İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ⋆ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WEYL UZAYLARINDA YAKLAŞIK HERMİTSEL VE YAKLAŞIK KAEHLER YAPILAR

Yüksek Lisans Tezi

Sevinç Yılmaz

Anabilim Dalı: Matematik Mühendisliği
Programı : Matematik Mühendisliği

OCAK 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ⋆ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WEYL UZAYLARINDA YAKLAŞIK HERMİTSEL VE YAKLAŞIK KAEHLER YAPILAR

Yüksek Lisans Tezi

Sevinç Yılmaz

(509961102)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 25 Aralık 2009
Tezin Savunulduğu Tarih : 25 Ocak 2010

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Fatma Özdemir (İTÜ)

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Sezgin Altay Demirbağ (İTÜ)

Yard. Doç. Dr. Meltem Güngörmez (İTÜ)

OCAK 2010

ÖNSÖZ

İTÜ' ye adım attığım ilk günlerden bu yana kendisinden matematiğe ve hayata dair çok şey öğrendiğim, mezuniyet sonrasında da değerli fikirlerinden faydalanmaya devam ettiğim hocam Doç. Dr. Fatma Özdemir' e teşekkür ederim.

İzmir' in güneşi kadar parlak ve sıcak sevgileriyle benimle olan anneciğim Müşerref Yılmaz ve biricik kardeşim Sevil Yılmaz' a varlıkları, destekleri ve emekleri için teşekkür ederim.

Ocak, 2010 Sevinç Yılmaz

Matematik Müh.

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

WEYL UZAYLARINDA YAKLAŞIK HERMİTSEL VE YAKLAŞIK KAEHLER YAPILAR

ÖZET

Bu çalışmada, yaklaşık Hermitsel, yaklaşık Kaehler ve yaklaşık yarı Kaehler yapıları Weyl uzaylarında incelenmiştir. Weyl uzaylarında kompleks ve Kaehler yapıları tanımı verilip, yaklaşık Kaehler yapısı integre edilebilirse yapının Kaehler olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, Hermitsel yapının hangi koşullar altında Kaehler olacağı teoremlerle ifade ve ispat edilmiştir [1-5].

İlk bölümde, Riemann uzayına ait temel kavramlar ele alınmıştır. M_n Riemann manifoldunda yaklaşık kompleks yapı, Hermitsel yapı, Kaehler yapısı ve yaklaşık Kaehler, yaklaşık yarı Kaehler tanımları verilmiştir. Yaklaşık yapının integre edilebilme koşulu ifade ve ispat edilmiştir [6-10].

İkinci bölümde, Weyl uzaylarında yaklaşık Hermitsel, yaklaşık Kaehler ve yaklaşık yarı Kaehler yapıları ile ilgili teorem ve ispatlar verilmiştir. Simetrik bir ∇ konneksiyonuna ve konform g_{ij} metrik tansörüne sahip n-boyutlu bir W_n manifoldunda g_{ij} metrik tansörü ve konneksiyon arasında

$$\nabla_k g_{ij} - 2T_k g_{ij} = 0, \tag{1}$$

uygunluk koşulu varsa, W_n manifolduna bir Weyl uzayı denir ve $W_n(g_{ij}, T_k)$ ile gösterilir. Burada T_k kovaryant bir vektör olup Weyl uzayının komplemanter vektör alanı adını alır.

λ skaler bir fonksiyon olmak üzere $W_n(g_{ij}, T_k)$ uzayında metrik tansörün

$$\widetilde{g_{ij}} = \lambda^2 g_{ij} \ , \tag{2}$$

şeklindeki dönüşümü altında T_k komplemanter vektörü,

$$\widetilde{T_k} = T_k + \partial_k \ln \lambda \ , \tag{3}$$

kuralına uygun olarak dönüşür. Γ^i_{jk} Weyl konneksiyonu ile $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ Levi-Civita konneksiyonu arasında

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} - g^{im}(g_{mk}\, T_l + g_{ml}\, T_k - g_{kl}\, T_m), \tag{4}$$

bağıntısı vardır.

g_{ij} metrik tansörünün $\widetilde{g_{ij}} = \lambda^2 g_{ij}$, şeklindeki bir normlanması altında bir A büyüklüğü

$$\widetilde{A} = \lambda^p A \tag{5}$$

şeklinde değişiyorsa A ya, g_{ij} tansörünün $\{p\}$ ağırlıklı uydusu denir [8], [9].

g_{ij} tansörünün $\{p\}$ ağırlıklı A uydusunun genelleştirilmiş türevi

$$\dot{\partial}_k A = \partial_k A - pT_k A, \tag{6}$$

ile tanımlanır [8], [9].

g_{ij} tansörünün $\{p\}$ ağırlıklı A uydusunun genelleştirilmiş kovaryant türevi ise

$$\dot{\nabla}_k A = \nabla_k A - pT_k A, \tag{7}$$

bağıntısı ile tanımlanmıştır.

W_n , $n = 2k(n \geq 2)$ boyutlu bir Weyl uzayı olsun. F_i^j , $\{0\}$ ağırlıklı $(1, 1)$ tipi bir tansörü

$$F_i^j F_j^k = -\delta_i^k \tag{8}$$

bağıntısını sağlarsa F_i^j tansörüne W_n üzerinde yaklaşık kompleks yapı ve W_n'ye de yaklaşık kompleks uzay denir [2].

F_i^j yaklaşık kompleks yapısı ve g_{ij} metriğine sahip W_n Weyl uzayı

$$g_{ij} F_h^i F_k^j = g_{hk} \, , \tag{9}$$

bağıntısını sağlarsa, (F_i^j, g_{hk}) ikilisine W_n uzayında yaklaşık Hermitsel yapı ve üzerinde (F_i^j, g_{hk}) yapısı bulunan W_n uzayına da yaklaşık Hermitsel uzay denir.

Eğer F_i^j tansörü her i, j, k indisi için

$$\dot{\nabla}_k F_i^j = 0 \tag{10}$$

eşitliğini gerçeklerse, yaklaşık Hermitsel F_i^j yapısına (sırasıyla, uzayına) Kaehler yapısı (sırasıyla, uzayı) denir. Ağırlığı $\{2\}$ olan $(0, 2)$ tipindeki F_{ij} tansörü

$$F_{ij} = g_{jk} F_i^k \tag{11}$$

şeklinde tanımlanır ve anti-simetrik bir tansördür. Benzer şekilde F^{ij} tansörü $(2, 0)$ tipinde ağırlığı $\{-2\}$ olan anti-simetrik bir tansördür ve

$$F^{ij} = g^{ih} F_h^j \tag{12}$$

şeklinde tanımlanır.

F_i^j yaklaşık Hermitsel yapısı (sırasıyla, uzayı)

$$F_{hij} = \dot{\nabla}_h F_{ij} + \dot{\nabla}_i F_{jh} + \dot{\nabla}_j F_{hi} = 0, \tag{13}$$

bağıntısını sağlarsa bu yapıya yaklaşık Kaehler yapı (sırasıyla, uzay) , denir.

Eğer F_i^j Hermitsel yapısı

$$F_i \equiv -\dot{\nabla}_j F_i^j = 0 \tag{14}$$

şeklinde bir bağıntı sağlarsa, Hermitsel yapıya (sırasıyla, uzaya) yaklaşık yarı-Kaehler yapı (sırasıyla, uzay) denir.

