

## EĞRİSEL LAMİNA CAM KİRİŞLERİN DOĞRUSAL OLMAYAN DAVRANIŞLARI

Ebru Dural, Mehmet Zülfü Aşık

Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Mühendislik Bilimleri Bölümü, 06531, Ankara  
e-mail: onlu@metu.edu.tr, azulfu@metu.edu.tr

### ÖZET

Bu çalışmada bir lamina cam eğrisel kirişin tüm potansiyel enerjisinin en azlanması yolu ile lamina cam kirişlerin eğilme davranışı üzerine bir matematiksel model geliştirilmiştir. Modelin geliştirilmesinde lamina cam kirişler çok ince olduğundan büyük yerdeğiştirme kuramı kullanılmıştır. Ardından bu model deney yapılmak suretiyle ve sonlu elemanlar modelleri kullanılarak doğrulanmıştır. Büyük yer değiştirmelere maruz kalan lamina cam kirişlerin sınır şartlarına bağlı olarak doğrusal veya doğrusal olmayan davranış gösterebilecekleri sonucuna varılmıştır.

### ABSTRACT

In this study, a mathematical model is developed for the bending behavior of the laminated glass curved beams by minimizing the total potential energy of a laminated glass beam. The large deflection theory is used in the developing the model since the glass beams are very thin. The model is then validated by the experimental and finite element models for the simply and fixed supported beams respectively. It is presented that the behavior of laminated glass beams under large deflections could be linear or nonlinear regarding the boundary conditions or constraints.

### 1.Giriş

Lamina camlar emniyeti sağlamak amacıyla binaların dış cephelerinde, araba ve otobüslerin ön camlarında, otobüs yan camlarında, otobüs duraklarında ve deprem bölgelerindeki yapılarda kullanılır. Cam kırılğan olduğu ve parçalandığı zaman çok tehlikeli olduğu için bir yapı elemanı olarak cam için güvenlik çok önemli olmaktadır. Lamina camlar emniyet amaçlı olarak bina cephe kaplamalarında kullanılmaktadır. Rüzgardan veya herhangi bir darbeden dolayı kırıldıklarında parçalanıp dağılmayan lamina camlar cam kesiklerinden dolayı

meydana gelebilecek yaralanmaları ve hatta ölümleri önleyebilir. Bunu sağlayabilmek için iki ince cam plak arasına polyvinyll butyral (PVB) diye adlandırılan elastomerik bir tabaka konulur. Bu tabaka sadece parçaların etrafa saçılıp insanları kesmesini engellemekle kalmaz aynı zamanda ısı ve ses yalıtımını sağlamaya da yardımcı olur. Ayrıca lamina camların yekpare camlara nazaran ultraviyole ışınları önleme, güneş enerjisinden yararlanma ve aydınlık kontrolünü sağlama gibi avantajları da vardır.

Yukarıda sayılan nedenlerden dolayı lamina cam birimlerin kullanılması yaygınlaşmaktadır ve bu da beraberinde lamina cam birimlerle ilgili deneysel ve analitik araştırmaların artmasına sebep olmaktadır. Bilindiği gibi lamina cam birimi iki ince kiriş ve bunları birbirine bağlayan elastomerik tabakadan oluşur. İnce plaklar rüzgar yüklerinden ve hatta kendi ağırlıklarından dolayı dahi kolayca yerdeğiştirmelerin etkisi altına girmektedirler. Bu nedenle lamina cam birimlerin doğrusal olmayan çözümlemesinin yapılması gerekir. Aksi takdirde elde edilen sonuçlar deneysel sonuçlara kabul edilebilir yakınlıkta olmayacaktır ve hata payı yüksek olacaktır.

İlk defa Hooper (1973) [1] lamina cam kirişleri incelemek için matematiksel model geliştirdi ve deneyler yaptı. Kısa süreleri yükleme deneylerinden elde ettiği sonuçlar ile matematiksel modelden elde ettiği sonuçlar arasında yüzde 2 fark vardı. Sünme deneylerinin sonucu olarak yumuşak aratabakanın kesme modülünde 10 ile 20° C derece arasında düşmeler olurken sert aratabakanın kesme modülünde 30 ile 40° C derece arasında düşmeler olduğunu gördü ve PVB'nin plastisayzır içeriğinin miktarının önemine dikkat çekti.

