^2 - 0.5k_2^2 r^2 \right) J_n(k_1 r) - k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \\
+ C_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) H_n^{(1)}(k_2 r) + nk_2 r H_{n+1}^{(1)}(k_2 r) \right] + C_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 r) + nk_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \left. \right\} \cos n\theta \Big] \\
+ \left[\left\{ B_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r^2 - 0.5k_2^2 r^2 \right) H_n^{(1)}(k_1 r) - k_1 r H_{n+1}^{(1)}(k_1 r) \right] \right. \right. \\
+ B_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r^2 - 0.5k_2^2 r^2 \right) J_n(k_1 r) - k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \\
+ D_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n \right) H_n^{(1)}(k_2 r) - nk_2 r H_{n+1}^{(1)}(k_2 r) \right] + D_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 r) - nk_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \left. \right\} \sin n\theta \Big]
\end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned}
t_{r\theta} = \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n \right) H_n^{(1)}(k_1 r) + nk_1 r H_{n+1}^{(1)}(k_1 r) \right] + A_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_1 r) + nk_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \right. \right. \\
+ C_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r^2 \right) H_n^{(1)}(k_2 r) - k_2 r H_{n+1}^{(1)}(k_2 r) \right] \\
+ C_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r^2 \right) J_n(k_2 r) - k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \left. \right\} \sin n\theta \Big] \\
+ \left[\left\{ B_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n \right) H_n^{(1)}(k_1 r) - nk_1 r H_{n+1}^{(1)}(k_1 r) \right] + B_n^{(2)} \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_1 r) - nk_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \right. \right. \\
+ D_n^{(1)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r^2 \right) H_n^{(1)}(k_2 r) - k_2 r H_{n+1}^{(1)}(k_2 r) \right] \\
+ D_n^{(2)} \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r^2 \right) J_n(k_2 r) - k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \left. \right\} \cos n\theta \Big]
\end{aligned} \quad (9c)$$

Buraya kadar yerdeğiştirmeler ve gerilmeler elde edildi. Şimdi sınır koşulları kullanılarak bilinmeyen sabitler hesaplanmalıdır. Bu ifadelerdeki serilerinin pratik olarak sonsuza g3t3r3lmesi m3mk3n değildir. Bu nedenle seriler N gibi sonlu bir sayıda kesilmelidir. Bu durumda hesaplanması gereken bilinmeyen sabitlerin sayısı $8 \times N + 8$ olmaktadır. B3ylece oyuk ve serbest y3zey 3zerinde $8 \times N + 8$ adet koşul yazılmalıdır.

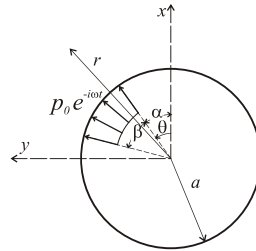
3. SINIR KOŞULLARI

1- Dairesel oyuk y3zeyindeki sınır koşulları;

$$\left. t_{rr} \right|_{r=a} = -t_r(\theta) \quad \left. t_{r\theta} \right|_{r=a} = 0 \quad (10)$$

Tekil kuvvet zorlamasına ge3meden 3nce, oyuk y3zeyi 3zerinde β merkez a3ılı sekt3r3n Şekil 2 de g3r3ld3ę3 gibi, p_0 genlikli harmonik bir kısmi yayılı y3kle y3klendiğini g3z 3n3ne alalım. Bu durumda y3k fonksiyonu aşağıdaki gibi tariflenebilir.

$$t_r(\theta) = p_0 [H(\theta - \alpha) - H(\theta - \alpha - \beta)] \quad (11)$$