W_n Weyl uzaylarında yaklaşık kompleks yapılar için Nijhenuis burulma tansörü $\{0\}$ ağırlıklı

$$N_{ij}^k = F_i^h(\dot{\nabla}_h F_j^k - \dot{\nabla}_j F_h^k) - F_j^h(\dot{\nabla}_h F_i^k - \dot{\nabla}_i F_h^k), \tag{15}$$

tansörü olarak tanımlanır ve yaklaşık kompleks yapının burulması yoksa, yani, $N_{ij}^k = 0$ ise integre edilebilir denir.

Özel olarak (10) bağıntısını sağlayan F_i^j yapısı Kaehler yapısı ise , (10) denklemi sağlanır ve böylece, integre edilebilirlik şartı olan (15) denklemi ile verilen Nijhenuis burulma tansörünün sıfır olduğu görülür.

Komplemanter vektör alanı $T_k = 0$ olursa yukarıdaki tanımların Riemann uzayındaki karşılıkları elde edilir [2-5].

Böylece, Weyl uzaylarında yaklaşık Kaehler yapısı ile ilgili aşağıdaki teoremleri ifade edebiliriz [11].

Teorem 2.1. Yaklaşık Kaehler yapısı integre edilebilir ise yapı Kaehlerdir.

Teorem 2.2. F_j^i Hermitsel yapısı

$$\dot{\nabla}_i F_{jk} = \dot{\nabla}_j F_{ik}, \tag{16}$$

bağıntısını sağlarsa bu yapı ancak ve ancak Kaehler yapısıdır.

Teorem 2.3. F_i^j Hermitsel yapısı

$$F^{ij} \dot{\nabla}^k \dot{\nabla}_k F_{ij} = 0, \tag{17}$$

bağıntısını sağlarsa Kaehlerdir. Burada $\dot{\nabla}^k = g^{jk} \dot{\nabla}_j$ dir.

Teorem 2.4. Yaklaşık Kaehler yapısı yaklaşık yarı Kaehlerdir.

Teorem 2.5. a, sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, F_i^j yaklaşık yarı Kaehler yapısı

$$\dot{\nabla}_k F_{ij} \dot{\nabla}^i F^{jk} = a \dot{\nabla}_k F_{ij} \dot{\nabla}^k F^{ij}, \tag{18}$$

bağıntısını sağlarsa,

$$Q = R + \frac{1}{2} F^{mk} F^{ih} R_{mkih} + 2g^{ik} (\nabla_i T_k - \nabla_k T_i), \tag{19}$$

ifadesi, a nın pozitif veya negatif olmasına göre pozitif veya negatiftir.

ALMOST HERMITIAN AND ALMOST KAEHLER STRUCTURES ON WEYL SPACES

SUMMARY

In this study, the almost Hermitian, almost Kaehler and almost semi Kaehler structure is investigated in Weyl spaces.

In this spaces, after giving the definitions of an almost complex structure, an almost Hermitian structure, Kaehlerian structure, it has been shown that, if the almost Kaehler structure is integrable then the structure is Kaehlerian [1-5].

In the first chapter, the basic notions and definitions of Riemannian space are given The integrability condition for an almost complex structure is stated and proved. Moreover, the conditions under which an Hermitian structure will become Kaehler are stated and proved by theorems [6-10].

In the second chapter, it is given some theorems concerning the almost Hermitian, almost Kaehlerian and almost semi Kaehlerian structure in Weyl spaces. An n-dimensional manifold $W_n(g_{ij}, T_k)$ is said to be a Weyl space if it has a conformal metric tensor g_{ij} and a symmetric connection ∇_k satisfying the compatibility condition given by the equation

$$\nabla_k g_{ij} - 2T_k g_{ij} = 0 \ , \tag{1}$$

where T_k is a covariant vector field and $\nabla_k g_{ij}$ denotes the usual covariant derivative.

Under a renormalization of the fundamental tensor of the form

$$\widetilde{g_{ij}} = \lambda^2 g_{ij} \ , \tag{2}$$

the complementary vector field T_k is transformed by the law

$$\widetilde{T}_k = T_k + \partial_k \ln \lambda \ , \tag{3}$$

The Weyl connection Γ^i_{jk} and Levi-Civita connection $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ is connected by

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} - g^{im}(g_{mk}\, T_l + g_{ml}\, T_k - g_{kl}\, T_m), \tag{4}$$

A quantity A is called a satellite with weight $\{p\}$ of the tensor g_{ij}, if it admits a transformation of the form

$$\widetilde{A} = \lambda^p A \ , \tag{5}$$

under the renormalization (2) of the metric tensor g_{ij} [8], [9].

The prolonged derivative of a satellite A of the tensor g_{ij} with weight $\{p\}$ is defined by [8], [9]

$$\dot{\partial}_k A = \partial_k A - pT_k A, \tag{6}$$

The prolonged covariant derivative of a satellite A of the tensor g_{ij} with weight $\{p\}$ is defined by

$$\dot{\nabla}_k A = \nabla_k A - p\,T_k\,A\ . \tag{7}$$

Let W_n be an Weyl space of dimension $n = 2k(n \geq 2)$. We will say that a tensor F_i^j of type $(1,1)$ with weight $\{0\}$ is an almost complex structure on W_n, if the tensor F_i^j satisfies the condition

$$F_i^j F_j^k = -\delta_i^k \tag{8}$$

and W_n will be called an almost complex space [11].

If the Weyl space W_n admits an almost complex structure F_i^j and the metric tensor g_{ij} of W_n satisfies

$$g_{ij} F_h^i F_k^j = g_{hk}, \tag{9}$$

then the (F_i^j, g_{hk}) will be called an almost Hermitian structure on W_n and Weyl space with the structure (F_i^j, g_{hk}) will be called an almost Hermitian space.

We will say that an almost Hermitian structure F_i^j (respectively, space) is a Kaehlerian structure (respectively, space) if the tensor F_i^j satisfies

$$\dot{\nabla}_k F_i^j = 0 \qquad \text{for} \quad \text{all} \quad i, j, k. \tag{10}$$

The tensor F_{ij} of type $(0,2)$ with the weight $\{2\}$ defined by

$$F_{ij} = g_{jk} F_i^k, \tag{11}$$

is skew-symmetric and the skew-symmetric tensor F^{ij} of type $(2,0)$ with weight $\{-2\}$ is defined by

$$F^{ij} = g^{ih} F_h^j. \tag{12}$$

An almost Hermitian structure F_i^j (respectively, space) will be called an almost Kaehlerian structure (respectively, space) if the tensor F_i^j satisfies

$$F_{hij} = \dot{\nabla}_h F_{ij} + \dot{\nabla}_i F_{jh} + \dot{\nabla}_j F_{hi} = 0. \tag{13}$$

An almost Hermitian structure F_i^j (respectively, space) will be called an almost semi-Kaehlerian structure (respectively, space) if the tensor F_i^j satisfies

$$F_i \equiv -\dot{\nabla}_j F_i^j = 0. \tag{14}$$

We will define the Nijhenuis torsion tensor with the weight $\{0\}$ by

$$N_{ij}^k = F_i^h (\dot{\nabla}_h F_j^k - \dot{\nabla}_j F_h^k) - F_j^h (\dot{\nabla}_h F_i^k - \dot{\nabla}_i F_h^k). \tag{15}$$

We will say that an almost complex structure is integrable if it has no torsion. In particular, the structure F_i^j is Kaehlerian if (10) holds, and consequently the Nijhenuis torsion tensor (15) is zero, so that the integrability condition of the almost complex structure F_i^j is satisfied.

If we take the complementary vector field $T_k = 0$ then the above definitions reduce to the definitions of the Riemannian space [2-5].

We first prove that the following theorem concerning an almost Kaehlerian structure in Weyl spaces [11].

Theorem 2.1. If an almost Kaehlerian structure is integrable then the structure is Kaehlerian.

