

İLKEL KUSURLU DAİRESEL PLAKLARIN GEOMETRİK DOĞRUSAL OLMAYAN ANALİZİ

Murat Altekin^a, R. Faruk Yükseler^b

İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Yıldız Teknik Üniversitesi, 34349 Beşiktaş, İstanbul, Türkiye
^a altekin@yildiz.edu.tr, ^b yukseler@yildiz.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada doğrusal değişen dönel simetrik yük etkisindeki ilkel kusurlu dairesel plakların geometrik doğrusal olmayan analizi sayısal yöntemlerle incelenmiştir. Sabit kalınlıklı dairesel plağın modellenmesinde sığ küresel kabuk denklemleri kullanılmıştır. Doğrusal olmayan formdaki sıradan diferansiyel denklemler sonlu farklar yöntemiyle cebirsel denklemlere dönüştürülmüş, doğrusal olmayan yapıdaki cebirsel denklemler de Newton-Raphson yöntemiyle çözülmüştür. Plak kenarı boyunca ankastre (A) ve sabit (S) mesnetlenme durumları incelenmiştir. Yer değiştirme ve kesit tesirlerinin plak üzerindeki dağılımında, ilkel kusur parametresinin ve Poisson oranının etkisi incelenmiştir. Bu çalışmada elde edilen bulgular, Kirchhoff-Love plak teorisinin (KLPT) baz alındığı kusursuz dairesel plakların incelendiği çalışmalarla karşılaştırılmış ve uyumlu sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

ABSTRACT

Geometrically nonlinear analysis of initially imperfect circular plates subjected to a linearly varying axisymmetrical load was investigated in this study by numerical methods. Shallow spherical shell equations were used in the modelling of the circular plate of uniform thickness.

By the finite difference method, nonlinear ordinary differential equations were transformed to nonlinear algebraical equations which were solved by the Newton-Raphson method. Two cases were considered: clamped (A), and simply supported (S) along the plate perimeter. The influence of the parameter of initial imperfection and the Poisson's ratio on displacements and stress resultants was examined. The results obtained in this study were compared with those based on the Kirchhoff-Love plate theory (KLPT), and good agreement was obtained.

1. GİRİŞ

Bilgisayar teknolojisindeki gelişime paralel olarak, uygulamalı mekanik alanında, yüzeysel taşıyıcı sistemlerin [1-6] doğrusal olmayan analizini kapsayan sayısal çözüme dayalı çalışmalar son yıllarda büyük artış göstermiştir [7-9]. İnşaat ve makine mühendisliğinden,

havacılık ve uzay endüstrisine kadar çok yaygın kullanım alanı olan plaklar üzerine yapılmış çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Mekanik etkilerin ağırlıklı olarak incelendiği bu çalışmalarda çeşitli plak modelleri (Kirchhoff-Love, Reddy, Mindlin, vb.) kullanılmaktadır. Düzgün yayılı yükün çoğunlukla kullanıldığı ve doğrusal olmayan analizin sayıca azınlıkta kaldığı zengin literatürde, ilkel kusurun etkisinin incelendiği çalışmalar sayıca çok daha azdır.

Bu çalışmada kenarı boyunca ankastre veya sabit mesnetli ve kalınlığı sabit dairesel plakların geometrik doğrusal olmayan analizi, sayısal yöntemlere (sonlu farklar ve Newton-Raphson yöntemleri) başvurulmuş ve sonuçlar klasik plak teorisine göre bulunanlarla karşılaştırılmıştır. İkel kusurun ve Poisson oranının farklı değerleri için nonlineeritenin sonuçlar üzerindeki etkisi tartışılmıştır. Aynı dış yük değeri göz önüne alınarak Poisson oranının ve ilkel kusur parametresinin farklı değerleri için yer değiştirmeler bulunmuş ve kesit tesirleri hesaplanmıştır. Yer değiştirmelerin ve kesit tesirlerinin plak üzerindeki dağılımı gösterilmiştir.

2. FORMÜLASYON

Silindirik koordinatlarda ilkel kusurlu dairesel plağın orta düzlemi aşağıda tanımlanan z düşey koordinatıyla tariflenebilir [10]:

$$z = -\eta_y t \left[1 - 4 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^2. \quad (1)$$

Burada; a plağın yarıçapı, r radyal koordinat, t plak kalınlığı, η_y de ilkel kusur parametresidir. Bu çalışmada $-0.2 \leq \eta_y \leq 0.2$ şeklinde varsayılmıştır.

