ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ İÇİN YENİ BİR YAKLAŞIM

Emine MISIRLI, Yusuf GÜREFE

Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü, İzmir

ABSTRACT

The mathematical modelling of most phenomena in science and engineering are based on differential equations. But, one can observe that this is not possible to define some problems and to find the analytical solutions through classical concepts. To solve this type of problem, multiplicative calculus and multiplicative differential equations involving multiplicative derivatives were alternatively developed. It is seen that this new calculus has brought ease of application to the some problems and it has given more effective and faster results than conventional calculus in some cases.

ÖZET

Bilim, mühendislik ve uygulamalı bilim dallarında karşılaşılan pek çok olayın matematiksel modellemesi diferansiyel denklemler ile ifade edilebilir. Ancak bazı problemlerin bilinen klasik kavramlar ile açıklanması ve analitik çözümünün bulunması kolay değildir. Bu tür problemlerin çözümü için alternatif olarak çarpımsal analiz ve çarpımsal türev içeren çarpımsal diferansiyel denklem kavramları geliştirilmiştir. Bu yeni analizin bazı problemlere uygulama kolaylığı getirdiği ve bazı durumlarda ise klasik analizden daha etkin ve daha hızlı sonuçlar verdiği de görülmüştür.

GİRİŞ

1967 ve 1970 yılları arasında Michael Grossman ve Robert Katz klasik analize alternatif olan çarpımsal analiz ya da geometrik analiz olarak ifade edilen yeni bir analiz tanımı yapmışlardır [3,4]. Bu yeni analiz türev ve integral kavramlarına bağlı olarak tanımlanmıştır.
Herhangi bir f fonksiyonun x değişkenine bağlı klasik türevinin limit gösterimi

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

şeklindedir. Bu limit yaklaşımı düzenlendiğinde çarpımsal türev tanımı elde edilir.

ÇARPIMSAL TÜREV

Herhangi bir f fonksiyonunun çarpımsal türevi f^{*} sembolü ile gösterilir. $A \subseteq R$ açık kümelerindeki tüm x değerleri için $f^{*}(x)$ fonksiyonu

$$f^{*}(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)$$

şeklinde tanımlanır[1].

Klasik türevin tüm özellikleri kullanılarak yukarıdaki formül düzenlenirse çarpımsal türevin klasik türeve bağlı tanımı elde edilir.

$$\begin{aligned} f^{*}(x) &= \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{f(x+h)-f(x)}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\frac{1}{f(x)}} \\ &= e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} \\ &= e^{(\ln\circ f)'(x)} \end{aligned}$$

Benzer şekilde $f^{*(n)}$ şeklinde gösterilen f fonksiyonunun x noktasında n. mertebeden çarpımsal türevi vardır ve

$$f^{*(n)}(x)=e^{(\ln\circ f)^{(n)}(x)}$$

olarak tanımlanır.

ÇARPIMSAL TÜREVİN BAZI ÖZELLİKLERİ

f ve g gibi çarpımsal türevlenebilen iki fonksiyon ele alalım. c, bir sabit olmak üzere $cf, fg, f+g$, $f/g, f^{g}$ fonksiyonları da çarpımsal türevlenebilir ve bu fonksiyonların çarpımsal türevleri aşağıdaki gibi elde edilebilir[1]:

1. $(cf)^{*}(t)=f^{*}(t)$,
2. $(fg)^{*}(t)=f^{*}(t)g^{*}(t)$,
3. $(f+g)^{*}(t)=f^{*}(t)^{\frac{f(t)}{f(t)+g(t)}}\, g^{*}(t)^{\frac{g(t)}{f(t)+g(t)}}$,
4. $(f/g)^{*}(t)=f^{*}(t)/g^{*}(t)$,
5. $(f^{g})^{*}(t)=f^{*}(t)^{g(x)}\, f(t)^{g'(x)}$.

