



## VİSKOZİTENİN BASINCA BAĞLI OLDUĞU AKIŞKANLAR İÇİN POISEUILLE AKIMI

İlkay Sıkdokur, Saadet Özer

İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul

### ABSTRACT

The dependence of the viscosity of fluids on pressure has been well established by experiments. Especially, taking into consideration the dependency of pressure on viscosity in problems where there is a large variation of pressure in the flow domain become inevitable. Because of this reason, the fluids with pressure dependent viscosity, has become more popular in fluid flow problems in a wide variety of applications.

In this work, we have examined the Poiseuille; related to the fluid having pressure dependent viscosity maned on Barus, through the cylindrical rigid tube. After obtaining the field equations of the 2 dimensional flow , we have written them in terms of stream function. We have investigated the perturbation expansions of the analytical solution in terms of the paramater expressing the dependency of viscosity on pressure to be small. We have shown that flow could only have longitudinal velocity field under homogenous boundary conditions. Then after we also studied the case that there exist suction on the tube boundaries.

### ÖZET

Viskozitenin basınca bağlı olduğu akışkanlar, deneysel çalışmalarda çokça belirlenmiştir. Özellikle akış alanlarında büyük basınç değişimleri söz konusu olduğu hallerde viskozitenin basınca bağlı olduğu modelleri ele almak reel problemler açısından kaçınılmaz hale gelmiştir. Bu nedenle, viskozitenin basınca bağlı olduğu akışkanlar çok çeşitli uygulama alanlarında, daha popüler akım problemleri haline gelmiştir.

Bu çalışmada, Barus tarafından adlandırılan, basınca bağlı viskoziteye sahip bir akışkanın Poiseuille akımını, silindirik rijid tüpte inceledik. İki boyutlu akımın alan denklemlerini elde ettikten sonra, onları akım fonksiyonu cinsinden yazdık. Analitik çözümü, viskozitenin basınca bağlılığını belirleyen parametrenin küçük olduğu varsayımı ile, pertürbatif olarak inceledik. Homojen sınır koşulları altında akımın sadece boyuna bileşeni olabileceğini gösterdik. Ardından tüpün sınırlarında emme olduğu hali çalıştık.

### GİRİŞ

Akışkanlar mekaniğinde newtonyen bir akışkana ait gerilme tansörünün ifadesi

$$\mathbf{t} = -p \mathbf{I} + 2 \mu \mathbf{d} \quad (1)$$

ile verilmektedir. Burada  $p$  basınç fonksiyonunu,  $\mathbf{d}$  şekil değiştirme hızı tansörünü,  $\mu$  ise viskoziteyi göstermektedir. Viskozite, bir akışkanın, yüzey gerilimi altında deforme olmaya karşı gösterdiği direncin ölçüsüdür. Akışkanın akmaya karşı gösterdiği iç direnç olarak da tanımlanabilir. Bu direnç, komşu akışkan tabakalarının hareketine karşı göstermiş olduğu dirençtir. Normal gerilmeler büyüdükçe direnç de büyüyecektir. Buradan hareketle viskozitenin normal gerilmeye dik olacağını ilk olarak Stokes [1] ortaya atmıştır.

Katıların ve akışkanların yüksek basınç altında davranışlarını sistematik biçimde inceleyen araştırmalar 1930'lardan sonra yapılmıştır. Çok farklı akışkanlar üzerinde deneyler yaparak, viskozitenin, basınca, sıcaklığa, yoğunluğa bağlı olduğu değişik modeller önermişlerdir. Viskozitenin basınca lineer olmayan bağlılığı üzerine en etkili model Barus [2] tarafından,

$$\mu(p) = \mu_0 \exp(\epsilon p) \quad (2)$$

ilişkisi ile önermiştir. Sonraki süreçte, bu ilişki deneysel olarak da birçok çalışmada gözlenmiştir. Burada  $\epsilon$ ,  $(Pa)^{-1}$  boyutunda bir sabittir. Viskozitenin basınca bağlılığı üstel alınarak, akışkanın büyük basınçlara maruz kaldığı hidrolik taşıyıcıların yataklarında akım Bair [3], Szeri [4] ve Schaeffer [5] tarafından incelenmiştir. Sıkışmaz ve Newtonyen akışkanlar için viskozitenin basınca bağlı olma durumunun matematiksel analizi Renardy [6] ve Gazzola [7] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarda sıkışmaz ve Newtonian akışkan varsayımı ile oluşturulan modelin çözümlerinin varlığı ve teklifi tartışılmıştır.