Vallabhan vd. (1987) [2] dayanım çarpanı için çeşitli düzgün yayılı yük ve cam plak geometrilerini göz önüne alarak yekpare ve tabakalı camlar için çözümleme yaptılar. Çözümleme için Von Karman plak kuramını kullanarak doğrusal olmayan türevsel denklemler geliştirdiler ve bu denklemleri çözmek için sonlu farklar yöntemi kullandılar. Çalışmaları sonucunda bazı plak boyutları için dayanım çarpanının 1 değerini aşabileceğini ortaya çıkardılar.

Behr vd. (1985), [3] lamina, tabakalı ve yekpare camlar üzerine deneyler yaptılar. Deneyler sonucunda lamina camlarının davranışlarının oda sıcaklıklarında yekpare caminkine yüksek sıcaklıklarda ise tabakalı camınki yaklaştığını gördüler. Böylece lamina camın davranışının sınırlarının, toplam olarak aynı kalınlıkta, tabakalı camlar ve yekpare camlar olduğu sonucu vardılar. Doğrusal olmayan davranış göz önüne alındığında tabakalı camdaki en büyük gerilimin yekpare camdaki en büyük gerileme oranının 1.5 olduğunu gösterdiler. Bilindiği gibi bu oran doğrusal davranış göz önüne alındığında 2'dir.

Behr vd. (1993) [4] deneylerine devam ettiler ve bu deneyler sonucunda lamina camlar için dayanım çarpanının 1 alınabileceğine karar verdiler. Dayanım çarpanının 1 olabileceği daha sonra Minor ve Reznik (1990), Kanabolo ve Norville (1985), Linden vd. (1984), Reznik ve Minor (1986) tarafından yapılan deneylerle de desteklendi. Deneylerde kullanılan lamina camlardaki aratabaka PVB'nin içeriği azdı ve aratabaka sertti.

Vallabhan vd. (1993) [5] değişim ilkelerine dayanarak lamina camların çözümlemesi için oldukça etkin bir matematiksel model geliştirdiler. Modelde lamina camların davranışı beş doğrusal olmayan türevsel denklemlerle temsil edildi. Bu denklemler sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözüldü ve sonuçlar Texas Tech üniversitesinin İnşaat Mühendisliği Bölümü'ndeki Cam Araştırma Laboratuvarı'nda yapılan deneylerle doğrulandı.

Minor vd. (1990) [6] yekpare ve lamina camların çökme dayanımlarını kıyaslamak için bazı testler yaptılar. Ve bu testler sonucunda oda sıcaklığında lamina ve yekpare camların çökme dayanımlarının eşit olduğunu fakat sıcaklık yükseldikçe lamina camların çökme dayanımlarının azaldığı sonucuna vardılar.

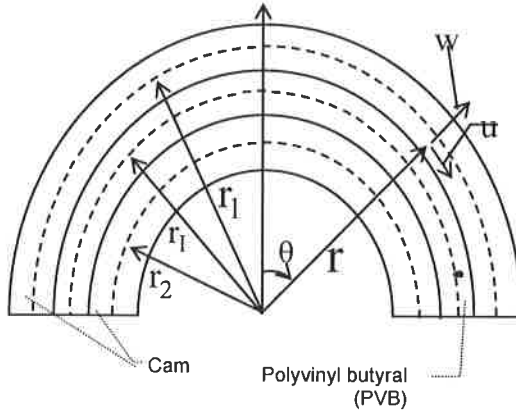
Norville vd. (1998) [7] lamina cam kirişlerin çözümlemesi için mekanik bir model geliştirdiler. Modeli doğrulamak için model sonuçlarını Behr vd. (1993) yaptığı deneylerin sonuçlarıyla karşılaştırdılar.

Van Duser vd. (1999) [8] lamina cam plaklar üzerine çalışma geliştirdiler. Aratabakayı viskoelastik malzeme olarak modellediler. Çalışmalarında sonlu elamanlar yöntemi kullandılar. Yazarlar lamina camların yekpare camlardan daha dayanıklı olabileceği sonucuna vardılar.

Vlasov vd. (1961) [9] eğrisel kirişlerin denge denklemlerini elde etmek için eğrilik terimlerini düzlemsel kirişlerin denklemlerine yerleştirdiler.

