İKİNCİ MERTEBEDEN DOĞRUSAL DİFERANSİYEL DENKLEM VE YEREL OLMAYAN KOŞULLAR İLE VERİLMİŞ PROBLEM İÇİN TEMEL ÇÖZÜM

Kamil ORUÇOĞLU

İ.T.Ü Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Maslak 34469, İSTANBUL
e-mail:koruc@itu.edu.tr

ÖZET

Çalışmada yerel olmayan koşullara ile verilmiş ikinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklem için sınır değer problemi ele alındı. Bu tür problemler için Green fonksiyonu kavramı verildi. Bazı basit örnekler incelendi.

ABSTRACT

In this study, the boundary value problem given by non-local conditions and second order linear ordinary differential equation is considered. A Green function concept is given for such a problem. Some simple examples are investigated.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada

$$(V_2 u)(t) \equiv u''(t) + A_1(t)u'(t) + A_0(t)u(t) = z_2(t), \quad t \in G = (0,1) \tag{1.1}$$

değişken katsayılı ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi

$$V_i u \equiv a_i u(0) + b_i u'(0) + \int_0^1 g_i(\varsigma)u''(\varsigma)d\varsigma = z_i, \text{ i=0, 1} \tag{1.2}$$

yerel olmayan koşulları ile birlikte ele alındı. Burada sırası ile $z_2(t) \in L_p(G)$; $z_0, z_1 \in R$ verilmiş fonksiyon ve sayılardırlar. $a_i, b_i \in R$ keyfi sayılar ve $g_i(\zeta) \in L_p(G)$ olan fonksiyonlardır. R reel sayılar uzayını, $L_p(G)$ ise G' de p' inci mertebeden integre edilebilen fonksiyonlar uzayını göstermektedir. (1.1) ve (1.2) ile verilen problemin çözümü

$$W_p = W_p^{(2)}(G) = \left\{ u \,\middle|\, \frac{du^j}{dt^j} \in L_p(G), \quad j = 0,1,2 \right\}$$

şeklinde tanımlanan Banach uzayında incelendi. Bu uzayda norm

$$\|u\|_{W_p} = \sum_{j=0}^{2} \left\| \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L_p(G)}$$

şeklinde tanımlanmıştır. $E_p = L_p(G) \times R \times R$ bir Banach uzayını göstersin. $V = (V_2, V_1, V_0)$ ve $z = (z_2(t), z_1, z_0)$ olmak üzere bir $V : W_p \to E_p$ operatörü tanımlanırsa (1.1), (1.2) problemi

$$Vu = z \tag{1.3}$$

şeklinde yazılabilir. (1.3) problemi homojen olmayan bir problemdir. V operatörü W_p 'den E_p 'ye sınırlı bir operatördür.

Sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan Green fonksiyonunun oluşturulması yöntemi bilinen klasik yöntemler içinde önemli bir yere sahiptir [1,2]. Bu yöntemin temeli kısmi integrasyon formülüne dayanmaktadır. Bu yöntem ancak incelenen denklemin katsayılarının yeterince türeve sahip olması ve sınır koşullarının yerel olması gibi bir takım ek kısıtlar halinde uygulanabilmektedir. Ancak (1.3) ile sunulmuş problemdeki sınır koşulları yerel olmayan koşullar olduğu için bilinen klasik yöntemleri kullanarak temel çözüm bulunamaz. Bu nedenle [3, 9]' de S. S. Akhiev tarafından verilmiş olan temel çözüm kavramından yararlanarak (1.3) problemi incelendi. Bilinen yöntemlerden farklı olarak gerçek eş problem tanımlandı. Bu eş problem yardımı ile çözümün elde edilebileceği gösterildi. Bu yöntemin temeli çözüm uzayının ve onun eş uzayının yapısı ile ilişkilidir. Denklem ve sınır koşulları aynı öneme sahiptir. Ancak bilindiği gibi diğer yöntemlerde koşullar homojen, denklem ise homojen olmayan denklem olarak ele alınmaktadır.