Bair ve arkadaşları [3] sıkışmaz ve Newtonian akışkanın tek yönlü akımında viskozitenin üstel olması durumunda çözümün olmadığını göstermişler ve ancak viskozitenin basınca lineer bağlı olduğu durumda çözüm elde edebilmişlerdir. Hron [8], Vasudevaiah [9] paralel plaklar arasında ve silindirik tüp içinde viskozitenin basınca bağlı olduğu çeşitli durumlar için akımı incelemişler ve üstel bağlılık durumunda paralel levhalarda çözümün olmadığını göstermişlerdir. Ayrıca hız profillerinin Navier-Stokes modelinden (viskozite sabit) oldukça farklı olduğunu, parabolik yapıdan bir yatık "V" harfine dönüştüğünü göstermişlerdir. Silindirik tüp içinde akım için lineer ve üstel viskozite basınç bağlılığı durumunda çözümleri elde etmişlerdir. Malek v.d. [10] tarafından üç boyutlu periyodik akımlarda viskozite-basınç ilişkisi göz önünde tutularak periyodik çözümler elde edilmiştir.

Son yıllarda Rajagopal ve arkadaşları [12-17] viskozite basınç bağlılığını göz önüne alarak birçok problemi ayrıntılı olarak incelemişlerdir. Renardy [18], viskozitenin basınca bağlılığının lineer olması durumunda herhangi kesitli bir tüpte paralel akımın oluşabileceğini göstermiş ve ayrıca basınca bağlılığın üstel olması durumunda dairesel kesitli tüpte hızın yarıçapa bağlılığının kuadratik yapıda olması gerektiği sonucunu elde etmiştir.

Bu çalışmada viskozitenin basınca bağlılığının (2) denklemi ile verilen Barus modeli esas alınarak, sonsuz uzunluklu silindirik tüp içerisinde iki boyutlu sıkışmaz akışkanın akış problemi ele alınmıştır. Alan denklemleri viskozitenin özel bağlılıkları ve koordinat takımından bağımsız olarak elde edildikten sonra, problem akım fonksiyonu tanımlanarak incelenmiştir. Elde edilen lineer olmayan alan denklemlerinin çözümü için pertürbatif yaklaşım, (2) denkleminde verilen viskozite tanımında geçen  $\epsilon$  parametresinin küçük olduğu varsayımından hareketle geliştirilmiştir.

### ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Viskozitenin basınca bağlı olduğu akışkanlar için gerilme tansörü (1) denkleminde olduğu gibi

$$\mathbf{t} = -p \mathbf{I} + 2 \mu(p) \mathbf{d} \quad (3)$$

verilir. Burada hız gradyanı tansörü  $\mathbf{d} = \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T$  olarak tanımlanmıştır. Lineer momentumun korunumu

$$\nabla \cdot \mathbf{t} + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (4)$$

denkleminde, (3) ile verilen gerilme tansörü ifadesi kullanılırsa, akışkanın alan denklemleri

$$-\nabla p + \frac{\partial \mu}{\partial p} \nabla p (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \mu (\Delta \mathbf{v} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})) + \rho \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{v}, \quad (5)$$

şeklinde elde edilir.  $\rho$ , akışkanın yoğunluğunu,  $\mathbf{f}$  ise, kütle kuvvetlerini ifade etmektedir. (5) denklemlerini boyutsuz formda yazabilmek için gerekli olan

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad t^* = \frac{tU}{L}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}$$

büyüklikleri tanımladıktan sonra alan denklemleri boyutsuz halde,

$$-\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial \mu^*}{\partial p^*} \nabla^* p^* (\nabla^* \mathbf{v}^* + \nabla^* \mathbf{v}^{*T}) + \mu^* \Delta^* \mathbf{v}^* \right] = \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\nabla^* \mathbf{v}^{*T}) \mathbf{v}^* \quad (6)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $L$ ,  $U$ ,  $\mu_0$  ve  $Re$  sırasıyla karakteristik boy, hız, viskozite ve