Yoo vd. (1982) [10] eğrisel kirişler için denge denklemlerini enerji ve değişim ilkelerini kullanarak elde ettiler ve Vlasov'un teorisinin geçerliliğini ortadan kaldırdılar.

Bu çalışmada ise lamina camların gittikçe artan bir şekilde kullanılmaya başlanmış olması ve eğrisel lamina cam kirişlerle ilgili araştırmalar yapılmamış olması nedeniyle eğrisel lamina cam kirişlerin doğrusal olmayan davranışlarını çözümlemesi yapılmıştır.



Şekil 1. Lamina Cam Eğrisel Kiriş

Çalışmanın konusu olan kemer elemanlar kemerli kubbe, uzay yapıları, kemerli köprü ve otoyol inşaatlarının tasarımında kullanılmaktadırlar. Eğrisel kirişlerin uygulamada pek fazla kullanılmamasının nedeni yapısal davranışları ile ilgili bilgilerin eksik olmasından kaynaklanmaktadır. Kavisli olmalarından dolayı düz kirişlerden farklılık gösterirler. Matematiksel güçlükler nedeniyle yapılan çalışmaların çoğunda eğrisel kirişlerin doğrusal davranışları incelenmiştir.

## 2. Matematiksel Model

Şekil 1' de verilen eğrisel lamina cam kirişin eğilme davranışı üzerine matematiksel model geliştirilmiştir. Matematiksel model eğrisel kirişin yerdeğiştirme ve gerilme davranışlarını incelemek için geliştirilmiştir. Lamina camlar çok ince olduklarından ve kalınlıklarına göre büyük yerdeğiştirmelere maruz kaldıklarından dolayı büyük yerdeğiştirme kuramı kullanılmıştır. Model cam kirişin toplam potansiyel enerjisinin en azlaması yolu ile geliştirilmiştir. Eğrisel kirişin toplam potansiyel enerjisini yazmak için cam kirişlerdeki eğilme ve aksel gerinme enerjileri, ara tabakadaki kesme gerinmesi enerjisi ve kuvvet potansiyel enerjisi göz önüne alınır.

Eğrisel lamina kirişteki toplam potansiyel enerji aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} \Pi &= U + V \\ \Pi &= U_m^1 + U_b^1 + U_m^2 + U_b^2 + U_f + V \\ \Pi &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_V \frac{1}{2} E (\varepsilon_m^i)^2 dV + \int_V \frac{1}{2} E (\varepsilon_b^i)^2 dV \right\} \\ &+ \int_V \frac{1}{2} G (\gamma_f)^2 dV = \int_0^s q w ds \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemlerde  $U_m^1$  ve  $U_b^1$  dıştaki eğrisel cam kiriş için sırasıyla aksel gerinme ve eğilme enerjileridir ;  $U_m^2$  ve  $U_b^2$  ise içteki cam kirişin aksel gerinme ve eğilme enerjileridir. Üçüncü terim ara tabakadaki kesme gerinim enerjisidir. Ara tabakanın aksel gerinme enerjisi kesme gerinme enerjisine kıyasla ihmal edilebilecek kadar küçüktür ve bu sebeple sistemin toplam potansiyel enerjisini yazarken göz ardı edilir. Son terim ise uygulanan kuvvetten dolayı oluşan kuvvet potansiyel enerjisidir. Buradaki aksel ve gerilmeleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varepsilon_m^i = \frac{u_{i\theta} + w}{r_i} + \frac{1}{2} \left( \frac{w_\theta}{r_i} \right)^2 \quad \varepsilon_b^i = -z \frac{w_{\theta\theta}}{r_i^2}$$

Ara tabakanın kesme gerinmesi ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\gamma_f = \frac{u_1 - u_2 - \left( \frac{1}{r_1} \frac{h_1}{2} + \frac{1}{r_2} \frac{h_2}{2} + \frac{t}{r_f} \right) \frac{dw}{d\theta}}{t}$$

Değişim ilkeleri kullanılarak eğrisel lamina cam kirişlerin davranışını açıklayan doğrusal olmayan üç türevsel hakim denklem ve sınır koşulları elde edilmiştir.

