

## Boşluklu Ankastre Sığ Küresel Kabukların Geometrik Doğrusal Olmayan Analizi

Murat Altekin<sup>a</sup>, R. Faruk Yükseler<sup>b</sup>

İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Yıldız Teknik Üniversitesi, 34210 Esenler, İstanbul, Türkiye  
<sup>a</sup> [altekin@yildiz.edu.tr](mailto:altekin@yildiz.edu.tr), <sup>b</sup> [yukseler@yildiz.edu.tr](mailto:yukseler@yildiz.edu.tr)

### Abstract

Geometrically nonlinear analysis of annular shallow spherical shells subjected to an axisymmetrical uniform load has been investigated by numerical methods. In the study, the shell of uniform thickness has been considered to be fully clamped along both the outer and the inner edges. First, the set of ordinary differential equations has been transformed to algebraical equations. Next, the algebraical equations have been solved by the Newton-Raphson method. The influence of the parameters of perforation and depth on the deflection and the stress resultants has been examined. The results obtained in this study have been compared with the solutions of annular plates based on the Kirchhoff-Love plate theory, and good agreement has been obtained.

### Özet

Dönel simetrik üniform yük etkisindeki boşluklu sığ küresel kabukların geometrik doğrusal olmayan analizi sayısal yöntemlerle incelenmiştir. Çalışmada üniform kalınlıklı kabuğun hem dış hem de iç kenarı boyunca ankastre mesnetli olduğu durum göz önüne alınmıştır. İlk olarak, sıradan diferansiyel denklem takımı sonlu farklar yöntemiyle cebirsel denklemlere dönüştürülmüştür. Ardından; cebirsel denklemler, Newton-Raphson yöntemiyle çözülmüştür. Boşluk ve basıklık parametrelerinin çökme değerleri ve kesit tesirleri üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Bu çalışmada elde edilen bulgular, Kirchhoff-Love plak teorisinin baz alındığı boşluklu dairesel plakların incelendiği çalışmalarla karşılaştırılmış ve uyumlu sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

### 1. Giriş

Geometrik özellikleri nedeniyle çözümü göreceli olarak kapsamlı ve karmaşık olan kabuklar, uygulama alanı itibariyle sadece inşaat mühendisliğiyle sınırlı kalmamakta, gemi inşaatı, havacılık ve uzay teknolojileri ile biyomekanik gibi farklı disiplinlerin de kapsama alanına girmektedir [1-3]. Sığ küresel kabukların analizi güncelliğini koruyan bir konudur. Bilgisayar bilimindeki gelişime paralel olarak sayısal çözümlerin yaygınlaşmasıyla araştırmacıların özellikle doğrusal olmayan analiz üzerine odaklandığı görülmektedir.

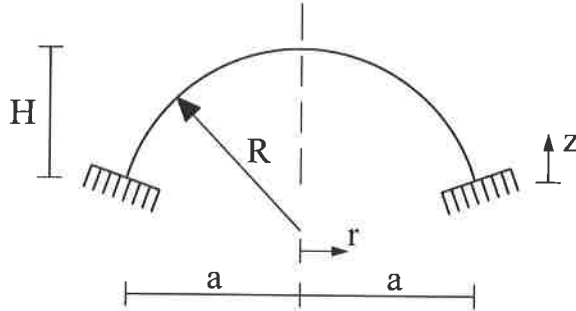
Bu çalışmada, dönele simetrik üniform dış yük altında sonlu yer değiştirme yapan, ankastre mesnete oturan sığ küresel kabukların doğrusal olmayan statik analizi yapılmıştır. Kabuk malzemesi izotrop kabul edilmiştir. Kabuğun tepesinde dönele simetrik bir dairesel boşluğun olduğu durum incelenmiştir. Hem kabuk geometrisinin hem de yüklemenin dönele simetrik olması nedeniyle çözülmesi gereken denklem takımı sıradan diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır. Denklem takımının çözümünde sayısal yöntemlere başvurulmuş ve sırasıyla sonlu farklar ile Newton-Raphson yöntemleri kullanılmıştır. Radyal doğrultuda çökme ve kesit tesirlerine ait grafikler çizilmiştir.