$Re = \frac{\rho UL}{\mu_0}$ , Reynolds sayısını temsil etmektedir, ayrıca akışkanın sıkışmaz olduğu ve kütle kuvvetlerinin olmadığı varsayılmıştır. Dikkat edilirse bu hali ile alan denklemi, herhangi bir koordinat takımı ve viskozitenin basınca özel bağılıklarından bağımsız genel haldedir ve özel viskozite hali için boyutsuz denklemlerin geliştirilmesi son derece kolaydır.

### POISEUILLE AKIMI

Bu çalışmada sonsuz uzunluklu silindirik rijid tüp boyunca, viskozitenin (2) ile verilen Barus modeli esas alınarak, akım problemi (6) alan denklemleri ile çalışılmıştır. Hızın klasik kartezyen koordinatlar üzerinde,

$$\mathbf{v} = (\mathbf{u}(x, y), v(x, y), \mathbf{w}(x, y, z)) \quad (7)$$

şeklinde koordinatlara bağlı olduğu durumlar ele alınmıştır. Sıkışmaz akışkan için geçerli olan

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

sıkışmazlık koşulu altında hız alanının boyuna bileşeni  $w$ 'nin  $z$ 'ye bağıllığı düşer. Öte yandan sıkışmazlık koşulu altında hız alanının ilk iki bileşeni akım fonksiyonu  $\psi(x, y)$  cinsinden

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

şeklinde tanımlanır ise (7) hız alanı,

$$\mathbf{v} = (\psi_y, -\psi_x, w(x, y)) \quad (8)$$

haline gelir. Basınç ise  $p=p(x,y,z)$  olarak alınmıştır.

Viskozitenin basınca bağıllığı (2) ile Barus tarafından verilen model ile  $\mu = \mu_0 e^{\epsilon p}$  şeklinde alınırsa akışkanın (6) ile elde edilen alan denklemleri

$$-\nabla p + \frac{\mu_0}{Re} e^{\epsilon p} [\epsilon \nabla p (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \Delta \mathbf{v}] = (\nabla \mathbf{v}^T) \mathbf{v} \quad (9)$$

olacaktır. Burada, Barus modelinde geçen  $\mu_0$  bir sabit olup, boyutsuzlaştırma aşamasında ele alınmış olan karakteristik viskozite ile karıştırılmamalıdır. Öte yandan, kolaylık olması açısından boyutsuz büyüklükleri ifade eden \* notasyonu kaldırılmıştır. Hız alanının akım fonksiyonu cinsinden bileşeni denklemlerde kullanılır ise, (9) denklemleri, basınç, akım fonksiyonu ve hızın boyuna bileşeni üzerine 3 denklemdir.  $e^{\epsilon p}$  terimi seri açılır ise;

$$e^{\epsilon p} = 1 + \epsilon p + \frac{1}{2} \epsilon^2 p^2 + \dots$$

yazılabilir.

Burada viskozitenin basınca üstel bağlılığını temsil eden  $\epsilon$  parametresinin küçük olduğu varsayımından hareketle, basınç, boyuna hız bileşeni ve akım fonksiyonu aşağıdaki gibi bir pertürbasyon serisi olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \dots \\ w &= w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots \\ \psi &= \epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi^2 + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Bu durumda (9) denkleminde sırası ile aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\epsilon^0 \text{ mertebesinde; } p_{0x} = 0, \quad p_{0y} = 0, \quad p_{0z} = \frac{\mu_0}{Re} \Delta w_0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^1 \text{ mertebesinde; } p_{1x} &= \frac{\mu_0}{Re} (p_{0z} w_{0x} + \Delta \psi_{1y}) \\ p_{1y} &= \frac{\mu_0}{Re} (p_{0z} w_{0y} - \Delta \psi_{1x}) \\ p_{1z} &= \frac{\mu_0}{Re} (\Delta w_1 + p_0 \Delta w_0) - (w_{0x} \psi_{1y} - w_{0y} \psi_{1x}) \end{aligned} \quad (12)$$