Plak kenarı boyunca sınır koşulları aşağıdaki gibidir:

$$w = 0, \quad u = 0, \quad \beta = 0 \quad (\text{ankastre mesnet için}), \quad (2)$$

$$w = 0, \quad u = 0, \quad M_r = 0 \quad (\text{sabit mesnet için}). \quad (3)$$

Burada; w, u, β, M_r sırasıyla çökme, radyal yerdeğiştirme, meridyen teğetinin dönmesi ve radyal doğrultudaki eğilme momentini ifade etmektedir. w ile β arasındaki ilişki

$$w' - \beta = 0 \quad (4)$$

şeklindedir ve anlatım kolaylığı amacıyla $()' = \frac{\partial}{\partial r} ()$ ifadesi kullanılmıştır.

Dönel simetrik yükleme nedeniyle, plağın merkezinden geçen simetri eksenindeki sınır koşulları

$$u = 0, \quad \beta = 0, \quad Q_r = 0 \quad (5)$$

olup, Q_r enine kesme kuvvetine karşı gelmektedir.

L_1, L_2, L_3 ile tanımlanan sıradan diferansiyel operatörlerle ifade edilen doğrusal olmayan yapıdaki ilkel kusurlu plağa ait denklem takımı

$$L_1 = \frac{\partial w^*}{\partial \xi} - \beta^* = 0, \quad (6)$$

$$L_2 = \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + 2\xi \left[6\eta_y (-2 + \nu + 3(4 - \nu)\xi^2 + 2(-6 + \nu)\xi^4) \right] \beta^* + \frac{(1 - \nu)}{2} (\beta^*)^2 + \xi \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} + 2\xi^2 \left[6\eta_y (-1 + 3\xi^2 - 2\xi^4) \right] \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} + \xi \beta^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} u^* = 0 \quad (7)$$

$$L_3 = -\frac{1}{6} \frac{\partial^2 \beta^*}{\partial \xi^2} - \frac{\xi}{12} \frac{\partial^4 w^*}{\partial \xi^4} + \xi^2 \left[\frac{144(\eta_y)^2 \left(1 + \nu - 6(2 + \nu)\xi^2 + 13(3 + \nu)\xi^4 \right)}{-12(4 + \nu)\xi^6 + 4(5 + \nu)\xi^8} \right] \beta^* + \frac{1}{12\xi} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} + 2\xi \left[6\eta_y (-1 - \nu + 3(3 + \nu)\xi^2 - 2(5 + \nu)\xi^4) \right] \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + 2\xi^2 \left[6\eta_y (-1 + 3\xi^2 - 2\xi^4) \right] \beta^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} (\beta^*)^2 + \xi \left[6\eta_y (-1 - 3\nu + (9 + 9\nu)\xi^2 - (10 + 6\nu)\xi^4) \right] (\beta^*)^2 + \nu u^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} + 2 \left[6\eta_y (-1 - \nu + (3 + 9\nu)\xi^2 - (2 + 10\nu)\xi^4) \right] u^* + \frac{1}{\xi} u^* \beta^* + \nu \beta^* \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{\nu}{2} (\beta^*)^3 + \xi^2 q^* = 0 \quad (8)$$

şeklindedir [11]. Burada (*) ile belirtilen büyüklükler, boyutsuz parametreler olup; boyutlu karşılıkları aşağıda tanımlandığı gibidir:

$$\xi = \frac{r}{a}, \quad q^* = \frac{(1 - \nu^2) a^4}{E t^4} q, \quad w^* = \frac{w}{t}, \quad u^* = \frac{a}{t^2} u, \quad \beta^* = \frac{a}{t} \beta. \quad (9)$$

Burada; ν Poisson oranını, E elastisite modülünü, q ise düşey olarak etkiyen dönel simetrik ve doğrusal olarak değişen yayılı yükü göstermektedir (Şekil 1). Analizde kullanılacak ve yorumlanacak kesit tesirleri

$$M_r = -\frac{Et^4}{12a^2(1 - \nu^2)} M_r^*, \quad M_\theta = -\frac{Et^4}{12a^2(1 - \nu^2)} M_\theta^*, \quad Q_r = \frac{Et^4}{12(1 - \nu^2)a^3} Q_r^* \quad (10)$$

şeklinde olup (*) ile belirtilen boyutsuz kesit tesirlerine ait ifadeler

$$M_r^* = \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\xi} \beta^* \right], \quad M_\theta^* = \left[\frac{1}{\xi} \beta^* + \nu \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} \right], \quad Q_r^* = \left[-\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^3 w^*}{\partial \xi^3} + \frac{c}{\xi^2} \beta^* \right] \quad (11)$$

olarak tanımlanmaktadır.