## 2. Formülasyon

Bir sığ küresel kabuğun basıklık derecesi

$$\eta = \frac{H}{2a} \quad (1)$$

ile tanımlanan bir parametre olup, bu çalışmada  $\eta$  ile belirtilmektedir.  $H$  kabuğun tepe noktasında orta yüzeyin yüksekliğini,  $a$  ise kabuk taban yarıçapını göstermektedir (Şekil 1). Bu çalışmada kullanılan kabuk modeline göre bir küresel kabuğun sığ olarak kabul edilebilmesi için  $\eta \leq \frac{1}{8}$  koşulunun sağlanması gerekmektedir [2].



Şekil 1. Kabuk geometrisi

Sığ küresel kabuğun orta yüzeyi

$$z = H \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (2)$$

ile tanımlanabilir [2]. Burada;  $z$  orta yüzeyin düşey koordinatıdır. Radyal koordinata karşı gelen  $r$  nin tanım aralığı  $0 \leq r \leq a$  şeklindedir. Kabuğun yarıçapı  $R$  ile belirtilir ve aşağıdaki yaklaşık bağıntıyla ifade edilebilir [2]:

$$R = \frac{a^2}{2H}. \quad (3)$$

Kabuk dış ve iç kenarı boyunca ankastre mesnetli olduğundan, mesnet boyunca yer değiştirmeler ve meridyen teğetinin dönmesi sıfıra eşittir:

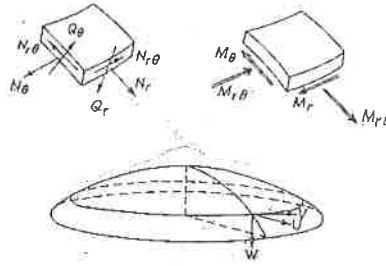
$$w = u = \beta = 0. \quad (4)$$

Burada;  $w, u, \beta$  sırasıyla çökme, radyal yerdeğiştirme ve meridyen teğetinin dönmesini ifade etmektedir.  $w$  ile  $\beta$  arasındaki ilişki

$$\frac{dw}{dr} - \beta = 0 \quad (5)$$

şeklindedir.

Kabuğun karşılaştırma yüzeyi olarak kabuğun orta yüzeyi alınmıştır. Şekil değiştirmemiş kabuğun karşılaştırma yüzeyinin birim boyutlarına etkiyen kesit tesirleri  $N_r, N_\theta, N_{r\theta}$  (mambran kuvvetler),  $Q_r, Q_\theta$  (enine kesme kuvvetleri),  $M_r, M_\theta, M_{r\theta}$  (sırasıyla meridyenel, paralel çemberel, burulma momentleri) şeklindedir (Şekil 2).



Şekil 2. Kesit tesirleri ve yer değiştirme bileşenleri [2]

Dönel simetrik yüklenme durumunda kullanılacak denklemler [2], bu çalışmada kabuk için boyutsuz olarak tanımlanan dış yük ( $q^*$ ), yer değiştirme bileşenleri ( $w^*, u^*, \beta^*$ ) ve geometrik parametreler ( $\xi, H^*$ ) cinsinden yazılırsa

$$L_1 = \frac{dw^*}{d\xi} - \frac{2\eta}{H^*} \beta^* = 0 \quad (6)$$

$$L_2 = \frac{2\eta}{H^*} \frac{du^*}{d\xi} + 4\eta\xi(2-\nu)\beta^* + \frac{2\eta^2}{(H^*)^2}(1-\nu)(\beta^*)^2 + \xi \frac{2\eta}{H^*} \frac{d^2u^*}{d\xi^2} \quad (7)$$

$$+ 2H^*\xi^2 \frac{d^2w^*}{d\xi^2} + \frac{2\eta\xi}{H^*} \beta^* \frac{d^2w^*}{d\xi^2} - \frac{2\eta}{\xi H^*} u^* = 0$$