$\epsilon^2$  mertebesinde;

$$\begin{aligned} p_{2x} &= \frac{\mu_0}{Re} (\Delta \psi_{2y} + p_0 \Delta \psi_{1y} + p_0 p_{0z} w_{0x} + p_{0z} w_{1x} + p_{1z} w_{0x}) - \psi_{1yy} \psi_{1x} + \psi_{1y} \psi_{1xy} \\ p_{2y} &= \frac{\mu_0}{Re} (-\Delta \psi_{2x} - p_0 \Delta \psi_{1x} + p_0 p_{0z} w_{0y} + p_{0z} w_{1y} + p_{1z} w_{0y}) + \psi_{1xy} \psi_{1x} - \psi_{1xx} \psi_{1y} \\ p_{2z} &= \frac{\mu_0}{Re} (\Delta w_2 + p_0 \Delta w_1 + \frac{1}{2} p_0^2 \Delta w_0 + p_1 \Delta w_0 + w_{0y} p_{1y} + w_{0x} p_{1x}) + \psi_{2y} w_{0x} - \psi_{2x} w_{0y} + \\ &\quad \psi_{1y} w_{1x} - \psi_{1x} w_{1y} \end{aligned} \quad (13)$$

(11) denklemleri,  $w_0(x, y)$  olması nedeni ile, basıncın pertürbasyon serisindeki ilk teriminin sadece  $z$  ye bağlı

$$p_0 = -\bar{P}_0 z + c_1$$

olması gerektiği sonucunu verir. Basıncın  $p(0,0,0) = 0$  koşulu altında,  $c_1 = 0$  olması gerektiği elde edilir.

(12) denklemlerinden ilki  $y$ 'ye ikincisi  $x$ 'e göre türetilip birbirinden çıkarılırsa, akım fonksiyonun birinci terimi olan  $\psi_1$ 'in

$$\Delta^2 \psi_1 = 0$$

biharmonik denklemini sağladığı elde edilir. Öte yandan 3. denklem,  $z$ 'ye göre türetilise, basınç üzerinde,

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} = \bar{P}_0^{-2}$$

yazılabilir. Denklemin integrasyonundan

$$p_1 = \frac{1}{2} \bar{P}_0^2 z^2 + \alpha_1(x, y)z + \alpha_2(x, y) \quad (14)$$

elde edilir. (12) denklemlerinin ilk ikisi göz önünde bulundurulursa, buradan

$$\alpha_1(x, y) = \bar{P}_1 \quad (15)$$

şeklinde bir sabit olması gerektiği görülür,  $\alpha_2(x, y)$  fonksiyonu ise, akım fonksiyonunun ilk bileşeni olan  $\psi_1$ 'in bilinmesi halinde (12) denklemlerinin ilk iki denkleminde açık olarak belirlenebilir.

Öte yandan hızın boyuna bileşeninin 2. terimi olan  $w_1$ , aşağıda (17)<sub>2</sub> ile verilen Poisson denklemini sağlamalıdır.

Benzer şekilde (13) denklemlerinin ilki  $y$ 'ye ikincisi  $x$ 'e göre türetilip birbirinden çıkarılırsa, aşağıda verilen (18) denklemi elde edilir. Bu denklemler toplu halde şu şekilde yazılır:

$$\epsilon^0 \text{ mertebesinde; } \Delta w_0 = -\frac{\bar{P}_0 Re}{\mu_0} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^1 \text{ mertebesinde; } \Delta^2 \psi_1 &= 0 \\ \Delta w_1 &= \frac{Re}{\mu_0} (w_{0x} \psi_{1y} - w_{0y} \psi_{1x}) + \bar{P}_1 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\epsilon^2 \text{ mertebesinde; } \Delta^2 \psi_2 = -p_0 \Delta^2 \psi_1 + \frac{\mu_0}{Re} (\psi_{1y} \Delta \psi_{1x} - \psi_{1x} \Delta \psi_{1y}) \quad (18)$$