Şekil 2. Y3kleme durumu

Bu yük fonksiyonu, sınır koşullarının sağlatılması amacıyla $(0, 2\pi)$ periyodlu Fourier serisine aşağıdaki gibi açılır ve

$$t_r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [T_n^c \cos n\theta + T_n^s \sin n\theta] \quad (12)$$

bu serideki T_n^c ve T_n^s katsayıları, Fourier teoremi yardımı ile hesaplanıp yerine koyulursa

$$t_r(\theta) = \frac{P_0\beta}{2\pi} + \frac{P_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{ [\sin n(\alpha + \beta) - \sin n\alpha] \cos n\theta - [\cos n(\alpha + \beta) - \cos n\alpha] \sin n\theta \} \quad (13)$$

yük fonksiyonu sürekli bir fonksiyon şeklinde elde edilmiş olur. Şimdi tekil kuvvet yüklemesi durumunda $\beta \rightarrow 0$ için (13) ifadesinin limitine geçilirse, Fourier serisi $(0, 2\pi)$ aralığında aşağıdaki gibi elde edilir. Burada $P_0 = p_0 a \beta = \text{sabit}$ tir.

$$t_r(\theta) = \frac{P_0}{2\pi a} + \frac{P_0}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} [\cos n\alpha \cos n\theta + \sin n\alpha \sin n\theta] \quad (14)$$

(9) formüllerindeki radyal gerilmeye ait ifadeden sınır koşulunun sağlatılmasıyla $n = 0$ için;

$$A_0^{(1)} [-0.5k_2^2 a^2 H_0^{(1)}(k_1 a) + k_1 a H_1^{(1)}(k_1 a)] + A_0^{(2)} [-0.5k_2^2 a^2 J_0(k_1 a) + k_1 a J_1(k_1 a)] = -\frac{P_0 a}{4\pi\mu} \quad (15)$$

bir adet bağıntı elde edilir. n ' nin sıfırdan farklı her değeri için radyal gerilme ifadesindeki trigonometrik terimlerin katsayılarıyla yük ifadesindeki katsayılar ayrı ayrı eşleştirilmelidir. Buradan da $n > 0$ için;

$$\left\{ A_n^{(1)} [(n^2 - n - 0.5k_2^2 a^2) H_n^{(1)}(k_1 a) + k_1 a H_{n+1}^{(1)}(k_1 a)] + A_n^{(2)} [(n^2 - n - 0.5k_2^2 a^2) J_n(k_1 a) + k_1 a J_{n+1}(k_1 a)] \right. \\ \left. + C_n^{(1)} [(n^2 - n) H_n^{(1)}(k_2 a) - n k_2 a H_{n+1}^{(1)}(k_2 a)] + C_n^{(2)} [(n^2 - n) J_n(k_2 a) - n k_2 a J_{n+1}(k_2 a)] \right\} = -\frac{P_0 a}{2\pi\mu} \cos n\alpha \quad (16) \\ n = 1, 2, \dots, N$$

$$\left\{ B_n^{(1)} [(n^2 - n - 0.5k_2^2 a^2) H_n^{(1)}(k_1 a) + k_1 a H_{n+1}^{(1)}(k_1 a)] + B_n^{(2)} [(n^2 - n - 0.5k_2^2 a^2) J_n(k_1 a) + k_1 a J_{n+1}(k_1 a)] \right. \\ \left. + D_n^{(1)} [(-n^2 + n) H_n^{(1)}(k_2 a) + n k_2 a H_{n+1}^{(1)}(k_2 a)] + D_n^{(2)} [(-n^2 + n) J_n(k_2 a) + n k_2 a J_{n+1}(k_2 a)] \right\} = -\frac{P_0 a}{2\pi\mu} \sin n\alpha \quad (17) \\ n = 1, 2, \dots, N$$

$2 \times N$ adet bağıntı elde edilir. Böylece radyal gerilmeye ait sınır koşulundan toplam $2 \times N + 1$ adet bağıntı elde edilmiş olur.