$$L_3 = -\frac{\eta}{3H^*} \frac{d^2\beta^*}{d\xi^2} - \frac{\xi}{12} \frac{d^4w^*}{d\xi^4} + \frac{8\eta\xi^2}{H^*} \left[ (1+\nu)(H^*)^2 - \frac{1}{48\xi^4} \right] \beta^* + \frac{1}{12\xi} \frac{d^2w^*}{d\xi^2} \quad (8)$$

$$+ \frac{2\eta\xi}{H^*} \frac{du^*}{d\xi} \frac{d^2w^*}{d\xi^2} + 4\eta\xi(1+\nu) \frac{du^*}{d\xi} + 4\eta\xi^2 \beta^* \frac{d^2w^*}{d\xi^2} + \frac{2\xi\eta^2}{(H^*)^2} \frac{d^2w^*}{d\xi^2} (\beta^*)^2$$

$$+ \frac{4\xi\eta^2}{H^*} (1+3\nu)(\beta^*)^2 + \frac{2\eta\nu}{H^*} u^* \frac{d^2w^*}{d\xi^2} + 4\eta(1+\nu)u^* + \frac{4\eta^2}{\xi(H^*)^2} u^* \beta^*$$

$$+ \frac{4\eta^2\nu}{(H^*)^2} \beta^* \frac{du^*}{d\xi} + \frac{4\eta^3\nu}{(H^*)^3} (\beta^*)^3 + \frac{\xi\sqrt{3}}{8(H^*)^2} q^* = 0$$

elde edilir. Burada  $L_1, L_2, L_3$  sıradan diferansiyel operatörlerdir ve

$$\xi = \frac{r}{a}, \quad H^* = \frac{H}{t}, \quad q^* = \frac{1}{k} \frac{(1-\nu^2) a^4}{E} \frac{a^4}{t^4} q, \quad (9)$$

$$w^* = \frac{w}{t}, \quad u^* = \frac{1}{c} \frac{a}{t^2} u, \quad \beta^* = \frac{1}{c} \frac{a}{t} \beta, \quad c = \frac{H^*}{2\eta}, \quad k = \frac{8(H^*)^2}{\sqrt{3}} \quad (10)$$

olarak tanımlanan boyutsuz büyüklükler cinsinden ifade edilmişlerdir. Poisson oranı, kabuk kalınlığı ve elastisite modülü sırasıyla  $\nu, t$  ve  $E$  ile gösterilmektedir.

Basıklık ve boşluk parametrelerinin kesit tesirleri üzerindeki etkisini incelemek için kesit tesirleri aşağıdaki bağıntılarda gösterildiği gibi boyutsuzlaştırılmıştır:

$$N_r^* = \frac{N_r}{Et}, \quad N_\theta^* = \frac{N_\theta}{Et}, \quad M_r^* = -\frac{M_r}{Et^2}, \quad M_\theta^* = -\frac{M_\theta}{Et^2}. \quad (11)$$

### 3. Çözüm yöntemi

Radyal doğrultuda ( $\alpha \leq \xi \leq 1$  aralığında) eşit aralıklı olarak belirlenmiş ( $101-100\alpha$ ) adet nokta kullanılarak Denklem (6-8) ile gösterilen sıradan diferansiyel denklem takımı sonlu farklar yöntemiyle cebirsel denklem takımına dönüştürülmüştür [4].  $O(h^2)$  mertebesinde ileri, merkezi ve geri fark formüllerinin kullanıldığı bu aşamada birinci nokta dış kenar ( $\xi=1$ ), son nokta da kabuğun iç kenarı ( $\xi=\alpha$ ) olarak belirlenmiştir (Şekil 3). Boşluk yarıçapı için gösterim  $r_b$  ile yapılmış ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$r_b = \alpha a, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (12)$$

Dairesel boşluğun merkezi, döneel simetrik kabuğun dönme eksenini üzerindedir ve boşluk düzlemi  $z$ -eksenine diktir.