### **Homojen Sınır Koşulları Altında Rijid Silindirik Tüpte Akım:**

Viskozitenin basınca (2) denklemi ile verilen Barus tipi modeli için, üstel bağıllığın parametresinin küçük olduğu varsayımı altında pertürbatif yaklaşımla elde edilen alan (16-18) denklemlerini homojen sınır koşulları altında inceleyelim. Bu durumda, dairesel silindirik tüpün yüzeyinde hızın 0 olacağı nedeni ile sınır koşulları

$$w = \psi_x = \psi_y = 0, \quad r = 1$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda (17) denkleminin çözümünden

$$\psi_1 = 0$$

elde edilir. Bu sonuç diğer denklemlerde kullanılır ise serinin her adımında akım fonksiyonunun 0 bulunacağı, dolayısı ile radyal ve teğetsel doğrultularda hız alanı üretmeyeceği açıktır. Hızın boyuna bileşenleri olan  $w_i$  ler ise her bir adımda, Poisson denklemlerini sağlayan fonksiyonlar olacaktır. Dairesel silindirik tüp için, hız alanı (7) açık şekilde,

$$\mathbf{v} = (0, 0, \gamma(1 - r^2))$$

şeklinde belirlenirler. Burada  $\gamma$ , koordinatlardan bağımsız, pertürbasyon serisinin adımlarındaki basınç gradyanı sabiti, viskozitenin katsayısı ve Reynolds sayısına bağlı sabitler olarak belirlenebilir.

**Silindirik Tüpün Yüzeylerinde Geçirgenlik Hali:**

Burada, silindirin yüzeylerinde geçirgenlik olduğu durum incelenecektir. Bu durumda hızın normal bileşeni geçirgenliği kontrol eden fonksiyona, teğetsel bileşeni ise sıfıra eşit olacaktır. Sınır koşulları en genel formunda

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = f(\theta), \quad v_t = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (19)$$

şeklinde yazılabileceği açıktır. Burada  $\mathbf{n}$  ve  $\mathbf{t}$  sırasıyla, normal ve teğet vektörlerini ifade etmektedir. (19) eşitlikleri akım fonksiyonu cinsinden dairesel kesitli silindirik tüp için

$\psi|_{\partial R} = f(\theta), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r}|_{\partial R} = 0$  olarak yazılabilir. Akım fonksiyonunun pertürbasyon terimleri için geçirgenliği temsil eden  $f(\theta)$  fonksiyonu da seri açılır ise kısaca, problemin sınır koşulları

$$\psi_i|_{\partial R} = f_i(\theta), \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial r}|_{\partial R} = 0, \quad w_j|_{\partial R} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, j = 0, 1, 2 \dots \quad (20)$$

olacaktır. Burada dikkat edilecek olursa geçirgenliğin sabit olması hali ayrıca ele alınması gereken bir hal olarak karşımıza çıkmaktadır.

(16) denkleminin, (20) sınır koşulu altında çözümü

$$w_0 = \frac{\overline{P_0} Re}{4 \mu_0} (1 - r^2), \quad r^2 = x^2 + y^2$$

olarak belirlenir. Denklemdaki  $\overline{P_0}$  basınç gradyanı sabitinin pertürbasyon serisindeki ilk terimidir ve

Boyutsuzlaştırma aşamasında kullandığımız karakteristik hız için  $U = \frac{P_0 R^2}{4 \mu \mu_0}$  seçimi ile  $w_0$  boyuna hız bileşiminin katsayısının 1 alınabileceği görülür. Burada  $P_0$  karakteristik basınç gradyanı sabiti,  $R$ , karakteristik yarıçap,  $\mu$  ise karakteristik viskozitedir. O halde, sonuç olarak, hızın boyuna bileşeninin ilk terimi

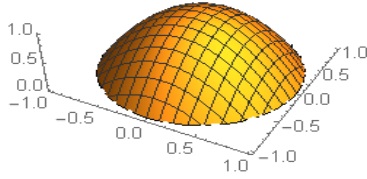
$$w_0 = 1 - r^2 = 1 - x^2 - y^2 \quad (21)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Bu sonuç klasik laminer akış ile örtüşmektedir. Zira  $\epsilon = 0$  hali,  $\mu = \mu_0$  laminer akış durumudur. Hız profili Şekil 1 ile verilmiştir.