ÇARPIMSAL İNTEGRAL

Eğer f, fonksiyonu $[a,b]$ aralığında pozitif ve sürekli ise (a,b) aralığında çarpımsal anlamda integrallenebilir ve

$$\int_a^b f(x)^{dx} = e^{\int_a^b \ln(f(x))dx}$$

şeklinde tanımlanır [1].

f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında çarpımsal anlamda integrallenebilir ve (a,b) aralığında pozitif ve sürekli olsunlar. O zaman $k \in R$, $a \le c \le b$ olmak üzere f^k, $f.g$, f/g çarpımsal anlamda diferansiyellenebilir ve

1. $$\int_a^b \left(f(x)^k\right)^{dx} = \left(\int_a^b (f(x))^{dx}\right)^k$$

2. $$\int_a^b \left(f(x)g(x)\right)^{dx} = \int_a^b (f(x))^{dx} \int_a^b (g(x))^{dx}$$

3. $$\int_a^b \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{dx} = \frac{\int_a^b (f(x))^{dx}}{\int_a^b (g(x))^{dx}}$$

4. $$\int_a^b f(x)^{dx} = \int_a^c f(x)^{dx} \int_c^b f(x)^{dx}$$

olduğu görülür [1].

Teorem: f, $[a,b]$ aralığında pozitif ve sürekli bir fonksiyon olsun. f'in çarpımsal antitürevlerinden biri F olsun. Böylece F, $[a,b]$ aralığında

$$F(x) = \int_a^x f(x)^{dx}, \quad a \le x \le b$$

tanımlanmış olsun. Öte yandan, eğer $G(x)$, f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında herhangi bir terstürevi ise

$$\int_a^b f(x)^{dx} = \frac{G(b)}{G(a)}$$

şeklinde tanımlanır.

ÇARPIMSAL DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bilimde ve mühendislikte karşılaşılan pek çok problemin matematiksel modellemesinde klasik türevlere bağlı diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Ancak karşılaşılan bazı bilimsel problemler klasik diferansiyel denklemler kullanılarak kolayca ifade edilemeyebilir. Bu durumda alternatif olarak tanımlanan çarpımsal diferansiyel denklemler kullanılmaya başlanmıştır.

Bir bağımsız değişkenle ilgili bir veya daha fazla bağımlı değişkenin çarpımsal türevini içeren diferansiyel denkleme *çarpımsal diferansiyel denklem* denir. Çarpımsal diferansiyel denklem, y'nin çarpımsal türevini içeren $y^*(x) = f(x, y(x))$ biçimindeki diferansiyel denklem olarak tanımlanır.

ÇARPIMSAL LAGRANGE İNTERPOLASYONU

İnterpolasyon, bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralıktaki herhangi bir değerine karşılık sonuç elde etme yada ara değer hesaplama işlemi olarak tanımlanabilir. Klasik interpolasyonlara alternatif olarak çarpımsal analiz kavramları ile yeni interpolasyonlar tanımlanmıştır.

Tanım: Çarpımsal Lagrange interpolasyon yaklaşımı $E_n(x)$ pozitif tanımlı bir f fonksiyonunun $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ biçimindeki $(n+1)$ veri noktası ile her bir $k = 0,1,\ldots,n$ değeri ve

$$L_{n,k} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

için

$$E_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \left(f(x_k)\right)^{L_{n,k}(x)}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Tanımlanan bu yaklaşıma *çarpımsal (üstel) Lagrange interpolasyonu* adı verilir.

ÇARPIMSAL ADAMS BASHFORTH-MOULTON ALGORİTMALARI

Diferansiyel analiz matematiksel modellemenin gerektirdiği pek çok problemde kullanılmaktadır. Bilimde ve mühendislikteki pek çok davranışın matematiksel modellemesi evrimsel bir tanıma dayalıdır. Bu yüzden öyle davranışları diferansiyel denklemlerle modellemek gerekir. Bu problemlerin bazıları, matematiksel formülasyon için klasik analiz kavramları kullanıldığında daha zor yaklaşımlar içerebilir. Bu durumda alternatif kavramlara ihtiyaç duyulabilmektedir. Böylece çarpımsal analiz kavramları ile tanımlanan çarpımsal diferansiyel denklemlerin kullanımı da önem kazanmaktadır. Son zamanlarda yapılan bazı çalışmalar çarpımsal diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için geliştirilen çarpımsal sonlu fark metotları ve çarpımsal Runge-Kutta metotları ile çarpımsal analizin daha etkili sonuçlar verdiğini göstermektedir [2,5,8].