$$\frac{d}{d\theta^2} \left( EI \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right) - \frac{d}{d\theta} \left( \left( \frac{N1}{r_1} + \frac{N2}{r_2} \right) \frac{dw}{d\theta} \right) + (N1 + N2) +$$

$$Gbr_1 \left( \frac{1}{r_1} \frac{h_1}{2} + \frac{1}{r_2} \frac{h_2}{2} + \frac{t}{r_1} \right) \frac{d\gamma_1}{d\theta} - qr_1 = 0$$

$$\frac{dN1}{d\theta} - Gb\gamma_1 = 0$$

$$\frac{dN2}{d\theta} + Gb\gamma_1 = 0$$

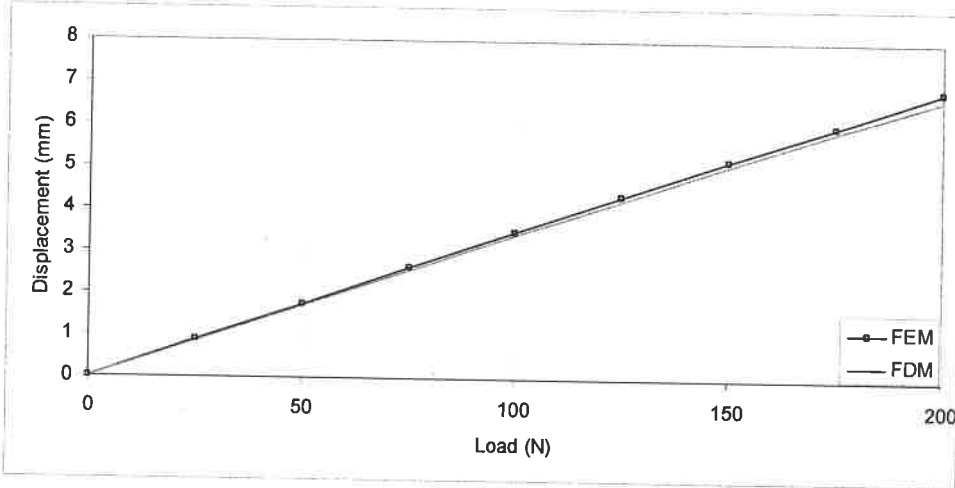
Bu denklemler de:

$$N1 = EA_1 \left( \frac{u_\theta + w}{r_1} + \frac{1}{2r_1^2} w_\theta^2 \right)$$

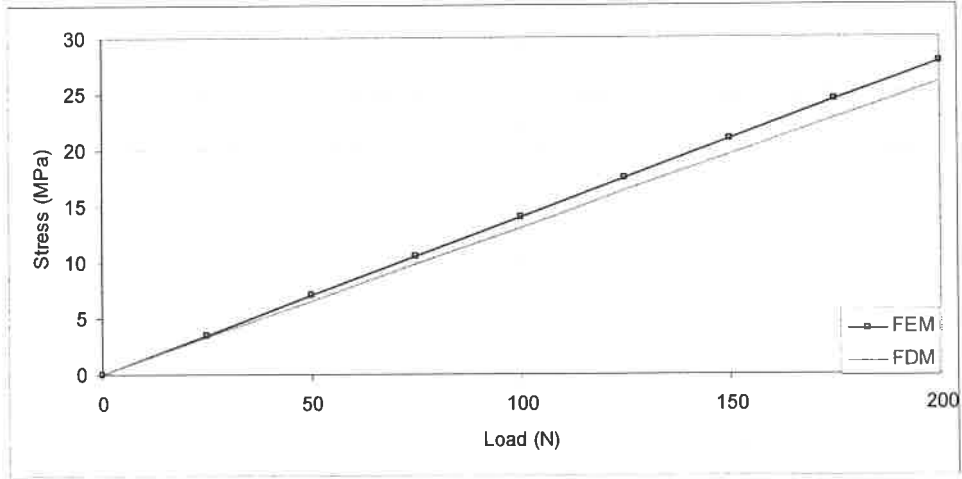
$$N2 = EA_2 \left( \frac{u_\theta + w}{r_2} + \frac{1}{2r_2^2} w_\theta^2 \right)$$

### 3. Sayısal Çözüm ve Sonuçlar

Hakim denlemleri çözmek için sayısal yöntemler kullanılmıştır. Bu hakim denklemler sonlu farklar yöntemi kullanılarak matris denklemlerine dönüştürülmüştür. Doğrusal olmayan denklemlerin çözülmesinde yakınsamayı sağlayabilmek için değişken alt rahatlatma yöntemi kullanılmıştır. Modelin doğruluğunu gösterebilmek için elde edilen sonuçlar sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı.