2. EŞ OPERATÖR VE GREEN FONKSİYONELİ

(1.3) problemi yeni tipli eş problem kavramı yardımı ile incelenmiştir. Bu kavram $V : W_p \to E_p$ operatörünün gerçek $V^* : (E_p)^* \to W_p^*$ eş operatörü yardımı ile tanımlanmıştır. Eş operatörü bulmak için W_p uzayının yapısı kullanılmıştır. Bilindiği gibi $u \in W_p$ fonksiyonu için $u(0)$, $u'(0)$ değerleri ve $u''(t)$ fonksiyonu bağımsız elemanlardır. Yani keyfi z_0, z_1 sayıları ve keyfi $z_2(t) \in L_p(G)$ fonksiyonu verildiğinde onlar için tek olan öyle $u \in W_p$ fonksiyonu var ki $u(0) = z_0$, $u'(0) = z_1$ ve $u''(t) = z_2(t)$ olur. Bu ise W_p uzayının $W_p = L_p(G) \times R \times R$ şeklinde izomorfik açılıma sahip olduğunu gösterir. V^* operatörünün açık formunu elde etmek için $f = (f_2(t), f_1, f_0) \in E_q$ elemanı E_p üzerinde tanımlı bir fonksiyonel olarak ele alınır ve

$$f(Vu)=\int_0^1 f_2(t)(V_2u)(t)\,dt+f_1(V_1u)+f_0(V_0u), \quad u\in W_p \tag{2.1}$$

ifadesi (1.1), (1.2) ifadeleri ve $u\in W_p$ fonksiyonu kullanılarak hesaplanırsa

$$f(Vu)=\int_0^1 f_2(t)\left(u''(t)+A_1(t)(u'(0)+\int_0^t u''(\zeta)d\zeta)+A_0(t)(u(0)+u'(0)t+\int_0^t (t-\zeta)u''(\zeta)d\zeta)\right)$$

$$+f_0(a_0u(0)+b_0u'(0)+\int_0^1 g_0(s)u''(s)ds)+f_1(a_1u(0)+b_1u'(0)+\int_0^1 g_1(s)u''(s)ds) \tag{2.2}$$

elde edilebilir. Bir takım ara hesaplamalar ve düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned} f(Vu)&=\int_0^1 f_2(t)(V_2u)(t)\,dt+f_1(V_1u)+f_0(V_0u)\\ &=\int_0^1(\omega_2 f)u''(\zeta)d\zeta+(\omega_1 f)u'(0)+(\omega_0 f)u(0)\\ &\equiv(\omega f)(u), \forall f\in E_{q,} \forall u\in W_p, 1\le p\le\infty \end{aligned} \tag{2.3}$$

özdeşliği elde edilebilir. Burada

$$\begin{aligned} (w_2 f)(\zeta)&\equiv f_2(\zeta)+\int_\zeta^1 f_2(s)[A_0(s)(s-\zeta)+A_1(s)]ds+f_1g_1(\zeta)+f_0g_0(\zeta);\\ w_1 f&\equiv b_1f_1+b_0f_0+\int_0^1 f_2(s)[A_0(s)s+A_1(s)]ds;\\ w_0 f&\equiv a_1f_1+a_0f_0+\int_0^1 f_2(s)A_0(s)ds \end{aligned} \tag{2.4}$$

dir. W_p uzayında tanımlı olan lineer fonksiyonellerin genel formu gösterir ki $w=(w_2,w_1,w_0)$ operatörü V operatörünün eş operatörü gibi düşünülebilir, [3, 5]. Dolayısı ile (1.3) probleminin eş denklemi $\varphi=(\varphi_2,\varphi_1,\varphi_0)\in W^*$ olmak üzere

$$wf=\varphi \tag{2.5}$$

şeklinde yazılabilir. $\Delta=a_0b_1-a_1b_0$ tanımlansın. (2.4) ve (2.5) ten görüldüğü gibi $\Delta\neq 0$ ise $(2.5)_{2,3}$ den f_0 ve f_1 bulunabilir. Bu değerler $(2.5)_1$'e yerleştirilerek $f_2(\zeta)$' ya bağlı Volterra tipli integral denklem elde edilebilir. Bilindiği gibi Volterra integral denkleminin her zaman tek olan bir çözümü vardır. Keyfi $\varphi\in W^*(G)$ elemanı yerine özel olarak $\theta(t)(u)=u(t), \quad u\in W_p$, fonksiyoneli alınır ise (2.5) sistemi

$$
\begin{aligned}
&(w_2 f) = (t-\zeta)H(t-\zeta);\\
&w_1 f = t; \qquad\qquad (2.6)\\
&w_0 f = 1
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada $H(t)$ ile R üzerinde tanımlı Heaviside fonksiyonu gösterilmektedir.