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

L_1, L_2, L_3 ile belirtilen sıradan diferansiyel operatörlerde, ξ içeren türevler $O(h^2)$ mertebesindeki sonlu farklar yöntemiyle sayısal olarak hesaplanır. İleri ve geri fark yaklaşımının kullanıldığı sayısal türev alma işleminde O hatanın mertebesi, h da sayısal

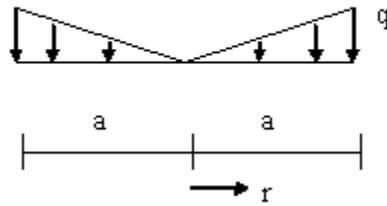
türev hesabında adım uzunluğunu göstermektedir. [12]. Radyal doğrultuda eşit aralıklı 51 nokta seçilerek, -ilk nokta mesnet, son nokta da plağın merkezi olmak üzere- işlemler yapılır. Doğrusal olmayan yapıda cebirsel duruma getirilen denklemler Newton-Raphson [13] yöntemiyle çözülür. Bu sayede, kesit tesirlerine ait (11) ifadeleri de sayısal olarak hesaplanabilir.

Sayısal işlemlerde izlenen yaklaşım, tüm hesaplarda:

$$E = 2 \times 10^6 \text{ N/m}^2, \quad a = 1 \text{ m}, \quad t = 0.1 \text{ m}, \quad q = 100 \text{ N/m}^2 \quad (12)$$

olarak kabul edip; yer değiştirme bileşenlerinin elde edilmesi şeklindedir. Poisson oranı ve ilkel kusurun sonuçlar üzerindeki etkisinin incelenmesine odaklanılmıştır. Bu kapsamda aşağıda belirtilen parametrelerin çeşitli kombinasyonları için hesaplar yinelenmiştir.

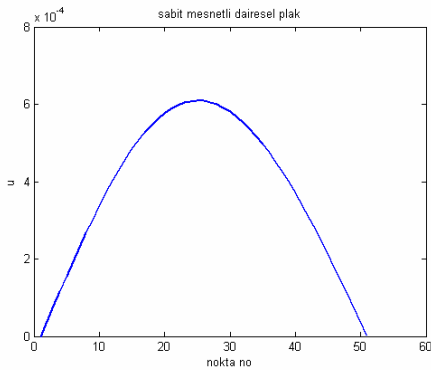
$$\eta_y = \{-0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2\}, \quad \nu = \{0.25, 0.30, 0.35\}. \quad (13)$$



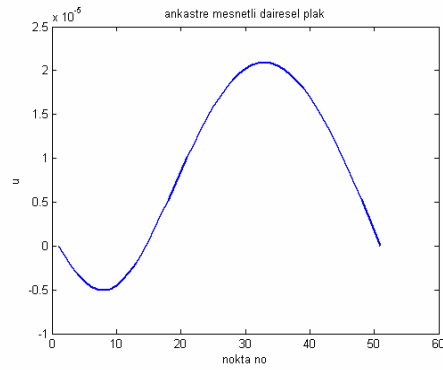
Şekil 1 Yükleme durumu (plağın yandan görünüşü)

4. SAYISAL ÖRNEKLER

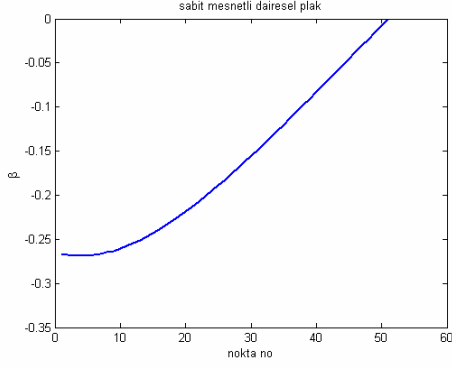
Algoritma, sınır değer problemi olarak tasarlanmıştır. Plak kenarı boyunca ilgili mesnetlenme durumuna ait sınır koşulları tam olarak sağlanmış, simetri eksenindeki (plağın merkezindeki) koşullar ise test edilmiştir (Şekil 2-7).