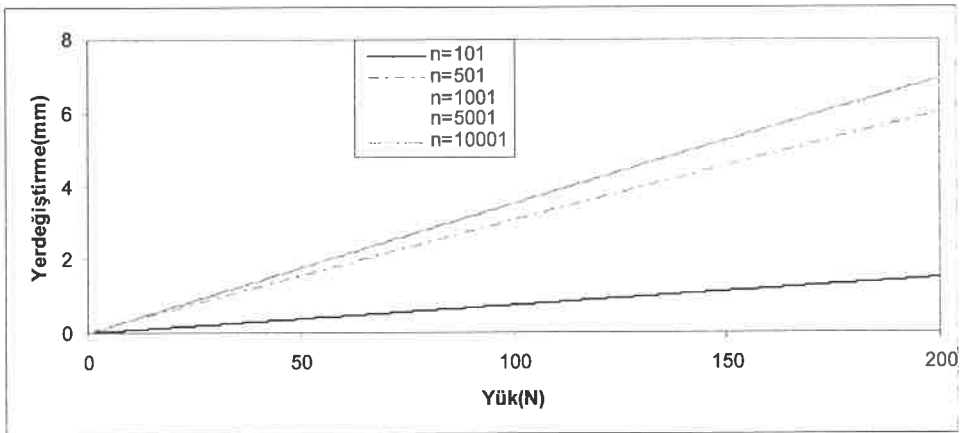
Şekil 2. Basit mesnetli lamina kiriş için kirişin merkezindeki yerdeğiştirme-yük grafiği



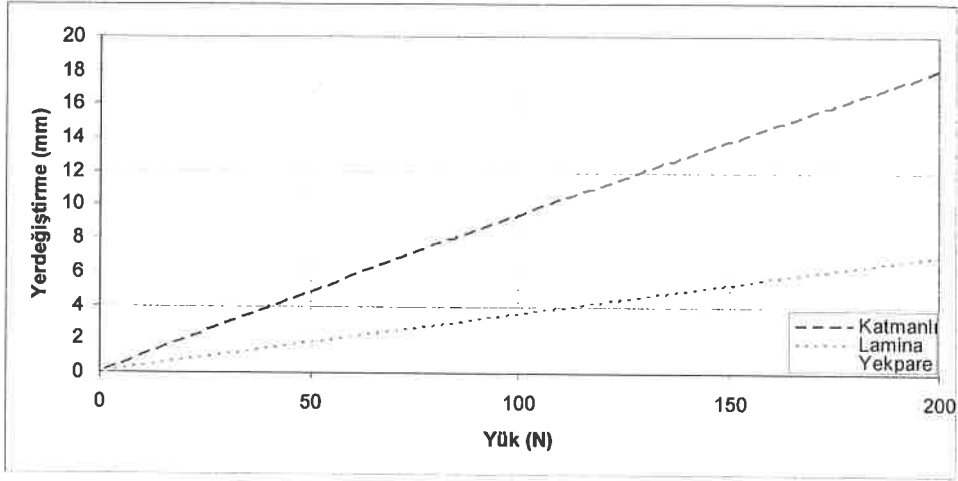
Şekil 3. Basit mesnetli lamina kiriş için enbüyük gerilme-yük grafiği

Yukarıdaki grafiklerde kullanılan lamina camın geometrik ve malzeme özellikleri şöyledir: kirişin eğrilik yarıçapı 1 metredir, herbir camın kalınlığı 5 mm, PVB'nin kalınlığı 0.76 mm, PVB'nin kesme modülü 1000 kPa ve camın elastik modülü 72 GPa'dır. Şekillerden görüldüğü gibi sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçları ile modelden elde edilen sonuçlar birbirine oldukça yakındır.