Theorem 2.2. If an almost Hermitian structure F_i^j satisfying

$$\dot{\nabla}_i F_{jk} = \dot{\nabla}_j F_{ik}, \tag{16}$$

is Kaehlerian.

Theorem 2.3. The structure F_i^j is Kaehlerian if and only if the almost Hermitian structure F_i^j satisfying

$$F^{ij}\dot{\nabla}^k\dot{\nabla}_k F_{ij} = 0, \tag{17}$$

where $\dot{\nabla}^k = g^{ik}\dot{\nabla}_j$.

Theorem 2.4. An almost Kaehlerian structure is almost semi-Kaehlerian.

Theorem 2.5. If an almost semi-Kaehlerian structure F_i^j satisfies

$$\dot{\nabla}_k F_{ij}\dot{\nabla}^i F^{jk} = a\dot{\nabla}_k F_{ij}\dot{\nabla}^k F^{ij}, \tag{18}$$

where a is a non-zero constant, then Q defined by

$$Q = R + \frac{1}{2}F^{mk}F^{ih}R_{mkih} + 2g^{ik}(\nabla_i T_k - \nabla_k T_i), \tag{19}$$

is non-negative or non-postive according as a is positive or negative.

1. BÖLÜM

1.1 Giriş

Koordinatları x^i , $(i = 1, \cdots, n)$ olarak verilen n-boyutlu bir uzayda Riemann, birbirine çok yakın x^i ve $x^i + dx^i$ noktaları arasındaki sonsuz küçük ds uzaklığını

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.1.1}$$

şekilde tanımlamıştır. Burada g_{ij} katsayıları x^i koordinatlarının fonksiyonlarıdır ve Riemann metriği olarak adlandırılır. Böyle bir metrik ile karakterize edilen uzaya Riemann uzayı ve Riemann metriğine dayanan geometriye de Riemann geometrisi denir [6].

Öklid uzayında dik kartezyen koordinatlarda x^i noktasında tanımlanan bir A vektörü $x^i + dx^i$ noktasına paralel olarak ötelenirse dA^i değişim vektörünün bileşenleri sıfır olur. Ancak genel koordinat sistemlerinde, örneğin kutupsal koordinatlarda paralel ötelemeler altında fark vektörünün bileşenleri dA^i sıfırdan farklı olur. En genel olarak, bir A vektörü birbirine çok yakın x^i ve $x^i + dx^i$ noktaları arasında paralel olarak taşınırsa vektör bileşenleri

$$dA^i = -\Gamma^i_{jk} A^j dx^k, \tag{1.1.2}$$

şeklinde değişir. Burada Γ^i_{jk} lar konneksiyon katsayısı olarak adlandırılır.

Γ^i_{jk} ve $\Gamma^{'\gamma}_{\alpha\beta}$, 'lar sırasıyla x ve x' koordinatlarının fonksiyonları olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial x'^\beta} = \Gamma^{'\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial x'^\gamma} \quad , \tag{1.1.3}$$

bağıntısını sağlar [7].

Özel olarak Γ^i_{jk} konneksiyonu Riemann konneksiyonu (Levi-Civita) ise bu durumda

$$g^{ih} g_{jh} = \delta^i_j, \qquad \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} = g^{ih}[h, jk], \qquad [h, jk] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kh}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h}\right), \tag{1.1.4}$$

dir.

Burada $[h, jk]$ ifadesine 1. cins, $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ ifadesine ise 2. cins Christoffel sembolü denir. Chiristoffel sembollerinin alt iki indise göre simetrik olduğu görülmektedir.

g_{ij} metrik tansörü ile verilen bir M_n Riemann uzayında bu metrik tansörle uyumlu, bir ve yalnız bir konneksiyon vardır.[7]

Tanım 1.1.2. M bir Haussdorff uzayı olsun. M nin her p komşuluğunun uygun bir U civarını, R^n nin açık bir V alt cümlesine tasvir eden bir φ homeomorfizması varsa, M ye n-boyutlu topolojik manifold ve (U, φ) çiftine de p nin bir koordinat komşuluğu denir.

M bir topolojik manifold olsun. A indis cümlesi, U_α da A yardımı ile belirlenmiş açık cümleler ailesi olmak üzere, M üzerinde bir $S = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}\}$ kolleksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu kolleksiyona M üzerinde n-boyutlu diferansiyellenebilir bir yapı oluşturur denir [1].

i) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$

ii) Herhangi bir $\alpha, \beta \in A$ için $f_{\beta\alpha}$ ve $f_{\alpha\beta}$ fonksiyonları

$$f_{\beta\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset R^n \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset R^n$$

$$f_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset R^n \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset R^n$$

diferansiyellenebilir tasvirdir.

iii) $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ailesi (i) ve (ii) koşullarına göre maksimaldir.

n-boyutlu M_n manifoldu üzerindeki $\Gamma_{jk}{}^i$ konneksiyon katsayıları simetrik ve antisimetrik kısımlarına ayrıştırılabilir. $\Gamma_{jk}{}^i$ konneksiyon katsayılarının simetrik kısmını $\Lambda_{jk}{}^i$ ve antisimetrik kısmını da $\Omega_{jk}{}^i$ ile ifade edersek;

$$\Lambda_{jk}{}^i = \Gamma_{(jk)}^{\,i} = \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}{}^i + \Gamma_{kj}{}^i), \tag{1.1.5}$$

$$\Omega_{jk}{}^i = \Gamma_{[jk]}^{\,i} = \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}{}^i - \Gamma_{kj}{}^i), \tag{1.1.6}$$

şeklinde olur, burada $\Lambda_{jk}{}^i$ konneksiyon katsayısı, $\Omega_{jk}{}^i$ ise bir tansördür ve bu tansör konneksiyonun burulma tansörü adını alır. (1.1.5) ve (1.1.6) denklemlerinden

$$\Gamma_{jk}{}^i = \Lambda_{jk}{}^i + \Omega_{jk}{}^i, \tag{1.1.7}$$

elde edilir. Riemann uzayında $\Gamma_{jk}{}^i$ simetrik ve burulma tansörü $\Omega_{jk}{}^i$ sıfırdır.

v^i bir kontravaryant vektör alanının, v_i bir kovaryant vektör alanının ve $T_{ji}{}^h$ da bir tansör alanının bileşenleri olmak üzere bu büyüklüklerin Riemann konneksiyonuna (∇) göre kovaryant türevleri sırasıyla

$$\nabla_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^h \Gamma_{hj}{}^i , \tag{1.1.8}$$

$$\nabla_j v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - v_k \Gamma_{ij}{}^k , \tag{1.1.9}$$

$$\nabla_k T_{ji}{}^h = \frac{\partial T_{ji}{}^a}{\partial x^k} + T_{ij}{}^a \Gamma_{ka}{}^h - T_{ai}{}^h \Gamma_{kj}{}^a - T_{ja}{}^h \Gamma_{ki}{}^a, \tag{1.1.10}$$

şeklindedir [2-3].

g_{ij} metrik tansörünün Levi-Civita konneksiyonuna göre kovaryant türevi

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \begin{Bmatrix} a \\ kj \end{Bmatrix} g_{ai} - \begin{Bmatrix} a \\ ki \end{Bmatrix} g_{aj} = 0, \tag{1.1.11}$$

dir.