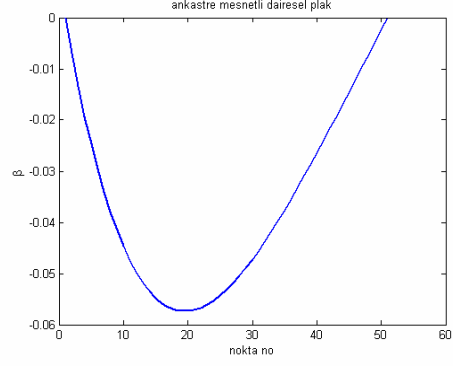
Şekil 2 u grafiği



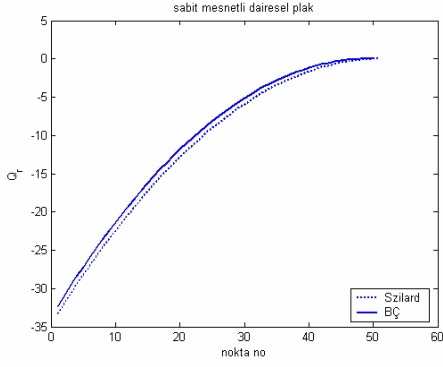
Şekil 4 u grafiği



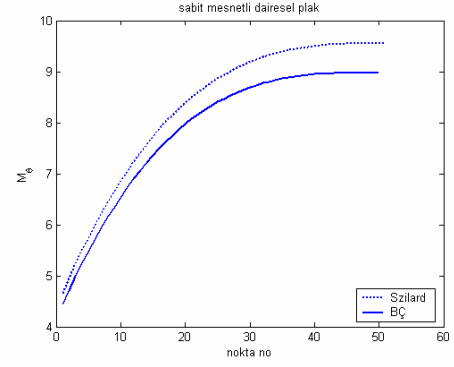
Şekil 3 β grafiği



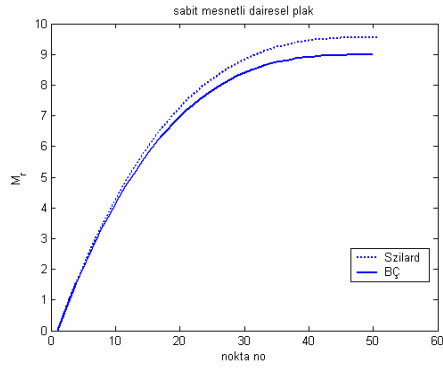
Şekil 5 β grafiği



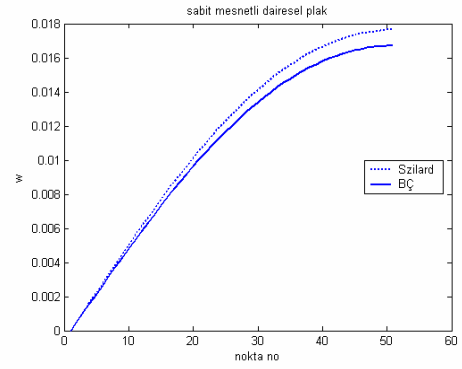
Şekil 6 Q_r grafiği



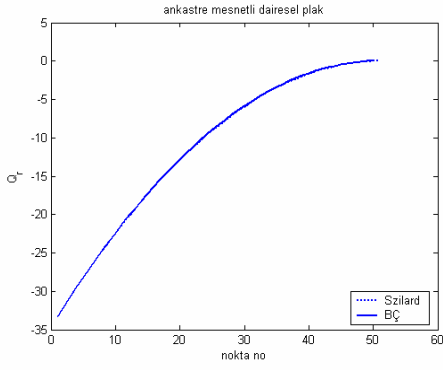
Şekil 10 M_θ grafiği



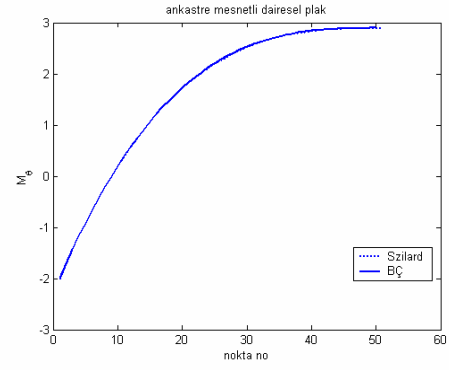
Şekil 8 M_r grafiği



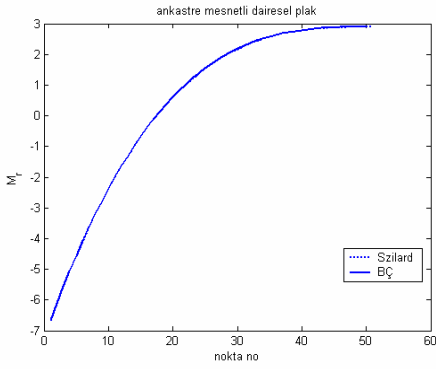
Şekil 12 w grafiği



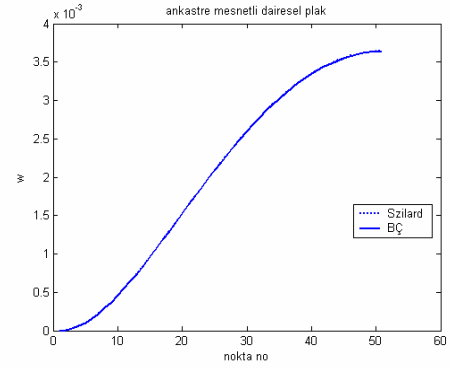
Şekil 7 Q_r grafiği



Şekil 11 M_θ grafiği