Akım fonksiyonunun ilk bileşeni (15) denklemlerinden  $\Delta^2 \psi_1 = 0$  Biharmonik denkleminin çözümü ile belirlenecektir. Biharmonik denklemin çözümünü kompleks düzleme aktarırsak, denklemi

$$\Delta^2 \psi_1 = 16 \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0$$

şeklinde yazılabiliriz. Burada  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$  kompleks değişkenlerdir.



Şekil 1. boyuna hızın ilk bileşeni  $w_0$

Biharmonik denklemin çözümü,  $\Omega(z), \phi(z)$ , argümanlarının analitik fonksiyonları,  $\bar{\Omega}(\bar{z}), \bar{\phi}(\bar{z})$  ise onların kompleks eşlenikleri olmak kaydıyla,

$$\psi_1 = \bar{z}\Omega(z) + z\bar{\Omega}(\bar{z}) + \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})$$

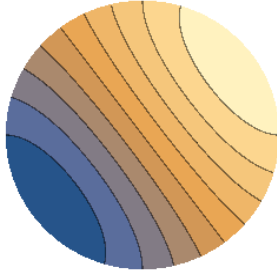
şeklinde elde edilir. Analitik fonksiyonlar, sınır koşulları ile belirlenecektir.

Burada dairesel silindirik tüpün yüzeylerinde (20) sınır koşullarında geçen, geçirgenlik fonksiyonunun

$$f_1(\theta) = f_{1,0} + f_{1,-1}e^{-i\theta} + f_{1,1}e^{i\theta}$$

$f_{1,0}, f_{1,1}, f_{1,-1}$  keyfi kompleks sabitler olan, ir üstel fonksiyon olduğu varsayımı ile problemi ele alalım. Negatif kuvvetin ve pozitif kuvvetin bir arada ele alınmasının nedeni, yüzeyde içten dışa ve dıştan içe geçirgenliğin her iki halinin birden ele alınmış olmasıdır. (20) sınır koşullarının ilk ikisi altında analitik fonksiyonlar argümanlarının kuvvet serilerine açılıp terim terim karşılaştırmalar yapılırsa, sonuç olarak akım fonksiyonunun, silindirik koordinatlardaki ifadesi aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\psi_1 = c + r(3 - r^2)(a \cos \theta + b \sin \theta) \quad (22)$$



Şekil 2. Akım fonksiyonu  $a=1.5, b=2, c=1$

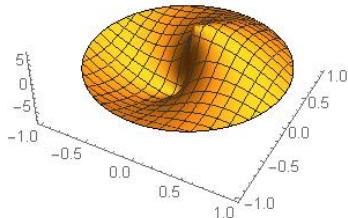
burada  $a, b, c$  sabitleri,  $f_{1,1} = a - ib, f_{1,-1} = a + ib, c = \text{Re}(f_{1,0})$  şeklinde tanımlanmıştır. Akım çizgilerine ait bir görsel Şekil 2 ile yanda verildiği gibidir. Akım fonksiyonu kullanılarak hızın teğetsel ve radyal bileşenleri ise

$$u_{1r} = 3(1 - r^2)(a \cos \theta + b \sin \theta)$$

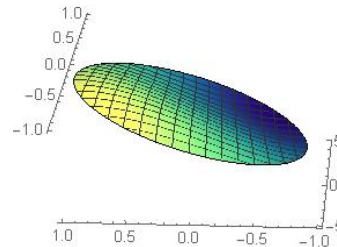
$$u_{1\theta} = r(3 - r^2)(b \sin \theta - a \cos \theta)$$

şeklinde elde edilir. Bu bileşenlerin grafikleri ise Şekil 3 ve Şekil 4 ile aşağıda verilmiştir. Geçirgenliğin kısıtlı; sadece ilk mertebede tutulması nedeni ile, etkisi son

derece az da olsa şekillerden gözlenebilmektedir. Geçirgenlik fonksiyonunun daha fazla terim ile ele alınması halinde, hız bileşenlerinin grafiklerinde gözlenmesi daha etkili olacaktır.