Aynı şekilde kayma gerilmesine ait (11) formüllerindeki ifadeden de $n = 0$ için;

$$D_0^{(1)} [0.5k_2^2 a^2 H_0^{(1)}(k_2 a) - k_2 a H_1^{(1)}(k_2 a)] + D_0^{(2)} [0.5k_2^2 a^2 J_0(k_2 a) - k_2 a J_1(k_2 a)] = 0 \quad (18)$$

bir adet bağıntı elde edilir. n ' nin sıfırdan farklı her değeri için kayma gerilmesi ifadesindeki trigonometrik terimlerin katsayıları ayrı ayrı sifıra eşitlenmelidir. Buradan da; $n > 0$ için;

$$\left\{ A_n^{(1)} [(-n^2 + n) H_n^{(1)}(k_1 a) + n k_1 a H_{n+1}^{(1)}(k_1 a)] + C_n^{(1)} [(-n^2 + n + 0.5k_2^2 a^2) H_n^{(1)}(k_2 a) - k_2 a H_{n+1}^{(1)}(k_2 a)] \right. \\ \left. + A_n^{(2)} [(-n^2 + n) J_n(k_1 a) + n k_1 a J_{n+1}(k_1 a)] + C_n^{(2)} [(-n^2 + n + 0.5k_2^2 a^2) J_n(k_2 a) - k_2 a J_{n+1}(k_2 a)] \right\} = 0 \quad (19) \\ n = 1, 2, \dots, N$$

$$\begin{aligned} & \left\{ B_n^{(1)} \left[(n^2 - n) H_n^{(1)}(k_1 a) - n k_1 a H_{n+1}^{(1)}(k_1 a) \right] + D_n^{(1)} \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) H_n^{(1)}(k_2 a) - k_2 a H_{n+1}^{(1)}(k_2 a) \right] \right. \\ & \left. + B_n^{(2)} \left[(n^2 - n) J_n(k_1 a) - n k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] + D_n^{(2)} \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) J_n(k_2 a) - k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$n = 1, 2, \dots, N$

$2 \times N$ adet bağıntı elde edilir. Böylece kayma gerilmesine ait sınır koşulundan toplam $2 \times N + 1$ adet bağıntı elde edilmiş olur.

Sonuçta, (10) sınır koşullarında, (13) Fourier açılımının kullanılması ile $4 \times N + 2$ adet bağıntı elde edilir. Elde edilen bu bağıntılarda $B_0^{(1)}$, $B_0^{(2)}$, $C_0^{(1)}$ ve $C_0^{(2)}$ bilinmeyenlerinin özdeş olarak sıfır oldukları görülür. Böylece çözüm sonunda ortaya çıkan etkin bilinmeyen sayısı $8 \times N + 4$ olur. Oyuk üzerindeki sınır koşullarından elde edilen $4 \times N + 2$ adet bağıntıdan, bilinmeyenlerin yarısı, diğer yarısı cinsinden hesaplanır. Bu bağıntılardan, $B_n^{(1)}$, $B_n^{(2)}$, $C_n^{(1)}$ ve $C_n^{(2)}$ bilinmeyenleri, $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $D_n^{(1)}$ ve $D_n^{(2)}$ cinsinden elde edilir.

2- Serbest yüzey üzerinde sınır koşulları ise aşağıdaki gibidir.

$$t_{xx} \Big|_{x=H} = 0, \quad t_{xy} \Big|_{x=H} = 0 \quad (21)$$

Oyuk üzerindeki sınır koşulların sağlatılması sonucu, geri kalan $4 \times N + 2$ adet bağıntı serbest yüzey üzerinde yazılan sınır koşullarından elde edilecektir. Serbest yüzeyde yazılan (20) sınır koşulları, bu yüzey üzerinde her noktada sağlanması gereken koşullardır. Ancak çözüm serileri belli bir N sayısında kesildiği için sonlu sayıda koşul yazılabilir. Çözümün tek değerliliği için $4 \times N + 2$ adet koşul yazılmalıdır. Serbest yüzey üzerinde her noktada gerilme bileşenlerinin sıfır olması yerine, bu çalışmada gerilme fark vektörünün normunun minimum yapılmasına çalışılacaktır. Yani, aşağıdaki ifade minimum yapılmalıdır.

$$\Pi = \sum_{k=1}^S \left[\left(t_{xx}^{(s)} - \hat{t}_{xx}^{(s)} \right)^2 + \left(t_{xy}^{(s)} - \hat{t}_{xy}^{(s)} \right)^2 \right] \quad (22)$$