Şekil 9 M_r grafiği

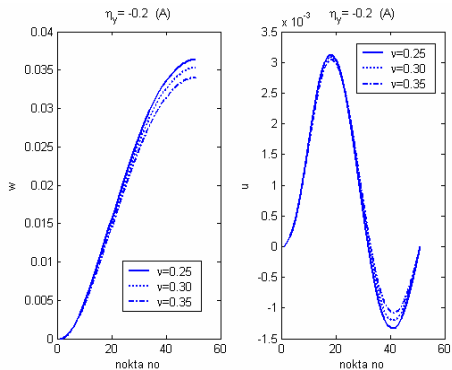


Şekil 13 w grafiği

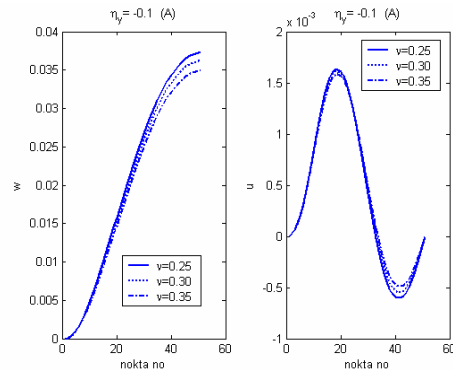
Çalışmada elde edilen çökme ve eğilme momenti değerleri, klasik plak teorisine [14] göre bulunanlarla karşılaştırılmış ve değerlerin birbirlerine oldukça yakın olduğu görülmüştür (Şekil 8-13).

5. SONUÇLAR

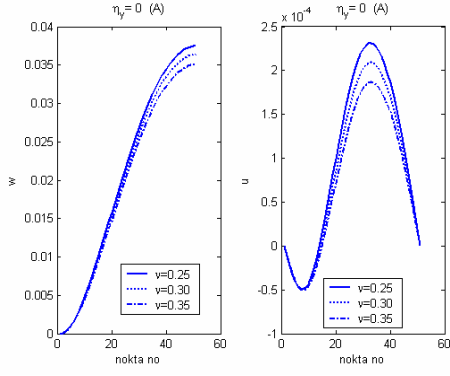
Kusursuz plak için bu çalışmada (BÇ) bulunan sonuçların klasik plak teorisi kullanılarak bulunan değerlerle [14] örtüştüğü görülmüştür. Poisson oranı arttıkça, yer değiştirmeler de büyümektedir (Şekil 14-27).