Bir M_n manifoldunun eğrilik tansörü, en genel haliyle

$$L_{kji}{}^h = \partial_k \Gamma_{ji}{}^h - \partial_j \Gamma_{ki}{}^h + \Gamma_{kt}{}^h \Gamma_{ji}{}^t - \Gamma_{jt}{}^h \Gamma_{ki}{}^t, \quad (\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}) \tag{1.1.12}$$

şeklindedir. $\Gamma_{ji}{}^h$ fonksiyonları ikinci cins Christoffel sembolleri $\left\{ {h \atop ji} \right\}$ alınırsa, eğrilik tansörü, g_{ij} metrik tansörü ile verilen bir Riemann uzayının Riemann-Christoffel eğrilik tansörü

$$R_{kji}{}^h = \partial_k \begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix} - \partial_j \begin{Bmatrix} h \\ ki \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} h \\ ka \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ ji \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} h \\ ja \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ ki \end{Bmatrix}, \tag{1.1.13}$$

şekline dönüşür [2].

M_n üzerinde, v^h bir kontravaryant vektör alanının, w_i bir kovaryant vektör alanının, f bir skaler fonksiyonunun, $T_{ji}{}^h$ $(1,2)$ tipinde herhangi bir tansör alanının ve $S_{ji}{}^h$ da burulma tansörünün bileşenleri olmak üzere $L_{kji}{}^h$ eğrilik tansörü aşağıdaki Ricci özdeşliklerini sağlar:

$$\nabla_k \nabla_j v^h - \nabla_j \nabla_k v^h = L_{kji}{}^h v^i - 2S_{kj}{}^t \nabla_t v^h, \tag{1.1.14}$$

$$\nabla_k \nabla_j \omega_i - \nabla_j \nabla_k \omega_i = -L_{kji}{}^h w_h - 2S_{kj}{}^t \nabla_t w_i, \tag{1.1.15}$$

$$\nabla_j \nabla_i f - \nabla_i \nabla_j f = -2S_{ji}{}^h \nabla_h f, \tag{1.1.16}$$

$$\nabla_l \nabla_k T_{ji}{}^h - \nabla_k \nabla_l T_{ji}{}^h = L_{lkt}{}^h T_{ji}{}^t - L_{lkj}{}^t T_{ti}{}^h - L_{lki}{}^t T_{jt}{}^h - 2S_{lk}{}^t \nabla_t T_{ji}{}^h. \tag{1.1.17}$$

Özel olarak M_n uzayı Riemann uzayı ise $S_{kj}{}^{t} = 0$ olacağından Riemann uzayı ile ilgili Ricci özdeşliklerine ulaşılır.

(1.1.13) den Riemann-Christoffel eğrilik tansörünün

$$R_{kji}{}^{h} = -R_{jki}{}^{h}\,, \tag{1.1.18}$$

$$R_{kji}{}^{h} + R_{jik}{}^{h} + R_{ikj}{}^{h} = 0\,, \tag{1.1.19}$$

özelliklerine sahip olduğu görülür.

Dördüncü dereceden R_{kjih} kovaryant eğrilik tansörü

$$R_{kjih} = R_{kji}{}^{a}\, g_{ah}\,, \tag{1.1.20}$$

şeklinde tanımlanmıştır ve aşağıdaki özellikleri sağlar [2]:

(1) $\quad R_{kjih} + R_{jikh} + R_{ikjh} = 0$,

(2) $\quad R_{kjih} = -R_{jkih}$,

(3) $\quad R_{kjih} = -R_{kjhi}$,

(4) $\quad R_{kjih} = R_{ihkj}$,

(5) $\quad R_{kkih} = -R_{kjhh} = 0\,.$ (1.1.21)

(1) özdeşliğine birinci Bianchi özdeşliği denir. Ayrıca, eğrilik tansörünün Riemann konneksiyonuna göre kovaryant türevi

$$\nabla_l R_{kji}{}^{h} + \nabla_k\, R_{jli}{}^{h} + \nabla_j\, R_{lki}{}^{h} = 0\,, \tag{1.1.22}$$

ikinci Bianchi özdeşliğini sağlar [2].

(1.1.13) de h ve k indisleri üzerine daraltma yapılırsa

$$R_{ji} = R_{aji}{}^{a}\,, \tag{1.1.23}$$

şeklinde tanımlanan Ricci tansörüne ulaşılır, buradan

$$R_{ji} = R_{aji}{}^{a} = g^{ab}\, R_{ajib} = g^{ba}\, R_{ibaj} = g^{ba}\, R_{bija} = R_{ij}\,, \tag{1.1.24}$$

eşitliğinden Ricci tansörünün simetrik olduğu görülür. Ricci tansörü yardımıyla Riemann uzayının skaler eğriliği

$$R = g^{ij} R_{ij}\,, \tag{1.1.25}$$

şeklinde tanımlanır.

g metriğine sahip bir M_n Riemann uzayının eğrilik tansörü

$$R_{kjih} = 0\,, \tag{1.1.26}$$

koşulunu sağlıyorsa Riemann uzayına düz uzay denir.

1.2 Kompleks ve Kaehler Uzaylar

Tanım 1.2.1. I bir reel V vektör uzayının birim dönüşümü olmak üzere, V vektör uzayı üzerinde yaklaşık yapı, $J^2 = -I$ eşitliğini sağlayan bir lineer endomorfizmadır [4].

Tanım 1.2.2. M_n, n-boyutlu differansiyellenebilen bir reel manifold olsun. M_n üzerinde bir J tansör alanı, her $x \in M_n$ için, $T_x(M)$ teğet uzayının $J^2 = -I$ koşulunu sağlayan bir endomorfizması ise J ye yaklaşık kompleks yapı denir [2-4].

M_n üzerinde $(1,1)$ tipinde tanımlı olan bir $F_i^{\;j}$ tansörü

$$F_i^{\;j} F_j^{\;k} = -\delta_i^k\,, \tag{1.2.1}$$

koşulunu sağlarsa $F_i^{\;j}$ tansörüne yaklaşık kompleks yapı ve $(M_n, F_i^{\;j})$ ikilisine yaklaşık kompleks uzay denir [2-4].

Eğer M_n üzerinde bir yaklaşık kompleks $F_i^{\;j}$ yapısı varsa ve g_{ij} Riemann metrik tansörü

$$g_{ij} F_h^{\;i} F_k^{\;j} = g_{hk}\,, \tag{1.2.2}$$

koşulunu sağlarsa $(F_i^{\;j}, g_{hk})$ çiftine M_n üzerinde yaklaşık Hermitsel yapı denir.

Eğer M_n üzerinde $F_i^{\;j}$ Hermitsel yapısı, her i, j, k için

$$\nabla_k F_i^{\;j} = 0\,, \tag{1.2.3}$$

bağıntısını sağlıyorsa $F_i^{\;j}$ yaklaşık kompleks yapısına Kaehler yapı denir.

$F_i^{\;j}$ bir yaklaşık kompleks yapı ve g_{ij} de metrik tansörün bileşenleri olmak üzere F^{ij}

ve F_{ij} tansörleri

$$F_{jh}\, F_i{}^j = -F_{hj}\, F_i{}^j = -g_{ih}\,, \tag{1.2.4}$$

$$F^{ij} = g^{ih} F_h{}^j, \qquad F_{ij} = g_{jk} F_i{}^k\,, \tag{1.2.5}$$

şeklinde tanımlanır. F^{ij} ve F_{ij} tansörleri anti-simetrik tansörlerdir.

Yaklaşık $F_i{}^j$ Hermitsel yapısı

$$F_{hij} = \nabla_h F_{ij} + \nabla_i F_{jh} + \nabla_j F_{hi} = 0\,, \tag{1.2.6}$$

bağıntısını sağlıyorsa $F_i{}^j$ tansörüne yaklaşık Kaehler yapı denir. Bu özelliğin geçerli olduğu uzaya da yaklaşık Kaehler uzayı denir.