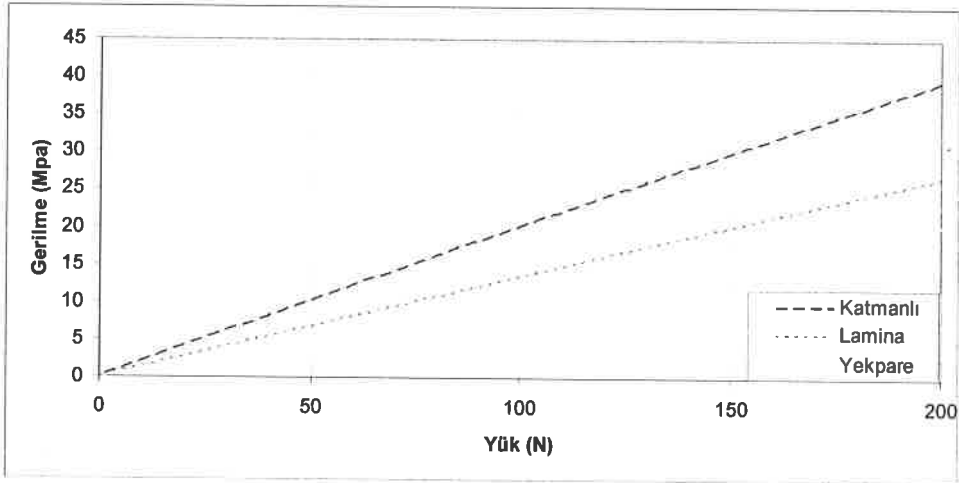
Modelin çözümünde en iyi yaklaşımı veren aralık sayısını bulmak için sayısal testlerden faydalanılmıştır. Sayısal test sonuçları Şekil 4' te verilmiştir. 10000 ve 5000 aralık için elde edilen sonuçlar birbirine çok yakın olarak bulunmuştur. Bu nedenle hesaplamalarda 5000 aralık kullanılması uygun görülmüştür.



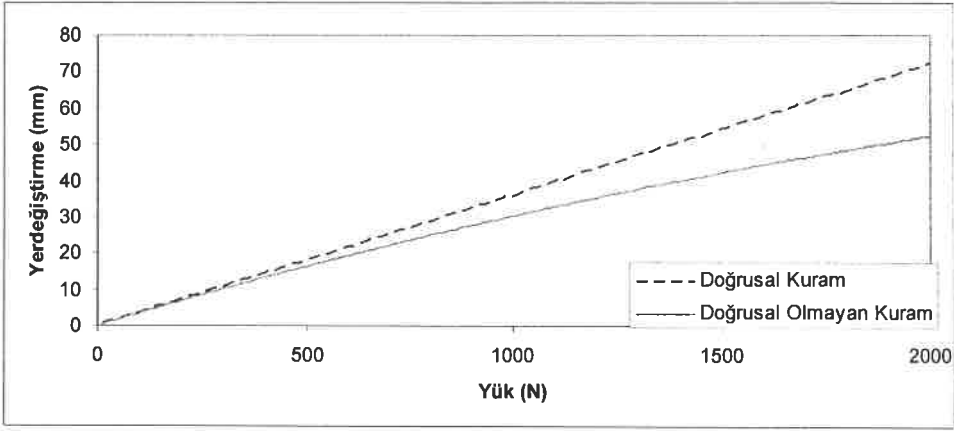
Şekil 4. Basit mesnetli kiriş için aralık sayısına göre yerdeğiştirme-yük değişim grafiği



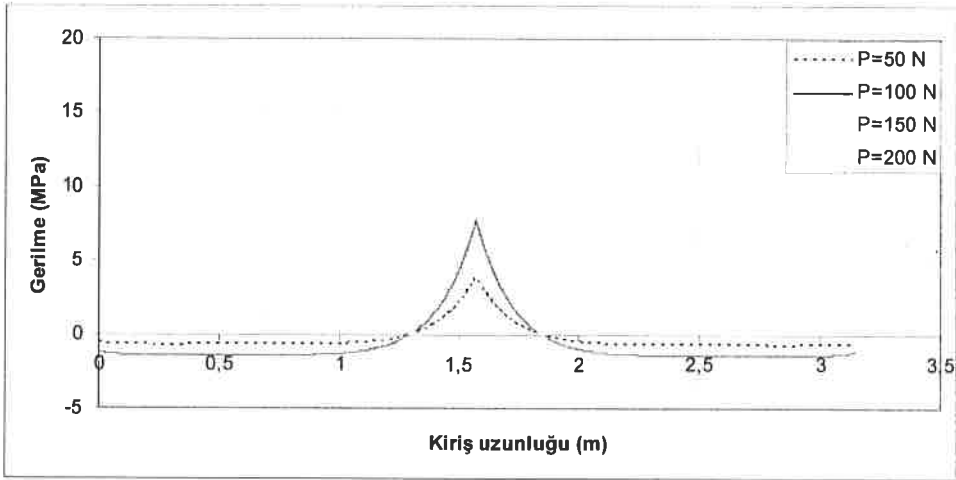
Şekil 5. Basit mesnetli kiriş için yerdeğiştirme-yük grafikleri