Sınır koşullarının tam olarak sağlanabilmesi için  $\xi=1$  ve  $\xi=\alpha$  noktalarında Denklem (4) sağlatılmıştır. Son safhada, Newton-Raphson yöntemiyle doğrusal olmayan yapıdaki cebirsel denklemler çözülmüş ve her noktadaki yer değiştirme bileşenleri bulunmuştur [5]. Yer değiştirmelerin elde edilmesini takiben, kesit tesirleri hesaplanmıştır.

### 4. Sayısal örnekler

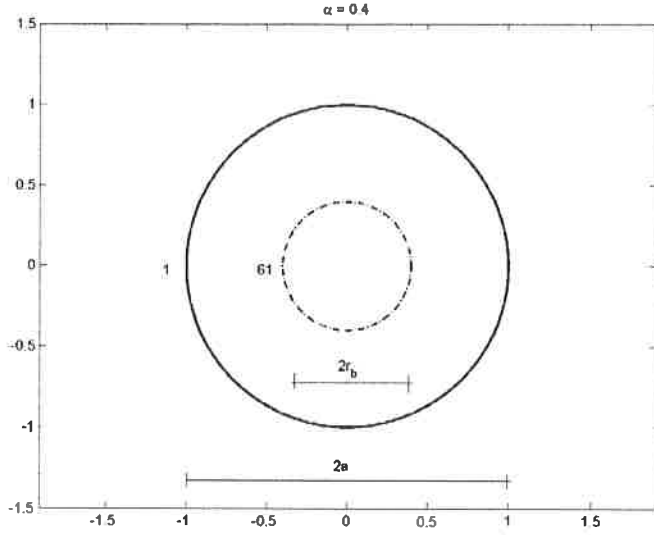
Basıklık parametresi ( $\eta$ ) ve boşluk parametresi ( $\alpha$ ) için çeşitli sayısal değerler alınarak çökmelerin ve kesit tesirlerinin değişimi incelenmiştir. Algoritmanın doğruluğunu test etmek amacıyla, bu çalışmada elde edilen değerler ( $H=0$ ,  $c=1$ ,  $k=1$  değerleri için) –klasik plak teorisi baz alınarak- boşluklu dairesel plakların statik analizine ilişkin sonuçlarla karşılaştırılmış [6] ve oldukça yakın değerler bulunduğu gösterilmiştir (Şekil 4-5).

Çalışmada kullanılan sayısal değerler aşağıda sunulmuştur:

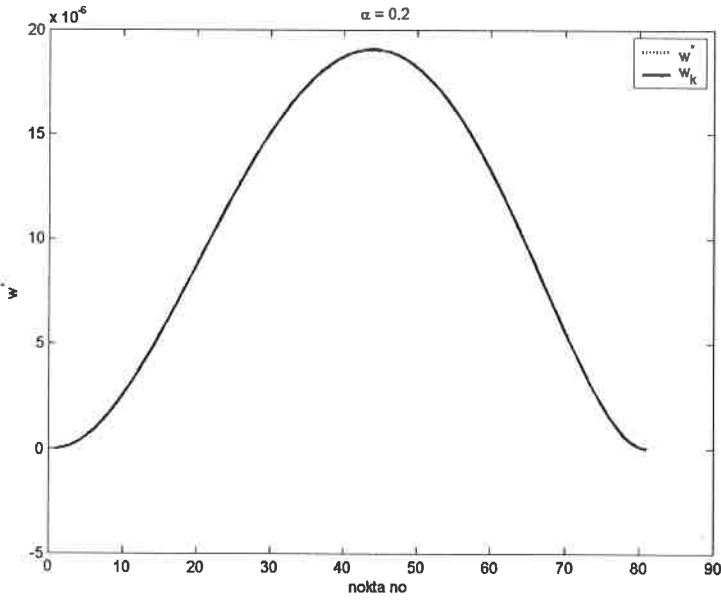
$$\nu = 0.3 \quad E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \quad t = 0.05 \text{ m} \quad q = 2000 \text{ N/m}^2 \quad a = 1 \text{ m}.$$