Tanım 1.2.3. F_i^j yaklaşık Hermitsel yapısı $F_i = -\nabla_j\, F_i^j = 0$, koşulunu sağlıyorsa o zaman bu yapıya yaklaşık yarı-Kaehler yapı denir.

F_i^j yaklaşık kompleks yapısı için burulma tansörü

$$N_{ij}{}^k = F_i{}^h(\nabla_h F_j{}^k - \nabla_j F_h{}^k) - F_j^h(\nabla_h F_i{}^k - \nabla_i F_h{}^k)\,, \tag{1.2.7}$$

ile tanımlanır.

Eğer $N_{ij}{}^k = 0$ ise $F_i{}^j$ yaklaşık kompleks yapısına integre edilebilir denir.

M_n bir Kaehler Manifoldu ise Ricci özdeşliğinin (1.1.17) bağıntısından

$$\nabla_k \nabla_j F_i{}^h - \nabla_j \nabla_k F_i{}^h = R_{kjt}{}^h F_i^t - R_{kji}{}^t F_t{}^h\,, \tag{1.2.8}$$

olduğu görülür [2].

2. BÖLÜM

2.1 Weyl Uzayları

Burulmasız bir ∇ konneksiyonuna ve konform g_{ij} metrik tansörüne sahip n-boyutlu bir W_n manifoldunda g_{ij} metrik tansörü ve konneksiyon arasında

$$\nabla_k g_{ij} - 2T_k g_{ij} = 0, \tag{2.1.1}$$

uygunluk koşulu varsa, W_n manifolduna bir Weyl uzayı denir ve $W_n(g_{ij}, T_k)$ ile gösterilir. Burada T_k kovaryant bir vektör olup Weyl uzayının komplemanter vektör alanı adını alır [8-9].

λ skaler bir fonksiyon olmak üzere $W_n(g_{ij}, T_k)$ uzayında metrik tansörün

$$\widetilde{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij} \ , \tag{2.1.2}$$

şeklindeki dönüşümü altında T_k komplemanter vektörü,

$$\widetilde{T}_k = T_k + \partial_k \ln \lambda \ , \tag{2.1.3}$$

kuralına uygun olarak dönüşür. Γ^i_{jk} Weyl konneksiyonu ile $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ Levi-Civita konneksiyonu arasında

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} - g^{im}(g_{mk}\, T_l + g_{ml}\, T_k - g_{kl}\, T_m), \tag{2.1.4}$$

bağıntısı vardır.

g_{ij} metrik tansörünün $\widetilde{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij}$ şeklindeki bir normlanması altında bir A büyüklüğü

$$\widetilde{A} = \lambda^p A \tag{2.1.5}$$

şeklinde değişiyorsa A ya, g_{ij} tansörünün $\{p\}$ ağırlıklı uydusu denir [8], [9].

g_{ij} tansörünün $\{p\}$ ağırlıklı A uydusunun genelleştirilmiş türevi $\dot{\partial}_k A$ ile gösterilir ve

$$\dot{\partial}_k A = \partial_k A - pT_k A, \tag{2.1.6}$$

formülü ile tanımlanır [9-10].

g_{ij} tansörünün $\{p\}$ ağırlıklı A uydusunun genelleştirilmiş kovaryant türevi ise

$$\dot{\nabla}_k A = \nabla_k A - pT_k A, \qquad (2.1.7)$$

bağıntısı ile tanımlanmıştır.

(g_{ij}, T_k) tensör çiftine (2.1.2) ve (2.1.3) bağıntıları yardımıyla yeni bir $(\widetilde{g_{ij}}, \widetilde{T_k})$, tensör çifti karşı getiren dönüşüm *ayar dönüşümü* olarak adlandırılır.

Genelleştirilmiş türev ve genelleştirilmiş kovaryant türev uyduların ağırlıklarını korur. Ayar dönüşümü altında Γ^i_{jk} nın ağırlığı sıfırdır yani, Γ^i_{jk} ayar değişmezdir. Γ^i_{jk} cinsinden tanımlanan büyüklükler de bu nedenle ayar değişmezdir.

W_n uzayına ait eğrilik tensörü

$$R^i_{jkl} = \partial_l \Gamma^i_{jk} - \partial_k \Gamma^i_{jl} + \Gamma^i_{hl}\Gamma^h_{jk} - \Gamma^i_{hk}\Gamma^h_{jl}\,, \qquad (2.1.8)$$

$$R_{ijkl} = g_{ih} R^h_{jkl}\,, \qquad (2.1.9)$$

ve Ricci tansörü

$$R_{ij} = R^k_{ijk}, \qquad (2.1.10)$$

ile, ayrıca Ricci eğrilik skaleri de

$$R = g^{ij} R_{ij}, \qquad (2.1.11)$$

bağıntısı ile tanımlanır. Eğrilik tansörlerinin ayar değişmez oldukları kolayca görülür [10]. W_n uzayına ait eğrilik tensörleri sırasıyla, birinci ve ikinci tür Bianchi özdeşliklerini

$$R_{hijk} + R_{hjki} + R_{hkij} = 0, \qquad (2.1.12)$$

$$\dot{\nabla}_l R^h_{ijk} + \dot{\nabla}_k R^h_{ilj} + \dot{\nabla}_j R^h_{ikl} = 0, \qquad (2.1.13)$$

sağlar. B^h_k $(1,1)$ tipi keyfi bir tensör olmak üzere Ricci özdeşliği olarak bilinen

$$\nabla_i \nabla_j B^h_k - \nabla_j \nabla_i B^h_k = B^s_k R^h_{sji} - B^h_s R^s_{kji}, \qquad (2.1.14)$$

bağıntısı sağlanır. Ayrıca, eğrilik tensörünün indislerine göre anti-simetrisinden Weyl uzaylarında

$$R_{ijkl} + R_{jilk} = 0, \qquad (2.1.15)$$

$$R_{ijkl} + R_{jikl} = 2\, g_{ij}\,(T_{k,l} - T_{l,k}), \qquad (2.1.16)$$

ve

$$R_{mijk} - R_{jkmi} = g_{im}(T_{k,j} - T_{j,k}) + g_{jm}(T_{k,i} - T_{i,k}) + g_{jk}(T_{m,i} - T_{i,m})$$
$$+g_{km}(T_{i,j} - T_{j,i}) + g_{ij}(T_{m,k} - T_{k,m}) + g_{ik}(T_{j,m} - T_{m,j}). \quad (2.1.17)$$

eşitlikleri elde edilir. Weyl konneksiyonu metrik konneksiyon değildir ($\nabla_i g_{jk} \neq 0$) ve Ricci tansörünün anti-simetrik kısmından

$$R_{[ij]} = R_{ij} - R_{ji} = n\nabla_{[j}T_{i]} \quad (2.1.18)$$

elde edilir.

2.2 Weyl Uzaylarında Yaklaşık Kompleks Yapılar

W_n , $n = 2k (n \geq 2)$ boyutlu bir Weyl uzayı olsun. $\{0\}$ ağırlıklı $(1,1)$ tipinde bir F_i^j , tansörü

$$F_i^j F_j^k = -\delta_i^k \quad (2.2.1)$$

bağıntısını sağlarsa F_i^j tansörüne W_n üzerinde yaklaşık kompleks yapı ve W_n'ye de yaklaşık kompleks uzay denir [11].

F_i^j yaklaşık kompleks yapısı ve g_{ij} metriğine sahip W_n Weyl uzayı

$$g_{ij} F_h^i F_k^j = g_{hk} , \quad (2.2.2)$$

bağıntısını sağlarsa, (F_i^j, g_{hk}) ikilisine W_n uzayında yaklaşık Hermitsel yapı ve üzerinde (F_i^j, g_{hk}) yapısı bulunan W_n uzayına da yaklaşık Hermitsel uzay denir.