Bu çalışmada çarpımsal başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümü için geliştirilen çok adımlı algoritmalar olarak ta adlandırılan çarpımsal Adams Bashforth-Moulton metotları tanımlanmıştır [6,7].

$$y^{*}(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0$$

çarpımsal başlangıç değer problemi olarak adlandırılır.

Denklemin her iki tarafı f_i ye bağlı $E_n(x)$ için $f(x,y) \approx E_n(x)$ iken $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y^{*}(x)^{dx} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)^{dx}$$

çarpımsal anlamda integre edilir ise

$$y_{i+1} = y_i \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} E_n(x)^{dx} \right)^{h}$$

genel formülü elde edilir.

Her bir $n=0,1,2,3$ için, integral formülüne ve $f_i=f(x_i,y_i)$, $f_{i-1}=f(x_{i-1},y_{i-1})$, $f_{i-2}=f(x_{i-2},y_{i-2})$, $f_{i-3}=f(x_{i-3},y_{i-3})$ noktalarına dayalı çarpımsal Adams Bashforth algoritmaları sırası ile

$$y_{i+1}^{p}=y_i\left(f_i\right)^{h}$$

$$y_{i+1}^{p}=y_i\left(f_i^{3}f_{i-1}^{-1}\right)^{\frac{h}{2}}$$

$$y_{i+1}^{p}=y_i\left(f_i^{23}f_{i-1}^{-16}f_{i-2}^{5}\right)^{\frac{h}{12}}$$

$$y_{i+1}^{p}=y_i\left(f_i^{55}f_{i-1}^{-59}f_{i-2}^{37}f_{i-3}^{-9}\right)^{\frac{h}{24}}$$

olarak bulunabilir. Denklemin her iki tarafı f_{i+1} ye bağlı $E_n(x)$ için $f(x,y)\approx E_n(x)$ iken $[x_i,x_{i+1}]$ aralığında çarpımsal anlamda integre edildiğinde genel formül

$$y_{i+1}=y_i\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(E_n(x)\right)^{dx}\right)^{h}$$

olarak yazılabilir. Her bir $n=0,1,2,3$ için, integral formülüne ve $f_{i-2}=f(x_{i-2},y_{i-2})$, $f_{i-1}=f(x_{i-1},y_{i-1})$, $f_i=f(x_i,y_i)$ ve $f_{i+1}=f(x_{i+1},y_{i+1}^{p})$ noktalarına dayalı çarpımsal Adams Moulton algoritmaları sırası ile

$$y^{c}{}_{i+1}=y_i\left(f_{i+1}\right)^{h}$$

$$y_{i+1}^{c}=y_i\left(f_i^{3}f_{i-1}^{-1}\right)^{\frac{h}{2}}$$

$$y_{i+1}^{c}=y_i\left(f_i^{23}f_{i-1}^{-16}f_{i-2}^{5}\right)^{\frac{h}{12}}$$

$$y_{i+1}^{c}=y_i\left(f_i^{55}f_{i-1}^{-59}f_{i-2}^{37}f_{i-3}^{-9}\right)^{\frac{h}{24}}$$

formülleri ile hesaplanabilir.

Bu formüller birinci mertebeden çarpımsal diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için geliştirilen dördüncü mertebeye kadar çarpımsal Adams Bashforth-Moulton algoritmalarını vermektedir.