Kabuk için yapılan sayısal çözümlerde aşağıdaki parametreler kullanılmıştır (Şekil 6-15):

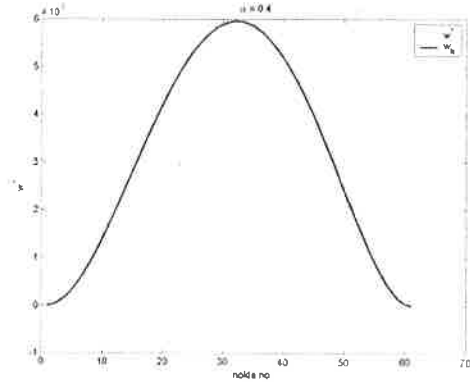
$$\eta = \{0.03, 0.07, 0.11\} \quad \alpha = \{0.2, 0.4\}.$$



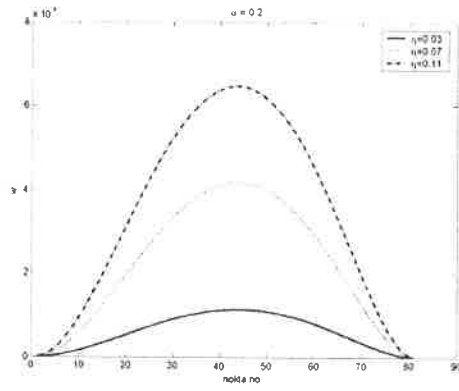
Şekil 3. Sonlu farklar yönteminde noktaların dağılımı (üstten görünüş)



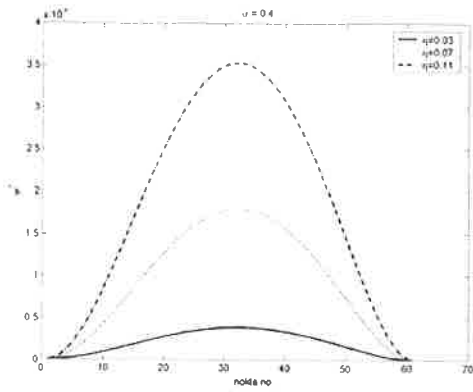
Şekil 4. Plak çözümü ( $\alpha = 0.2$ )



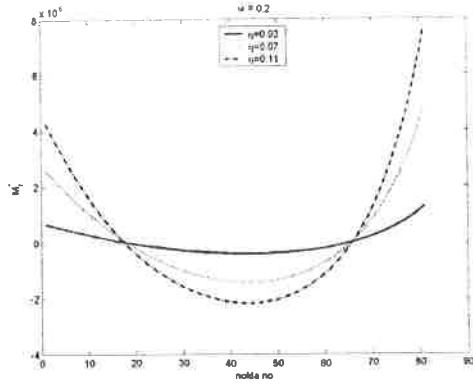
Şekil 5. Plak çözümü ( $\alpha = 0.4$ )



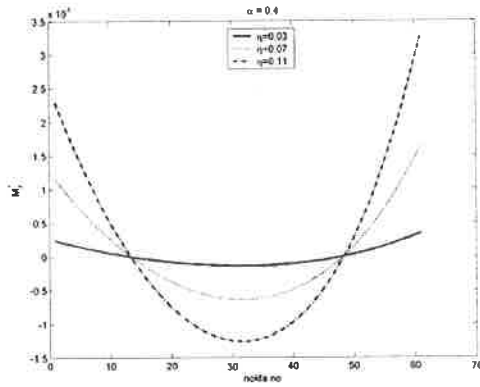
Şekil 6. Kabuk için  $w^*$  ( $\alpha = 0.2$ )