Eğer F_i^j tansörü her i, j, k indisi için

$$\dot{\nabla}_k F_i^j = 0 \quad (2.2.3)$$

eşitliğini gerçeklerse, yaklaşık Hermitsel F_i^j yapısına (sırasıyla, uzayına) Kaehler yapısı (sırasıyla, uzayı) denir. Ağırlığı $\{2\}$ olan $(0,2)$ tipindeki F_{ij} tansörü

$$F_{ij} = g_{jk} F_i^k \quad (2.2.4)$$

şeklinde tanımlanır ve anti-simetrik bir tansördür. Benzer şekilde F^{ij} tansörü $(2,0)$ tipinde ağırlığı $\{-2\}$ olan anti-simetrik bir tansördür ve

$$F^{ij} = g^{ih} F_h^j , \quad (2.2.5)$$

şeklinde tanımlanır.

F_i^j yaklaşık Hermitsel yapısı (sırasıyla, uzayı)

$$F_{hij} = \dot{\nabla}_h F_{ij} + \dot{\nabla}_i F_{jh} + \dot{\nabla}_j F_{hi} = 0, \tag{2.2.6}$$

bağıntısını sağlarsa bu yapıya yaklaşık Kaehler yapı (sırasıyla, uzay) , denir.

Eğer F_i^j Hermitsel yapısı

$$F_i \equiv -\dot{\nabla}_j F_i^j = 0, \tag{2.2.7}$$

şeklinde bir bağıntı sağlarsa, Hermitsel yapıya (sırasıyla, uzaya) yaklaşık yarı-Kaehler yapı (sırasıyla, uzay) denir.

W_n Weyl uzaylarında yaklaşık kompleks yapılar için Nijhenuis burulma tansörü $\{0\}$ ağırlıklı

$$N_{ij}^k = F_i^h(\dot{\nabla}_h F_j^k - \dot{\nabla}_j F_h^k) - F_j^h(\dot{\nabla}_h F_i^k - \dot{\nabla}_i F_h^k), \tag{2.2.8}$$

tansörü olarak tanımlanır ve yaklaşık kompleks yapı burulması yoksa yani, $N_{ij}^k = 0$ ise integre edilebilir denir.

Özel olarak (2.2.3) bağıntısını sağlayan F_i^j yapısı Kaehler yapısı ise , (2.2.3) denklemi sağlanır ve böylece, integre edilebilirlik şartı olan (2.2.8) denklemi ile verilen Nijhenuis burulma tansörünün sıfır olduğu görülür.

Komplemanter vektör alanı $T_k = 0$ olursa yukarıdaki tanımların Riemann uzayındaki karşılıkları elde edilir [2-3].

Böylece, Weyl uzaylarında yaklaşık Kaehler yapısı ile ilgili aşağıdaki teoremleri ifade ve ispat edebiliriz [11].

Teorem 2.2.1. Yaklaşık Kaehler yapısı integre edilebilir ise yapı Kaehlerdir.

İspat. F_i^k yapısı yaklaşık Kaehler yapısı olduğundan,

$$\dot{\nabla}_h F_{ij} + \dot{\nabla}_i F_{jh} + \dot{\nabla}_j F_{hi} = 0, \tag{2.2.9}$$

ve F_i^k integre edilebilir olduğundan

$$N_{ij}^k = F_i^h(\dot{\nabla}_h F_j^k - \dot{\nabla}_j F_h^k) - F_j^h(\dot{\nabla}_h F_i^k - \dot{\nabla}_i F_h^k) = 0, \tag{2.2.10}$$

bağıntıları geçerlidir. Böylece, (2.2.10) g_{km} ile çarpılır ve k üzerinden toplam alınırsa

$$F_i^h(\dot{\nabla}_h F_{jm} - \dot{\nabla}_j F_{hm}) - F_j^h(\dot{\nabla}_h F_{im} - \dot{\nabla}_i F_{hm}) = 0, \tag{2.2.11}$$

elde edilir ve (2.2.9) denkleminden

$$\dot{\nabla}_h F_{ij} + \dot{\nabla}_i F_{jh} = -\dot{\nabla}_j F_{hi}, \tag{2.2.12}$$

bulunur.(2.2.12) denklemi ve F_{ij} tansörünün anti simetrik özelliği kullanılırsa,

$$\dot{\nabla}_h F_{jm} = -\dot{\nabla}_j F_{mh} - \dot{\nabla}_m F_{hj} = \dot{\nabla}_j F_{hm} - \dot{\nabla}_m F_{hj}, \tag{2.2.13}$$

ve

$$\dot{\nabla}_h F_{im} = -\dot{\nabla}_i F_{mh} - \dot{\nabla}_m F_{hi} = \dot{\nabla}_i F_{hm} - \dot{\nabla}_m F_{hi}, \tag{2.2.14}$$

bulunur.(2.2.13) ve (2.2.14) bağıntıları (2.2.10) denkleminde kullanılırsa,

$$F_i^h(-\dot{\nabla}_m F_{hj}) - F_j^h(-\dot{\nabla}_m F_{hi}) = 0, \tag{2.2.15}$$

ve

$$-F_i^h(\dot{\nabla}_m F_{hj}) + F_j^h(\dot{\nabla}_m F_{hi}) = 0, \tag{2.2.16}$$

elde edilir. (2.2.16) denklemi F_n^i ile çarpılır ve i üzerinden toplam alınırsa

$$\dot{\nabla}_m F_{nj} + F_n^i F_j^h(\dot{\nabla}_m F_{hi}) = 0, \tag{2.2.17}$$

elde edilir.

$$F_{hi} F_n^i F_j^h = g_{it} F_h^t F_n^i F_j^h = g_{hn} F_j^h = F_{jn}, \tag{2.2.18}$$

olduğundan (2.2.18) denkleminin m indisine göre kovaryant türevi alınırsa,

$$\dot{\nabla}_m F_{jn} = (\dot{\nabla}_m F_{hi}) F_n^i F_j^h + F_{hi} \dot{\nabla}_m (F_n^i F_j^h), \tag{2.2.19}$$

ve

$$(\dot{\nabla}_m F_{hi}) F_n^i F_j^h = -\dot{\nabla}_m F_{nj} - F_{hi} \dot{\nabla}_m (F_n^i F_j^h), \tag{2.2.20}$$

elde edilir.(2.2.20) bağıntısı (2.2.17) de yerine yazılırsa

$$\dot{\nabla}_m F_{nj} - \dot{\nabla}_m F_{nj} - F_{hi} \dot{\nabla}_m (F_n^i F_j^h) = 0, \tag{2.2.21}$$

ve buradan

$$F_{hi} \dot{\nabla}_m (F_n^i F_j^h) = 0, \tag{2.2.22}$$

elde edilir. (2.2.22) denkleminin m indisine göre kovaryant türevi alınırsa,

$$g_{it} F_h^t F_j^h \dot{\nabla}_m F_n^i + g_{it} F_h^t F_n^i \dot{\nabla}_m F_j^h = 0, \tag{2.2.23}$$

bulunur. (2.2.23) denkleminde (2.2.1) ve (2.2.2) kullanılırsa

$$-\dot{\nabla}_m F_{nj} + \dot{\nabla}_m F_{jn} = 0, \tag{2.2.24}$$

elde edilir. Ayrıca, F_{nj} tansörünün anti-simetrik olma özelliği (2.2.24) denkleminde kullanılırsa

$$\dot{\nabla}_m F_{jn} = 0, \tag{2.2.25}$$

elde edilir. (2.2.4) den

$$\dot{\nabla}_m g_{nk} F_j^k = 0, \tag{2.2.26}$$

ve

$$g_{nk} \dot{\nabla}_m F_j^k = 0, \tag{2.2.27}$$

bulunur. (2.2.27) denkleminin her iki yanı g^{nt} ile çarpılırsa

$$g^{nt} g_{nk} \dot{\nabla}_m F_j^k = 0, \tag{2.2.28}$$

ve buradan da

$$\dot{\nabla}_m F_j^t = 0, \tag{2.2.29}$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.2.2. F_j^i Hermitsel yapısı

$$\dot{\nabla}_i F_{jk} = \dot{\nabla}_j F_{ik}, \tag{2.2.30}$$

bağıntısını sağlarsa yapı Kaehlerdir.