Şekil 6. Basit mesnetli kiriş için gerilme-yük grafikleri

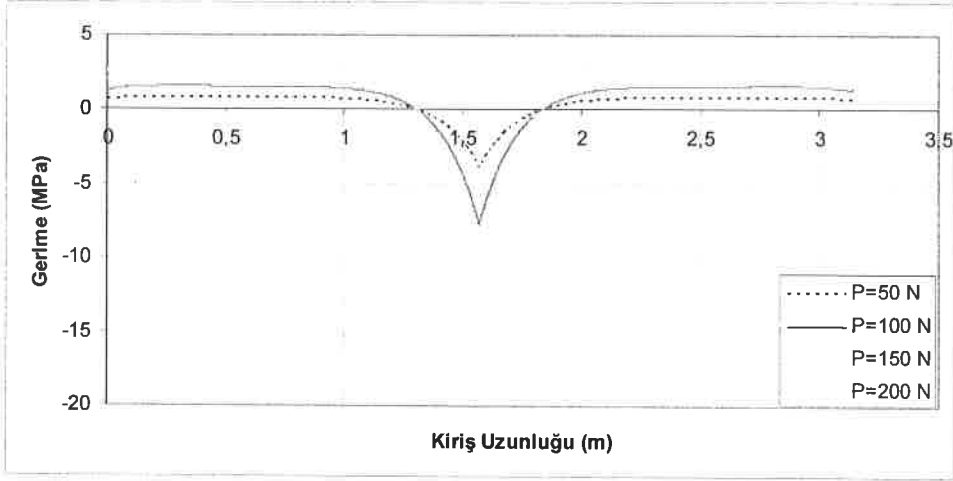


Şekil 7. Basit mesnetli kiriş için doğrusal ve doğrusal olmayan yerdeğiştirme-yük grafikleri



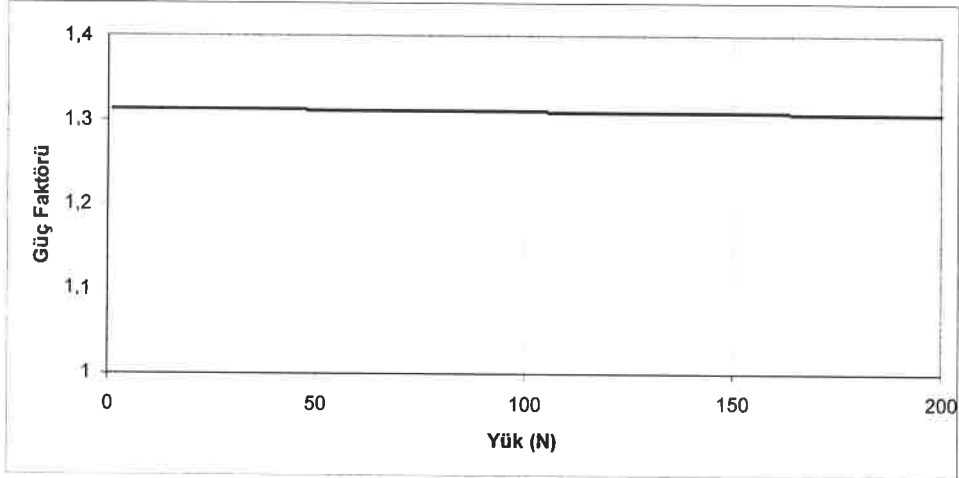
Şekil 8. Üstteki camın üst yüzeyinde kiriş uzunluğu boyunca oluşan gerilmeler





Şekil 9. Altındaki camın alt yüzeyinde kiriş uzunluğu boyunca oluşan gerilmeler

Lamina camda oluşan maksimum çekme gerilmesinin yekpare cam'da oluşan maksimum çekme gerilmesine oranı güç faktörü olarak tanımlanır. Güç çarpanı lamina cam sistemin gerilme ve yerdeğiştirme davranışlarının yekpare camın davranışından faydalanılarak elde edilmesini sağlar.