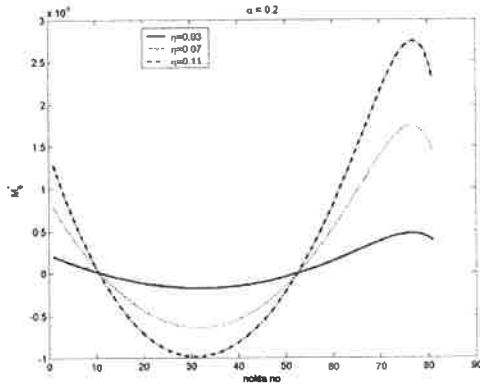
Şekil 7. Kabuk için  $w^*$  ( $\alpha = 0.4$ )



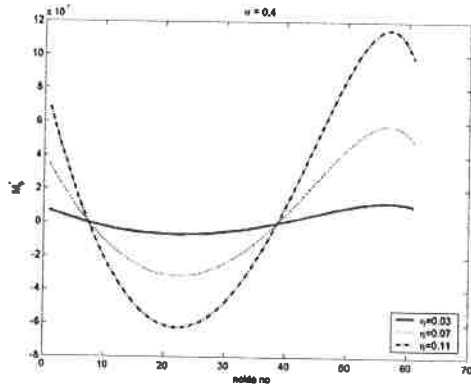
Şekil 8. Kabuk için  $M_r^*$  ( $\alpha = 0.2$ )



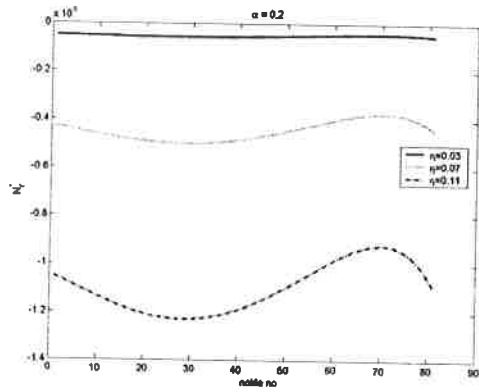
Şekil 9. Kabuk için  $M_r^*$  ( $\alpha = 0.4$ )



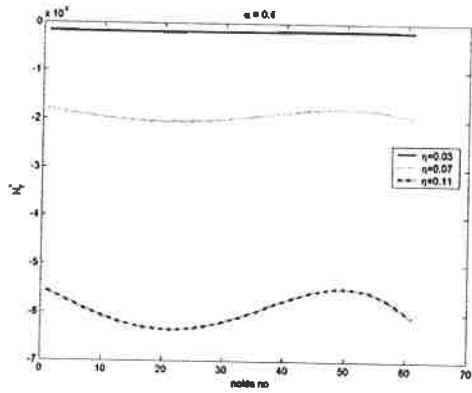
Şekil 10. Kabuk için  $M_\theta^*$  ( $\alpha = 0.2$ )



Şekil 11. Kabuk için  $M_{\theta}^*$  ( $\alpha = 0.4$ )

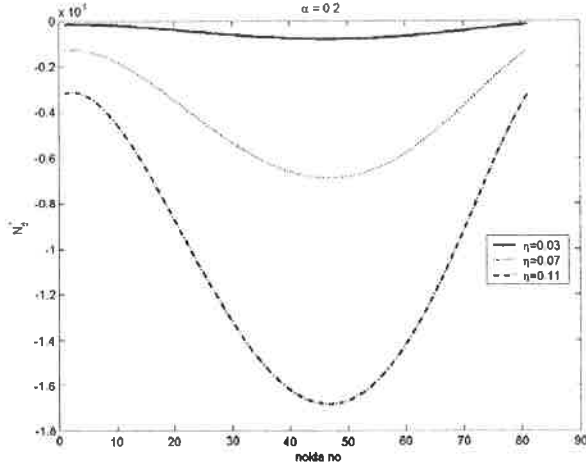


Şekil 12. Kabuk için  $N_r^*$  ( $\alpha = 0.2$ )