Böylece “En Küçük Kareler Yöntemi” olarak isimlendirilen bu yöntem kullanılarak ve yüzeyde oldukça fazla nokta göz önüne alınarak yarım uzayın serbest yüzeyi boyunca gerilme bileşenleriyle ilgili koşullar yaklaşık olarak sağlatılmaya çalışılacaktır. Burada S serbest yüzey üzerinde alınan toplam nokta sayısını, $t_{xx}^{(s)}$ ve $t_{xy}^{(s)}$ serbest yüzeyde herhangi bir s noktasında hesaplanan gerilme bileşenlerini, $\hat{t}_{xx}^{(s)}$ ve $\hat{t}_{xy}^{(s)}$ ise serbest yüzeye herhangi bir s noktasında dışardan etkiyen gerilme bileşenlerini göstermektedir. Serbest yüzeye gerilme etkilediği için $\hat{t}_{xx}^{(s)}$ ve $\hat{t}_{xy}^{(s)}$ gerilmelerinin her ikisi de sıfırdır. Serbest yüzey üzerindeki bu toplamı minimize etmek için geri kalan serbest bilinmeyenlere göre türev alınacak olursa

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_n^{(1)}} = 2 \sum_{k=1}^S \left[t_{xx}^{(s)} \frac{\partial t_{xx}^{(s)}}{\partial A_n^{(1)}} + t_{xy}^{(s)} \frac{\partial t_{xy}^{(s)}}{\partial A_n^{(1)}} \right] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (23a)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_n^{(2)}} = 2 \sum_{k=1}^S \left[t_{xx}^{(s)} \frac{\partial t_{xx}^{(s)}}{\partial A_n^{(2)}} + t_{xy}^{(s)} \frac{\partial t_{xy}^{(s)}}{\partial A_n^{(2)}} \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (23b)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D_n^{(1)}} = 2 \sum_{k=1}^S \left[t_{xx}^{(s)} \frac{\partial t_{xx}^{(s)}}{\partial D_n^{(1)}} + t_{xy}^{(s)} \frac{\partial t_{xy}^{(s)}}{\partial D_n^{(1)}} \right] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (23c)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D_n^{(2)}} = 2 \sum_{k=1}^S \left[t_{xx}^{(s)} \frac{\partial t_{xx}^{(s)}}{\partial D_n^{(2)}} + t_{xy}^{(s)} \frac{\partial t_{xy}^{(s)}}{\partial D_n^{(2)}} \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (23d)$$

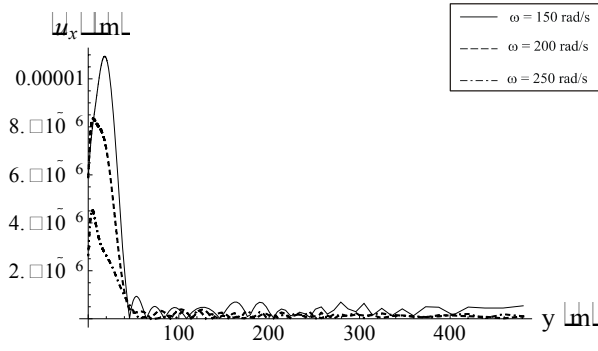
bağıntıları elde edilir. Böylece (22) bağıntılarından da $4 \times N + 2$ adet koşul elde edilmiş ve sonuçta geri kalan bilinmeyen sayısı kadar koşul yazılmış olur. Elde edilen bu lineer denklem takımı çözülerek bilinmeyen katsayılar hesaplanır.