Şekil 10. Eğrisel lamina kirişin güç faktörü yük değişim grafiği.

## Sonuç

Bu çalışmada eğrisel lamina cam kirişlerin doğrusal olmayan davranışları matematiksel olarak modellenmiştir. Elde edilen denklemler sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri kullanılarak çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. İki yöntemle elde edilen sonuçlar birbirine uyumlu bulunmuştur. Lamina cam eğrisel kirişin uygulanan yükler altındaki davranışı beklenildiği gibi katmanlı ve yekpare cam kirişler arasında kalmaktadır.

## Kaynaklar

- [1] Hooper, J.A. "On the bending of architectural laminated glass", *Int. J. Mech. Sci.*, 15, 309-323, 1973 .
- [2] Vallabhan, C.V., Minor, J.E., Nagalla S.R. "Stresses in layered glass units ve monolithic glass plates", *Journal of Structural Engineering*, 113(1), 36-43, 1987 .
- [3] Behr, R.A., Minor, J.E., Linden, M.P., Vallabhan, C.V.G. "Laminated Glass units under uniform lateral pressure", *Journal of Structural Engineering*, 111(5), 1037-1050, 1985 .
- [4] Behr, R.A., Minor, J.E., Norville, H.S. "Structural behavior of architectural laminated glass", *Journal of Structural Engineering*, 119(1), 202-222, 1993 .
- [5] Vallabhan, C.V., Das, Y.C, Magdi, M., Asik, M., Bailey, J.R. "Analysis of laminated glass units", *Journal of Structural Engineering*, 119(5), 1572-1585, 1993 .
- [6] Minor, J.E., Reznik, P.L. "Failure strengths of laminated glass", *J. Struct. Engrg.* , 116(4), 1030-1039 , 1990 .
- [7] Norville, H.S., King, K.W., Swofford J.L. "Behavior ve strength of laminated glass", *Journal of Engineering Mechanics*, 124(1), 46-53, 1998 .
- [8] Van Duser, A., Jagota, A., Bennison, S.J. "Analysis of glass/polyvinyl butyral laminates subjected to uniform pressure" *Journal of Engineering Mechanics*, 125(4), 435-442, 1999.
- [9] Vlasov, V Z, *Thin-Walled Elastic Beams*, 2nd Ed, National Science Foundation, Washington, DC, 1961.
- [10] Chai Hong Yoo, M.ASCE, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 108 (6), 1351-1369 ,1982 .
- [11] Asik MZ, Tezcan S "A Mathematical Model for the Behavior of Laminated Glass Beams", *J. of Computers&Structures*, (Accepted for publication, 2005.
- [12] Asik MZ "Laminated Glass Plates: Revealing of Nonlinear Behaviour", *J. of Computers&Structures*, 81(28-29), 2659-2671, 2003 .
- [13] Behr, R.A., Linden, M.P., ve Minor, J.E. "Load duration ve interlayer thickness effects on laminated glass", *Journal of Structural Engineering*, 112(6), 1441-53, 1986. .
- [14] Behr, R.A., Minor, J.E., Norville, H.S. "Structural behavior of architectural laminated glass", *Journal of Structural Engineering*, 119(1), 202-222, 1991 .
- [15] Bennison, S.J., Jagota, A., Smith, C.A. "Fracture of glass/poly(vinyl butyral) laminates in biaxial flexure", *J. Am. Ceram. Soc.*, 82(7), 1761-1770, 1999.
- [16] Langhaar, H.L. *Energy Methods in Applied Mechanics*, John Wiley ve Jones, Inc., New York.Minor, J.E., 1962.
- [17] Tuzcu, İ.E. "Thickness ve strength factor analyses of simply supported laminated glass units", M.S. Thesis, Middle East Technical University, Ankara, 1998.