İspat. F_{ij} tansörünün anti-simetrik olma özelliğini kullanır ve indisleri devirsel olarak değiştirirsek,

$$\dot{\nabla}_i F_{jk} + \dot{\nabla}_i F_{kj} = 0, \tag{2.2.31}$$

$$\dot{\nabla}_j F_{ki} + \dot{\nabla}_j F_{ik} = 0, \tag{2.2.32}$$

ve

$$\dot{\nabla}_k F_{ij} + \dot{\nabla}_k F_{ji} = 0, \tag{2.2.33}$$

denklemleri elde edilir. Teoremin hipotezi kullanılırsa, (2.2.31), (2.2.32) ve (2.2.33) denklemleri

$$\dot{\nabla}_i F_{jk} + \dot{\nabla}_k F_{ij} = 0, \tag{2.2.34}$$

$$\dot{\nabla}_j F_{ki} + \dot{\nabla}_i F_{jk} = 0, \tag{2.2.35}$$

ve

$$\dot{\nabla}_k F_{ij} + \dot{\nabla}_j F_{ki} = 0, \tag{2.2.36}$$

şeklini alır. Buradan da kolayca,

$$2(\dot{\nabla}_i F_{jk} + \dot{\nabla}_j F_{ki} + \dot{\nabla}_k F_{ij}) = 0, \tag{2.2.37}$$

ve

$$2(\dot{\nabla}_i F_{jk} + \dot{\nabla}_i F_{kj} + \dot{\nabla}_j F_{ik}) = 0 \tag{2.2.38}$$

bulunur. (2.2.38) denkleminden (2.2.31) çıkartılırsa

$$\dot{\nabla}_j F_{ik} = 0, \tag{2.2.39}$$

ve

$$\dot{\nabla}_j g_{im} F_k^m = 0, \tag{2.2.40}$$

buradan da

$$g_{im} \dot{\nabla}_j F_k^m = 0, \tag{2.2.41}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı g^{it} ile çarpılırsa

$$g^{it} g_{im} \dot{\nabla}_j F_k^m = 0, \tag{2.2.42}$$

elde edilir. (2.2.42) eşitliğinden her t, j, k indisi için

$$\dot{\nabla}_j F_k^t = 0, \tag{2.2.43}$$

olduğu görülür, yani yapı Kaehlerdir.

Teorem 2.2.3. F_i^j Hermitsel yapısı

$$F^{ij} \dot{\nabla}^k \dot{\nabla}_k F_{ij} = 0, \tag{2.2.44}$$

bağıntısını sağlarsa Kaehlerdir. Burada $\dot{\nabla}^k = g^{jk} \dot{\nabla}_j$ dir.

İspat. $F_{ij} F^{hi} = -\delta_j^h$ olduğundan

$$F_{ij} F^{ij} = 2n, \tag{2.2.45}$$

dir.(2.2.45) ifadesinin genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa,

$$\dot{\nabla}_k (F_{ij} F^{ij}) = (\dot{\nabla}_k F_{ij}) F^{ij} + F_{ij} (\dot{\nabla}_k F^{ij}) = 0, \tag{2.2.46}$$

ve

$$(\dot{\nabla}_k (g^{mi} F_m^j)) g_{jh} F_i^h = (\dot{\nabla}_k (g_{jh} F_m^j)) g^{mi} F_i^h = (\dot{\nabla}_k F_{mh}) F^{hm} = 0, \tag{2.2.47}$$

bulunur. Buradan da

$$2F^{ij}(\dot{\nabla}_k F_{ij}) = 0, \tag{2.2.48}$$

elde edilir. (2.2.48) ifadesinin genelleştirilmiş kovaryant türevini alırsak

$$2[F^{ij}\dot{\nabla}^k(\dot{\nabla}_k F_{ij}) + (\dot{\nabla}^k F^{ij})(\dot{\nabla}_k F_{ij})] = 0, \tag{2.2.49}$$

elde edilir. Teoremin hipotezi ile (2.2.49) denkleminden

$$(\dot{\nabla}^k F^{ij})(\dot{\nabla}_k F_{ij}) = 0, \tag{2.2.50}$$

bulunur. Buradan da

$$(g^{mk}\dot{\nabla}_m g^{tj} F_t^i)(\dot{\nabla}_k g_{jp} F_i^p) = g^{mk} g^{tj} g_{jp}(\dot{\nabla}_k F_i^p)(\dot{\nabla}_m F_t^i), \tag{2.2.51}$$

ve

$$g^{mk}(\dot{\nabla}_m F_t^i)(\dot{\nabla}_k F_i^t) = 0, \tag{2.2.52}$$

bulunur. Eşitliğin her iki yanı g_{mn} ile çarpılırsa ,

$$(\dot{\nabla}_m F_t^i)(\dot{\nabla}_n F_i^t) = 0, \tag{2.2.53}$$

ve

$$\dot{\nabla}_m F_t^i = 0, \tag{2.2.54}$$

elde edilir, (2.2.54) F_j^i tansörünün Kaehler olduğu sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.2.4. Yaklaşık Kaehler yapısı, yaklaşık yarı Kaehlerdir.

İspat. (2.2.45)ve (2.2.48) denklemlerinden

$$F_{jh}F^{ij} = -\delta_i^h, \tag{2.2.55}$$

$$F^{ij}(\dot{\nabla}_k F_{ij}) = 0, \tag{2.2.56}$$

ve yaklaşık Kaehler tanımından

$$F_{hij} = \dot{\nabla}_h F_{ij} + \dot{\nabla}_i F_{jh} + \dot{\nabla}_j F_{hi} = 0, \tag{2.2.57}$$

dir. (2.2.57) F^{ij} ile çarpılırsa,

$$F^{ij}F_{hij} = F^{ij}(\dot{\nabla}_i F_{jh}) + F^{ij}(\dot{\nabla}_j F_{hi}) = 0, \tag{2.2.58}$$

elde edilir. (2.2.55) bağıntısının her iki yanının genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa

$$(\dot{\nabla}_i F^{ij})F_{jh} + F^{ij}(\dot{\nabla}_i F_{jh}) = 0, \tag{2.2.59}$$

bulunur. Buradan da

$$F^{ij}(\dot{\nabla}_i F_{jh}) = -F_{jh}(\dot{\nabla}_i F^{ij}) = F_{jh}(\dot{\nabla}_i F^{ji}), \tag{2.2.60}$$

ve

$$F_{jh}(\dot{\nabla}_i F^{ij}) = -F_{hj}(\dot{\nabla}_i F^{ji}) = -g_{jk}g^{jm}F_h^k(\dot{\nabla}_i F_m^i) = F_h^m F_m, \tag{2.2.61}$$

elde edilir. (2.2.61) denkleminden

$$F^{ij}F_{hij} = 2F_h^i F_i, \tag{2.2.62}$$

olduğu görülür. (2.2.62) eşitliğinin her iki tarafı F_k^h ile çarpılınca

$$F^{ij}F_{hij}F_k^h = 2F_h^i F_k^h F_i = -2F_k, \tag{2.2.63}$$

ve

$$F_k = -\frac{1}{2}F^{ij}F_{hij}F_k^h, \tag{2.2.64}$$

bulunur. Yaklaşık kompleks yapı yaklaşık Kaehler olduğundan $F_{hij} = 0$ dır. (2.2.64) denkleminden, $F_k = 0$ olduğu, yani, yaklaşık yarı-Kaehler yapısı elde edilir.