4. SONUÇ

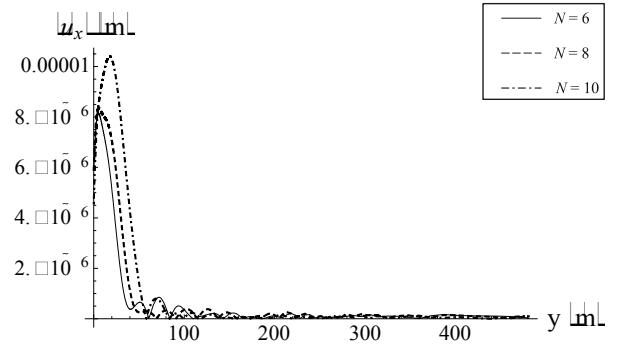
Seçilen P_0 zorlama genliği, ω zorlama frekansı, a oyuk yarıçapı, H oyuk merkezinin serbest yüzeye olan derinliği, λ ve μ malzeme sabitleri ve N terim sayısı için istenilen herhangi bir noktada yerdeğiştirme ve gerilme bileşenleri hesaplanabilir. Sayısal uygulama için kütle yoğunluğu $\rho = 2665 \text{ kg/m}^3$, Elastisite modülü $E = 7.567 \times 10^9 \text{ Pa}$, Poisson oranı $\nu = 0.25$, iç basınç genliği $P_0 = 100000 \text{ N/m}$ alınmış, dairesel silindirik oyuk yarıçapı $a = 5 \text{ m}$, oyuk merkezinin serbest yüzeyden olan derinliği $H = 10 \text{ m}$ seçilmiş ve sayısal hesaplamalarda N sayısının 8 alınmasının yeterli yaklaşıklık sağladığı görülmüştür. P_0 tekil yük zorlamasının oyuk ikinci bölgesine $\alpha = 3\pi/4$ merkez açılı bir nokta üzerine yüklenmesi göz önüne alınarak, bu bölgedeki yükleme durumundaki sonuçlar elde edilmiştir.

Denklemlerin kapalı olarak çözülmesine karşılık sınır koşullarının sağlatılmasında güçlük ortaya çıkmıştır. Kutupsal koordinatların kullanılması ile oyuk yüzeyindeki sınır koşulları tam olarak sağlatılmış, ancak serbest yüzey üzerindeki sınır koşulları yaklaşık olarak sağlatılabilmektedir.

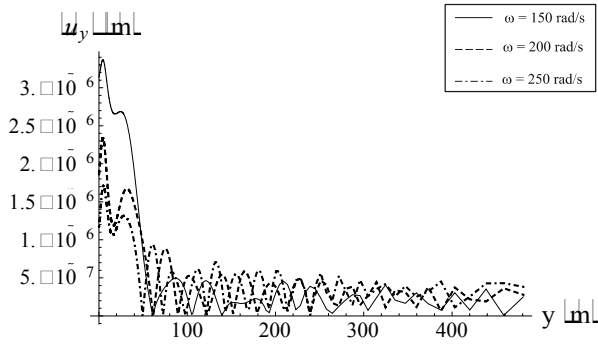
ω ve N 'nin çeşitli değerlerine göre yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerinin değişimleri grafikler yardımı ile verilmiştir. Bu grafiklerden, serbest yüzey üzerinde, her iki tarafta derinliğin ortalama olarak 5 katı gibi bir bölgede oyuktan gelen dinamik etkilerin önemli olduğu, bu bölgenin dışında etkilerin hızla azaldığı gözlenmiştir.



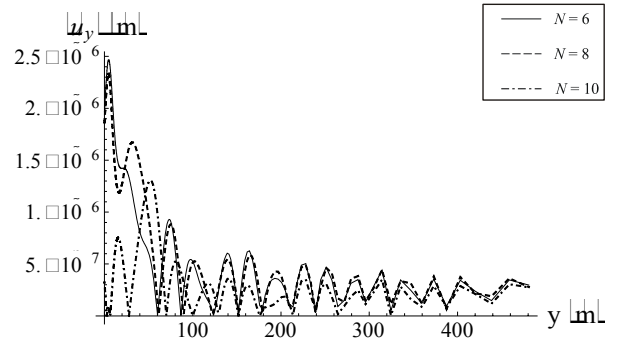
Şekil 3 $N=8$, $a=5\text{m}$ ve $H=10\text{m}$ için, serbest yüzeydeki $|u_x|$ yerdeğiştirmesinin ω ile değişimi