UYGULAMA

$y(0.1)=2.402585093$ başlangıç koşulu için [2] de çarpımsal Runge-Kutta yöntemi ile çözülen

$$y^{*}(x)=\exp\left(\frac{x-1}{xy}\right)$$

şeklindeki çarpımsal diferansiyel denklem çarpımsal Adams Bashforth-Moulton yöntemleri ile çözülmüştür. Bu denklemin analitik çözümlerinden birisi $y(x)=x-\ln(x)$ fonksiyonudur. Bağıl hata değerleri aşağıdaki formül ile hesaplanır:

$$Bağ.Hata=\left|\frac{y_{tam}(x_i)-y_{yak.}(x_i)}{y_{tam}(x_i)}\right|.$$

Tablo 1 h=0.1 için MAB-M metotlarının nümerik sonuçları

x	$y(x)$	Metot	Sonuç	Bağıl hata (%)
426.0	419.9455606537	MAB-2	419.8627174937	0.0197271
		MAB-3	419.8008829906	0.0344515
		MAB-4	419.8239686466	0.0289542
		MAM-2	420.1948651	0.0593658
		MAM-3	419.7499747	0.0465741
		MAM-4	419.8375502	0.0257201
2153.2	2145.5252896133	MAB-2	2145.4424305860	0.003861
		MAB-3	2145.3806119562	0.006743
		MAB-4	2145.4036976062	0.005667
		MAM-2	2146.19323	0.031131
		MAM-3	2145.280161	0.011425
		MAM-4	2145.428735	0.004500
10883.2	10873.9050244051	MAB-2	10873.8221622635	0.0007620
		MAB-3	10873.7603467482	0.0013305
		MAB-4	10873.7834323984	0.0011182
		MAM-2	10875.51242	0.0147821
		MAM-3	10873.56281	0.0031471
		MAM-4	10873.82945	0.0006950

Tablo 2 h=0.01 için MAB-M metotlarının nümerik sonuçları

x	$y(x)$	Metot	Sonuç	Bağıl hata (%)
431.59	425.5225239364	MAB-2	425.5214298	0.000257138
		MAB-3	425.5195694	0.000694333
		MAB-4	425.519788	0.000642953
		MAM-2	425.5262424	0.000873867
		MAM-3	425.5193203	0.00075287
		MAM-4	425.5198139	0.000636873
2185.02	2177.3306197391	MAB-2	2177.329525	5.02576e-05
		MAB-3	2177.327666	0.000135679
		MAB-4	2177.327884	0.000125667
		MAM-2	2177.340408	0.000449552
		MAM-3	2177.327173	0.000158292
		MAM-4	2177.327932	0.000123421
10844.18	10834.8886161904	MAB-2	10834.88753	1.00645e-05
		MAB-3	10834.88567	2.72313e-05
		MAB-4	10834.88597	2.44625e-05
		MAM-2	10834.91179	0.000213892
		MAM-3	10834.8847	3.61233e-05
		MAM-4	10834.88587	2.53037e-05

SONUÇ

Bu çalışmada çarpımsal diferansiyel denklemleri nümerik olarak çözmek için çarpımsal Adams Bashforth-Moulton metotları geliştirilmiş ve bir problem çözülmüştür. Tablo 1 ve Tablo 2'de verilen bağıl hata değerlerine bakılarak geliştirilen metodun problemin tam çözümüne daha yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Sonuç olarak, bilim ve mühendislikte yer alan problemlerin geliştirilen bu yöntemler ile çözülebileceği söylenebilir.

REFERANSLAR

[1] A.E. Bashirov, E.M. Kurpinar, A. Ozyapici. Multiplicative calculus and its applications. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 337(1):36-48, 2008.

[2] Dorota Aniszewska. Multiplicative runge-kutta methods. Nonlinear Dynamics, 50(1-2): 265-272, October 2007.

[3] M. Grossmann. Bigeometric Calculus, A System with a Scale-free Derivative. Archimedes Foundation, Rockport, 1983.

[4] M. Grossman and R.Katz. Non-Newtonian Calculus. Lee Press, Pigeon Cove, Massachusats, 1972.

[5] M. Riza, A. Ozyapici, E. Misirli. Multiplicative Finite Difference Methods. Quarterly of Applied Mathematics, 67 (4) 745-754, 2009.

[6] E. Suli, D.F. Mayers. An Introduction to Numerical Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2003.

[7] J.C. Butcher. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Wiley, Chichester, England, 2003.

[8] E. Misirli, A. Ozyapici. Exponential approximations on multiplicative calculus, Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 12(2) 227-236, 2009.