Teorem 2.2.5. a, sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, F_i^j yaklaşık yarı Kaehler yapısı

$$\dot{\nabla}_k F_{ij}\dot{\nabla}^i F^{jk} = a\dot{\nabla}_k F_{ij}\dot{\nabla}^k F^{ij}, \tag{2.2.65}$$

bağıntısını sağlarsa,

$$Q = R + \frac{1}{2}F^{mk}F^{ih}R_{mkih} + 2g^{ik}(\nabla_i T_k - \nabla_k T_i), \tag{2.2.66}$$

ifadesi, a nın pozitif veya negatif olmasına göre pozitif veya negatiftir.

İspat. (2.2.1) denkleminin kovaryant türevi alınır ve (2.2.7) denklemi kullanılırsa

$$\dot{\nabla}_k(F_i^j F_j^k) = F_j^k \dot{\nabla}_k F_i^j = 0, \tag{2.2.67}$$

elde edilir. (2.2.67) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$\dot{\nabla}^i(F_j^k \dot{\nabla}_k F_i^j) = (\dot{\nabla}_k F_i^j)(\dot{\nabla}^i F_j^k) + F_j^k(\dot{\nabla}^i \dot{\nabla}_k F_i^j) = 0, \tag{2.2.68}$$

bulunur. Diğer taraftan, (2.2.4)ve (2.2.5) yardımıyla

$$(\dot{\nabla}_k F_{ij})(\dot{\nabla}^i F^{jk}) = (\dot{\nabla}_k F_i^j)(\dot{\nabla}^i F_j^k), \tag{2.2.69}$$

$$\dot{\nabla}_i \dot{\nabla}_k F^{ij} = \dot{\nabla}^i \dot{\nabla}_k F_i^j, \tag{2.2.70}$$

ve

$$\dot{\nabla}_k \dot{\nabla}_i F^{ij} = 0, \tag{2.2.71}$$

olduğu görülür. (2.1.7), (2.1.14), (2.2.70) ve (2.2.71) denklemleri kullanılarak

$$\dot{\nabla}^i \dot{\nabla}_k F_i^j = \dot{\nabla}_i \dot{\nabla}_k F^{ij} = F^{hj} R^i_{hki} + F^{ih} R^j_{hki} + 2(\nabla_i T_k - \nabla_k T_i) F^{ij}, \tag{2.2.72}$$

elde edilir.

(2.1.10) ile (2.1.11) kullanılır ve (2.2.69) ile (2.2.72) denklemleri (2.2.68) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$(\dot{\nabla}_k F_{ij})(\dot{\nabla}^i F^{jk}) = R - F_j^k F^{ih} R^j_{hki} + 2g^{ik}(\nabla_i T_k - \nabla_k T_i), \tag{2.2.73}$$

elde edilir. (2.1.9) eşitliği kullanılarak

$$F_j^k F^{ih} R^j_{hki} = F^{mk} F^{ih} R_{mhki}, \tag{2.2.74}$$

bulunur. (2.1.12) ve (2.2.74) yardımıyla (2.2.73) denklemi

$$(\dot{\nabla}_k F_{ij})(\dot{\nabla}^i F^{jk}) = R + \frac{1}{2} F^{mk} F^{ih} R_{mkih} + 2g^{ik}(\nabla_i T_k - \nabla_k T_i), \tag{2.2.75}$$

şeklini alır.

(2.2.65), (2.2.66) ve (2.2.75) denklemleri kullanılarak

$$Q = a(\dot{\nabla}_k F_{ij})(\dot{\nabla}^k F^{ij}), \tag{2.2.76}$$

eşitliğinin a nın pozitif veya negatif olmasına göre, pozitif veya negatif olduğu görülür.

3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, [8-9]'da ele alınan Weyl uzaylarında, yaklaşık yapı, Hermitsel yapı, Kaehler yapı, yaklaşık Kaehler, yaklaşık yarı Kaehler tanımları verilmiştir. g_{ij} Hermitsel metrik tansörüne ve $F_i^{\ h}$ kompleks yapısına sahip bir Kaehler uzayında, yaklaşık Kaehler yapısı integre edilebilirse yapının Kaehler olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, Weyl uzaylarında Hermitsel yapının hangi koşullar altında Kaehler olacağı teoremlerle ifade ve ispat edilmiştir [1-5].

F_j^i Hermitsel yapısının (2.2.30) ve (2.2.44) bağıntılarını sağlaması halinde yapının Kaehler olacağı ve yaklaşık Kaehler yapısının aynı zamanda yaklaşık yarı Kaehler olduğu ispat edilmiştir.

Ayrıca, a, sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, F_i^j yaklaşık yarı Kaehler yapısı (2.2.65) bağıntısını sağlarsa, (2.2.66) ifadesinin, a sabitinin pozitif veya negatif olmasına göre pozitif veya negatif olacağı gösterilmiştir.

Bundan sonra, yaklaşık Tachibana (nearly Kaehler) yapıları Weyl uzayları için incelenebilir. Bu uzaylara ait metrik örnekleri araştırması yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] **Carmo, M.P.do**, 1992. Riemanian Geometry. Mathematics: *Theory and Applications*. Boston, Mass.

[2] **Yano, K.,**, 1965. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces,*Pergamon Press*

[3] **Yano, K., Kon, M.,** 1984. *Structures on Manifolds World Scientific Pub.*

[4] **Kobayashi, S., Nomizu, K.,** 1969. Foundations of Differential Geometry, *Vol.2 Interscience Publishers*

[5] **Okubo, T. ,** 1987. Differential Geometry, Marcel Dekker, Inc. 270 Madison Avenue, New York, 10016 .

[6] **Weatherburn, C.E.,**, 1966. An introduction to Riemanian Geometry and The Tensor Calculus, *Cambrige University Press*, Cambrige.

[7] **Eisenhart, L.P.,**, 1927. Non-Riemanian Geometry. *American Mathematical Society, Colloquium Publications*, Volume **VIII**.

[8] **Norden, A.,** 1976 (in Russian), Affinely connected spaces, GRFML, Moscow.

[9] **Hlavaty, V.,** (1949) Theorie d'immersion d'une W_m dans W_n, Ann. Soc. Polon. Math., V.**21**, 196-206.

[10] **Eisenhart, L.P.,** 1927, Non-Riemannian Geometry, New York Published by the American Mathematical Socciety 501 West 116th Street.

[11] **Demirbüker, H., Ozdemir, F.,** (1998 Tom 43(57) 2), Almost *Hermitian*, Almost Kaehlerian and Almost semi-Kaehlerian Structures in Weyl Spaces, Buletinul Şthntific al Universităth Politechnica Din Timişoara

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Sevinç Yılmaz

Doğum Yeri ve Tarihi: 29 Mayıs 1971

Adres: 6820 sok. B-8 Blok No:22 D:33 Evka-6 Çiğli/İZMİR

Lisans Üniversite: İstanbul Teknik Üniversitesi Matamatik Mühendisliği