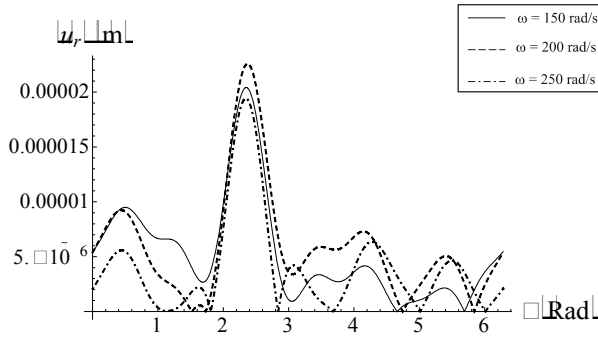
Şekil 4 $\omega=200\text{rad/s}$, $a=5\text{m}$ ve $H=10\text{m}$ için, serbest yüzeydeki $|u_x|$ yerdeğiştirmesinin terim sayısı ile değişimi



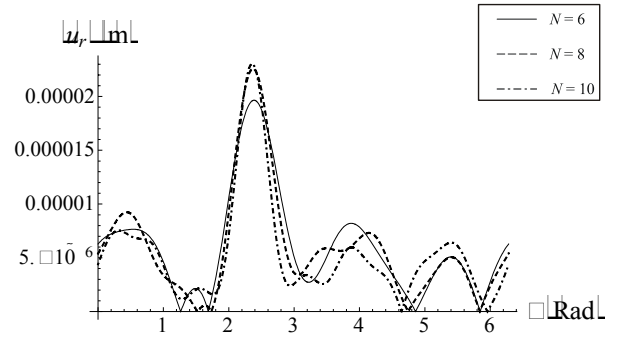
Şekil 5 $N=8$, $a=5\text{m}$ ve $H=10\text{m}$ için, serbest yüzeydeki $|u_y|$ yerdeğiştirmesinin ω ile değişimi



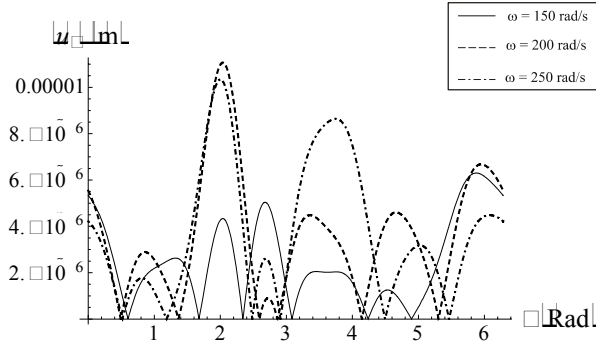
Şekil 6 $\omega=200\text{rad/s}$, $a=5\text{m}$ ve $H=10\text{m}$ için, serbest yüzeydeki $|u_y|$ yerdeğiştirmesinin terim sayısı ile değişimi



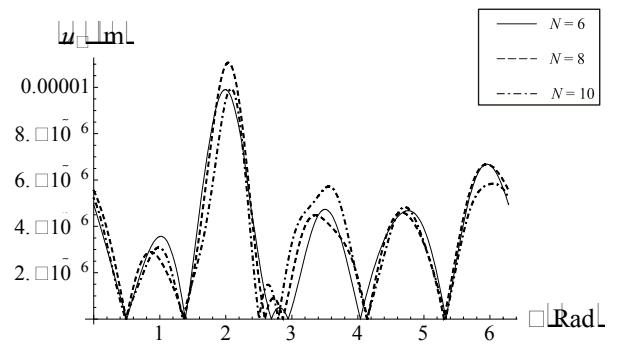
Şekil 7 $N=8$, $a=5\text{m}$ ve $H=10\text{m}$ için, oyuk çevresindeki $|u_r|$ yerdeğiştirmesinin ω ile değişimi