Tanım 2.1. Varsayalım ki keyfi $t \in \overline{G}$ parametre değeri için

$$f = f(t) = (f_2(\zeta,t), f_1(t), f_0(t)) \in E_q$$

elemanı (2.6) sisteminin çözümüdür. O zaman $f(t)$'ye V operatörünün Green fonksiyoneli denir.

Tanıma göre f' nin birinci elemanı $f_2(\zeta,t)$ (1.3) probleminin klasik anlamda bilinen Green fonksiyonuna karşı gelmektedir. $f_1(t), f_0(t)$ elemanları ise sınır koşullarının sağ tarafına uygun olan terimleri ifade etmektedirler.

Teorem 2.1. Eğer (1.3) problemi en az bir $f(t)$ Green fonksiyoneline sahip ise o zaman keyfi bir $u \in W_p$ çözümü

$$u(t) = \int_0^1 f_2(\zeta,t) z_2(\zeta) d\zeta + f_1(t) z_1 + f_0(t) z_0 \qquad (2.7)$$

şeklinde gösterilebilir. Üstelik $Vu = 0$ sadece sıfır çözüme sahip olur.

[4]' de verilen teoremlere benzer olarak ispatlanabilir ki eğer bir Green fonksiyoneli varsa tektir. Green fonksiyoneli ancak ve ancak $Vu = 0$ sıfır çözüme sahip ise vardır.

3. UYGULAMALAR

Özel olarak (1.1) denkleminde $A_0(t) = A_1(t) = 0$ olarak alınır ise

$$(V_2 u)(t) \equiv u''(t) = z_2(t), \quad t \in G = (0,1) \qquad (3.1)$$

diferansiyel denklemi ve (1.2) koşullarıda özel olarak

$$
\begin{aligned}
&V_1 u \equiv a_1 u(0) + b_1 u'(0) = z_1;\\
&V_0 u \equiv a_0 u(0) + b_0 u'(0) + \int_0^1 g(\zeta) u''(\zeta) d\zeta = z_0
\end{aligned}
\qquad (3.2)
$$

şeklinde alınsın. Bu problem için (2.5) eş denklem sistemi açık olarak

$$
\begin{aligned}
&f_2(\varsigma)+f_0 g(\varsigma)=\varphi_2; \\
&b_1 f_1+b_0 f_0=\varphi_1; \qquad (3.3)\\
&a_1 f_1+a_0 f_0=\varphi_0
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilebilir [8]. Bu bir cebirsel denklem sistemidir. Eğer $\Delta=a_0 b_1-a_1 b_0 0\neq 0$ ise son iki denklemden f_0 ve f_1 bulunur ve sonra ilk denklemden de $f_2(\varsigma)$ bulunabilir. (3.3) denklem sisteminde keyfi $\varphi\in W^*$ elemanı yerine özel olarak $\theta(t)(u)=u(t), u\in W_p$ fonksiyoneli alınır ise (2.6) sistemi

$$
\begin{aligned}
&f_2(\varsigma)+f_0 g(\varsigma)=(t-\varsigma)H(t-\varsigma)_2; \\
&b_1 f_1+b_0 f_0=t; \qquad (3.4)\\
&a_1 f_1+a_0 f_0=1
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümü kolayca

$$
\begin{aligned}
&f_2(\varsigma,t)=(t-\varsigma)H(t-\varsigma)+\frac{g(\varsigma)}{\Delta}(a_1 t-b_1); \\
&f_1(t)=\frac{1}{\Delta}(a_0 t-b_0)_1; \qquad (3.5)\\
&f_0(t)=\frac{1}{\Delta}(b_1-a_1 t)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilebilir. Tanıma göre f elemanın birinci elemanı olan $f_2(\varsigma,t)$ (3.1)-(3.2) probleminin bilinen klasik anlamda Green fonksiyonuna karşı gelmektedir. $f_1(t)$ ve $f_0(t)$ elemanları ise sınır koşullarına uygun olan terimleri ifade etmektedirler. Keyfi bir $u(t)\in W_p$ çözümü

$$
u(t)=\int_0^1\left[(t-\varsigma)H(t-\varsigma)+\frac{g(\varsigma)}{\Delta}(a_1 t-b_1)\right]z_2(\varsigma)d\varsigma+\frac{z_1}{\Delta}(a_0 t-b_0)+\frac{z_0}{\Delta}(b_1 t-a_1)
$$