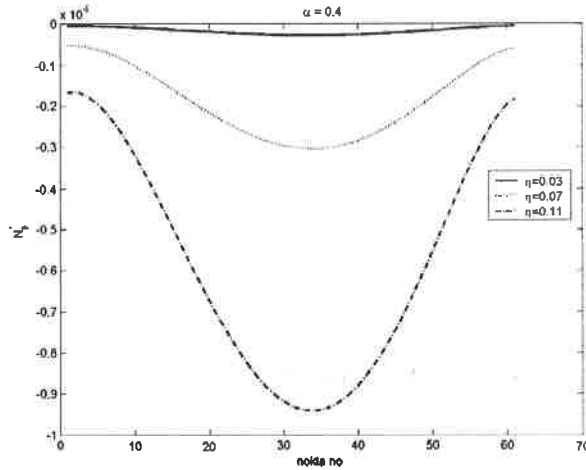


Şekil 13. Kabuk için  $N_r^*$  ( $\alpha = 0.4$ )





Şekil 14. Kabuk için  $N_{\theta}^*$  ( $\alpha = 0.2$ )



Şekil 15. Kabuk için  $N_{\theta}^*$  ( $\alpha = 0.4$ )

## 5. Sonuçlar

Çalışmada, radyal doğrultuda  $0.01a$  adım uzunluğunda sonlu fark denklemleri kullanılarak elde edilen cebirsel denklemler Newton-Raphson yöntemiyle çözümlenerek yer değiştirmeler bulunmuştur. Kesit tesiri-yer değiştirme bağıntıları kullanılarak, kesit tesiri grafikleri çizilmiştir. Bu çalışmada çözümlenen sayısal örnekler kapsamında basınlık ve boşluk parametrelerinin çökme değerleri ve iç kuvvetler üzerindeki etkisi incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlara varılmıştır:

- Kabuk derinleştikçe ( $\eta$  arttıkça), çökme değerleri artmaktadır (Şekil 6-7).
- Kabuk derinleştikçe ( $\eta$  arttıkça), mesnetlerdeki (hem iç hem de dış kenardaki)  $M_r$  ve  $M_o$  eğilme momentleri şiddetçe artmaktadır (Şekil 8-11).
- Kabuk derinleştikçe ( $\eta$  arttıkça),  $N_r$  ve  $N_o$  membran kuvvetleri şiddetçe artmaktadır (Şekil 12-15).
- Boşluk genişledikçe ( $\alpha$  arttıkça), çökme değerleri azalmaktadır (Şekil 6-7).
- Boşluk genişledikçe ( $\alpha$  arttıkça), mesnetlerdeki (hem iç hem de dış kenardaki)  $M_r$  ve  $M_o$  eğilme momentleri şiddetçe azalmaktadır (Şekil 8-11).
- Boşluk genişledikçe ( $\alpha$  arttıkça),  $N_r$  ve  $N_o$  membran kuvvetleri şiddetçe azalmaktadır (Şekil 12-15).

#### Kaynaklar

- [1] Yükseler, R.F., "The Parameters Affecting the Differences Between the Solutions Corresponding to Two Different Definitions of the Reference Surface of Deformed Rubber-Like Shells of Revolution", International Journal of Nonlinear Mechanics, 38(4): 597-602, 2003.
- [2] Huang, N., "Unsymmetrical Buckling of Thin Shallow Spherical Shells", Journal of Applied Mechanics, 31: 447-457, 1964.
- [3] Yamada, S., Yamada, M., "Buckling and Postbuckling Behavior of Half-Loaded Shallow Spherical Shells", International Journal of Non-Linear Mechanics, 20 (4): 239-248, 1985.
- [4] Mathews, J.H., "Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering", Prentice-Hall International Inc., 1992.
- [5] Maron, M.J., Lopez, R.J., "Numerical Analysis: A Practical Approach", Wadsworth Publishing Company, 1991.
- [6] Berktaş, İ., "Plak Teorisi ve Uygulamaları", Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, Sayı 237, 1992.