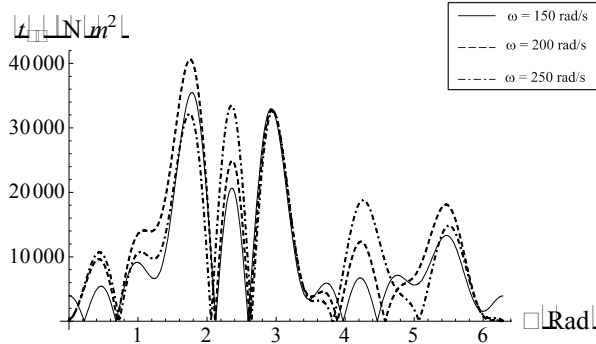
Şekil 8 $\omega=200\text{rad/s}$, $a=5\text{m}$ ve $H=10\text{m}$ için, oyuk çevresindeki $|u_r|$ yerdeğiştirmesinin terim sayısı ile değişimi



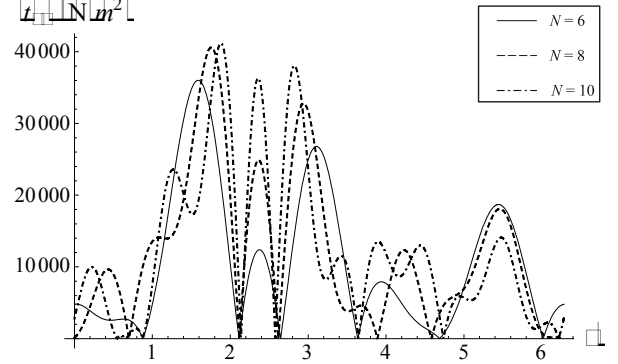
Şekil 9 $N=8$, $a=5m$ ve $H=10m$ için, oyuk çevresindeki $|u_{\theta}|$ yerdeğiştirmesinin ω ile değişimi



Şekil 10 $\omega=200\text{rad/s}$, $a=5m$ ve $H=10m$ için, oyuk çevresindeki $|u_{\theta}|$ yerdeğiştirmesinin terim sayısı ile değişimi



Şekil 11 $N=8$, $a=5m$ ve $H=10m$ için, oyuk çevresindeki $|t_{\theta\theta}|$ gerilmesinin ω ile değişimi



Şekil 12 $\omega=200\text{ rad/s}$, $a=5m$ ve $H=10m$ için, oyuk çevresindeki $|t_{\theta\theta}|$ gerilmesinin terim sayısı ile değişimi

TEŞEKKÜR

Bu çalışma İ. T. Ü. Bilimsel Araştırma Koordinatörlüğü tarafından desteklenmiştir.

Proje No: 31533

KAYNAKLAR

- [1] **Eringen, A.C. and Şuhubi, E.S.**, 1975. *Elastodynamics*, Vol II, Academic Press, New York.
- [2] **Graff, K.F.**, 1991. *Wave motion in elastic solids*, Dover Publications, New York.
- [3] **El-Akily, N. and Datta, S.K.**, 1980. Response of a circular cylindrical shell to disturbances in a half- space, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **8**, 469-477.
- [4] **El-Akily, N. and Datta, S.K.**, 1981. Response of a circular cylindrical shell to disturbances in a half-space-Numerical results, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **9**, 477-487.
- [5] **Datta, S.K., Shah A.H., Wong K.C.**, 1984. Dynamic stresses and displacements in buried pipe, *Journal of Engineering Mechanics*, **110**, 1451-466.

- [6] **Wong K.C., Shah A.H. and Datta, S.K.**, 1985. Dynamic stresses and displacements in a buried tunnel, *Journal of Engineering Mechanics*, **111**, 218-234.
- [7] **Bayıroğlu, H.**, 1995. Yarı düzlemde gömülü yapıların zorlanmış titreşimleri, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [8] **Lee, V.W. and Karl, J.**, 1992. Diffraction of SV waves by underground, circular, cylindrical cavities, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **11**, 445-456.
- [9] **Lee, V.W., Chen, S. and Hsu, I.R.**, 1999. Antiplane diffraction from canyon above subsurface unlined tunnel, *Journal of Engineering Mechanics*, **125**, 668-674.
- [10] **Davis, A.C., Lee, V.W. and Bardet, J.P.**, 2001. Transverse response of underground cavities and pipes to incident SV waves, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **30**, 383-410.