şeklinde elde edilebilir. Çözümün ele alınan problemi gerçeklediği doğrudan sağlatılarak gösterilebilir. Özel olarak $g(\varsigma)=0$, $a_1=b_0=1$ ve $a_0=b_1=0$ alınır ise $(3.5)_1$ den

$$
f_2(\varsigma,t)=(t-\varsigma)H(t-\varsigma)
$$

şeklinde başlangıç değer problemi için klasik Cauchy fonksiyonu elde edilir. Bu durum için homojen olmayan problemin çözümü

$$
u(t)=\int_0^1[(t-\varsigma)H(t-\varsigma)]z_2(\varsigma)d\varsigma-z_1+z_0 t
$$

olarak elde edilir. Bir başka özel durum ise iki uçta sınır koşulu $u(0)=z_0$ ve $u(1)=z_1$ şeklinde verilebilir. Bu durum $g(\varsigma)=1-\varsigma$, $a_0=a_1=b_0=1$ ve $b_1=0$ özel haline karşı gelir. $(3.5)_1$ den

$$f_2(\varsigma,t)=(t-\varsigma)H(t-\varsigma)-t(1-\varsigma)$$

sınır değer problemi için klasik Green fonksiyonu elde edilir [1]. Bu duruma karşı gelen çözüm ise

$$u(t)=\int_0^1 [(t-\varsigma)H(t-\varsigma)-t(1-\varsigma)]z_2(\varsigma)d\varsigma+z_1t+z_0(1-t)$$

olarak verilir.

Burada kullanılan yaklaşım ilke olarak klasik yöntemlerden farklıdır. Klasik yöntem Green formülü olarak bilinen kısmi integrasyon formülüne dayanmaktadır. Oysa burada izlenen yaklaşım bu formül yerine çözüm uzayının yapısal özelliklerini kullanmaya dayanmaktadır. Dolayısı ile temel çözüm homojen olmayan problemin operatörü ile de ilişkilidir. Eğer problem homojen koşullar ile verilmiş ise buradaki temel çözüm Green fonksiyonuna benzerdir. Eğer problem koşulsuz olarak verilmiş ise klasik temel çözüme benzer olarak geneleştirilmiş temel çözüm kavramı da verilebilir [6–9].

KAYNAKLAR

[1] STAKGOLD, I., *Green Function and Boundary Value Problems*, New-York, 1979.

[2] ROACH, G. F., *Green's Function, Introductory Theory witsh Application*, London, 1970.

[3] AKHIEV, S. S., Representations of the solutions of some linear operator equations, *Soviet Math Dokl.* **21(2)**, 555-558, 1980.

[4] AKHIEV S. S., A New Fundamental Solution Concept and Application to Some Local and Non Local Problems, *Bull. Tech. Univ. İstanbul*, **47(3)**, 93-99, 1994.

[5] AKHIEV, S. S., About the General Form of the Linear Bounded Functionals in Some Space of S. L. Sobolev type, *Akad. Nauk Azerb. SSR. Dokl.* **34(6)**, 3-7, 1979.

[6] AKHIEV, S. S. and ORUÇOĞLU, K., Fundamental Solutions of Some Linear Operator Equations and Applications, *Acta Applicandae Mathematicae,* **71**, 1-30, 2002.

[7] AKHIEV, S. S., Solvability conditions and Green functional concept for local and nonlocal linear problems for a second order ordinary differential equation, *Mathematical and Computational Applications*, **9**(3), 349-358, 2004.

[8] ORUÇOĞLU, K., Yerel olmayan bir problem için temel çözüm, *XIX Ulusal Matematik Sempozyumu*, Kütahya **141**, 2006.

[9] AKHIEV, S. S., Gren and Generalized Green' s Functionals of Linear Local and Nonlocal Problems for Ordinary Integro-differential equations, *Acta Applicandae Mathematicae,* **95**, 73-93, 2007.