Şekil 3. Hızın teğetsel bileşeni,  $a=1.5, b=2, c=1$



Şekil 4. Hızın radyal bileşeni  $a=1.5, b=2, c=1$

Öte yandan, basıncın pertürbasyon serisindeki ikinci bileşeni yani  $\epsilon$  üzerindeki terimi ise, (13) denklemlerinden (14) ve (15)'in göz önünde bulundurulması ile,

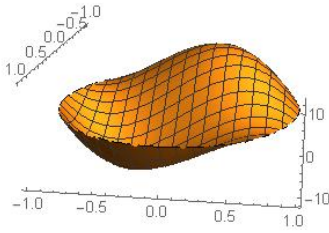
$$p_1 = \frac{1}{2} \bar{P}_0^{-2} (z^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)) + \bar{P}_1 z + c_2$$

olarak belirlenir. Burada  $c_2$  keyfi bir sabittir ve basıncın  $p_1(0,0,0) = 0$  sınır koşulu altında  $c_2 = 0$  olarak belirlenir.

Son olarak hızın boyuna bileşeninin pertürbasyon serisindeki ikinci terimi  $w_1$  in belirlenmesi için (17) denklemini ele alalım. Açık ki (17) denklemi Poisson denklemidir. Denklemin sağ tarafı, daha önce (21) ile belirlenmiş olan  $w_0$  ve (22) ile kutupsal koordinatlarda ifadesini verdiğimiz akım fonksiyonu  $\psi_1$ 'in kullanılması ile açık olarak yazılabilir. Bu halde Poisson denkleminin çözümü daha önceki incelemelerimize benzer şekilde çözülebilir. Sonuç olarak,

$$w_1 = \frac{1}{4} \bar{P}_1 (r^2 - 1) - \frac{1}{48} \frac{Re}{\mu_0} r(r^2 - 8)(b \cos\theta - a \sin\theta)$$

elde edilir. Hız alanının boyuna bileşeni olan  $w$ 'nin pertürbasyon serisindeki  $\epsilon$  mertebesindeki terimi olan  $w_1$ 'in grafiği, geçirgenlik fonksiyonunun daha önceki grafiklerde ele alınan aynı değerleri kullanılarak, Reynolds sayısı  $Re = 82$  için Şekil 5 de verilmiştir.



Şekil 5. Hızın boyuna bileşeni

$$w_1, a=1.5, b=2, Re=82$$

ele alınmış, değişik geometrik modeller ise çoklukla sayısal bazı çözümler ile çalışılmıştır. Silindirik tüp içerisinde basınca bağlı viskozitenin iki boyutlu Poiseuille akımı daha önce çalışılmamış olması açısından ilktir. Üstelik problemin çözümünün sayısal değil, analitik olarak elde edilmiş olması ise problemi daha önemli kılmaktadır. Çalışma kapsamında pertürbasyon serisinin terimlerinin hesapları  $\epsilon$  mertebesinde bırakılmıştır. daha yüksek mertebeden terimlerin hesabının, çalışmanın devamı niteliğinde ele alınması mümkündür.

Öte yandan, homojen sınır koşulları altında akımın radyal ve teğetsel doğrultularda hız alanı üretmediği çalışma içerisinde gösterilmiştir. Bu durumun kararlılık analizi ve durağan olmayan akım için dinamik geçişler yeni bir çalışma konusu olarak ele alınabilir. Benzer bir problem olarak newtonyen olmayan ikinci derece akışkanın Poiseuille akımının stabilitesi ve dinamik geçişleri üzerine [19,20] incelenebilir.

#### KAYNAKLAR

- [1] G. G. Stokes, On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium motion of solids, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 8, (1845), 287-305.
- [2] C. Barus, Isotherms, isopiestic and isometrics relative to viscosity, *American Journal of Science.*, 45,( 1893), 87-96.

Şekilden, yüzeylerdeki geçirgenlik etkisi açıkça gözlenmektedir.

#### SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Ele alınan problemin lineer olmayan alan denklemlerinin analitik çözümleri, viskozitenin basınca bağlılığını belirleyen parametrenin küçük olduğu varsayımından hareketle, pertürbatif bir yaklaşım ile elde edilmiştir. Literatürde bulunan benzer çalışmalarda, akım, genellikle tek boyutlu



- [3] S. Bair, M. Khosari, W. O. Winer, High pressure rheology of lubricants and limitations of the Reynold equation, *Tribal. Int.*, 31, (1998), 573-586. doi: 10.1016/S0301-679X(98)00078-4
- [4] A. Z. Szeri, *Fluid film lubrication: theory and design*, Cambridge University Press, 1998. doi: 10.1016/s0301-679x(99)00053-5
- [5] D. G. Schaeffer, Instability in the evaluations describing incompressible granular flow, *J. Diff. Eqns.*, 66, (1987), 19-50. doi: 10.1016/0022-0396(87)90038-6
- [6] M. Renardy, Some remarks on the Navier-Stokes equations with a pressure-dependent viscosity, *Commun. PDEs.*, 11, (1986), 779-793. doi: 10.1080/03605308608820445
- [7] F. Gazzola, A note on the evolution of Navier-Stokes equations with a pressure-dependent viscosity, *Z. Angew. Math.Phys.*, 48, (1997), 760-773. doi: 10.1007/s000330050063
- [8] J. Hron, J. Malek, K. R. Rajagopal, Simple Flows of fluids with pressure-dependent viscosities, *Proceedings of the Royal Society London A: Mathematical Physical and Engineering Science.*, 457, (2001), 1603-1622. doi: 10.1098/rspa.2000.0723
- [9] M. Vasudevaiah, K. R. Rajagopal, On fully developed flows of fluids with a pressure dependents viscosity in a pipe, *Application of Mathematics.*, 4, (2005), 341-353. doi: 10.1007/s10492-005-0027-x
- [10] J. Malek, J. Necas, K. R. Rajagopal, Global analysis of flows of fluids with pressure-dependent viscosities, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 165, (2002), 243-249. doi: 10.1007/s00205-002-0219-4
- [11] S. C. Prasad, K. R. Rajagopal, Flow of fluid with pressure dependent viscosity due to a boundry that is being stretched. *Appl. Math. Comp.*, 173, (2008), 50-68. doi: 10.1016/j.amc.2005.02.043
- [12] K. R. Rajagopal, On implicit constitutive theories for fluids, *J. Fluid Mech.*, 550, (2008), 243-249. doi: 10.1017/s0022112005008025
- [13] K. R. Rajagopal, A semi inverse problem of flows of fluids with pressure dependent viscosities, *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 16, (2008), 269-280. doi: 10.1080/17415970701529205
- [14] K. R. Rajagopal, G. Saccomandi, Unsteady exact solutions for flows of fluids with pressure-dependent viscosities, *Math. Proc. R.Irish. Acad.*, 106A(2), (2005), 115-130. doi: 10.3318/pria.2006.106.2.115
- [15] K. R. Rajagopal, G. Saccomandi, L. Vergari, On the Oberbech-Boussinesq approximation in fluids with pressure-dependent viscosities, *Nonlinear Anal. Real Word Appl.*, 10(2), (2009), 1139-1150. doi: 10.1016/j.nonrwa.2007.12.003
- [16] S. C. Subramanian, K. R. Rajagopal, A note on the flows through porous solids at high pressure, *Computers & Mathematics with Appl.*, 53, (2007), 260-275. doi: 10.1016/j.camwa.2006.02.023
- [17] S. Srinivasan, K. R. Rajagopal, A note on the flows of fluid with pressure-dependent viscosities in the annulus of two infinitely long coaxial cylinders, *App. Math. Modl.*, 34, (2010), 3255-3263. doi: 10.1016/j.apm.2010.02.017
- [18] M. Renardy, Parallel shear flows of fluids with a pressure-dependent viscosity, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 114, (2003), 279-286.
- [19] S. Özer, E. Şuhubi, Stability of Poiseuille flow of an incompressible second-grade Rivlin+Ericksen fluid, *ARI*, 51, (1999), 221-227. doi:10.1007/s007770050057.
- [20] S. Özer, T. Şengül, Stability and Transitions of the Second Grade Poiseuille Flow, *Physica D*, 331, (2016), 71-80. doi: 10.1016/j.physd.2016.05.012.