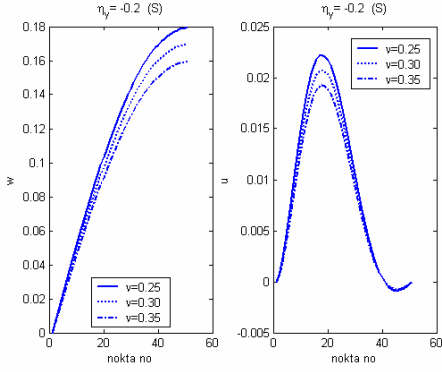
Şekil 14 Yer değiştirme grafiği



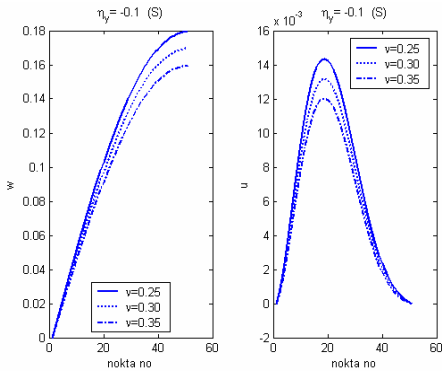
Şekil 16 Yer değiştirme grafiği



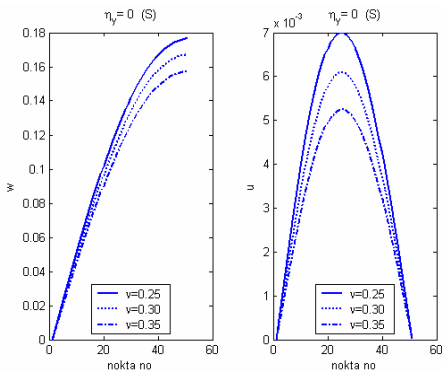
Şekil 18 Yer değiştirme grafiği



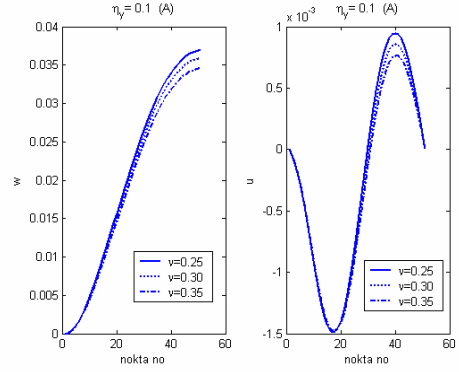
Şekil 15 Yer değiştirme grafiği



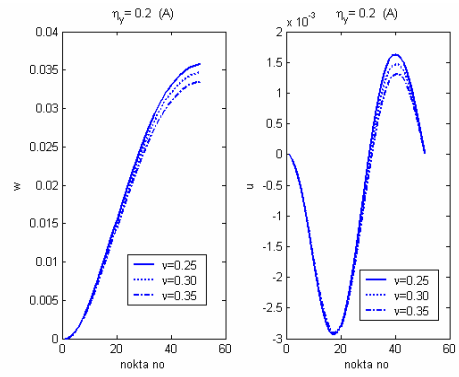
Şekil 17 Yer değiştirme grafiği



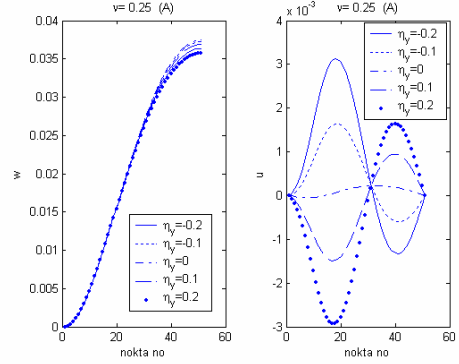
Şekil 19 Yer değiştirme grafiği



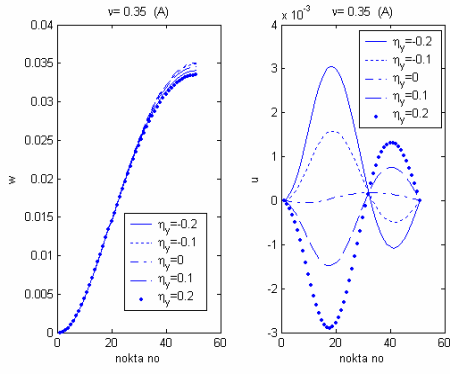
Şekil 20 Yer değiştirme grafiği



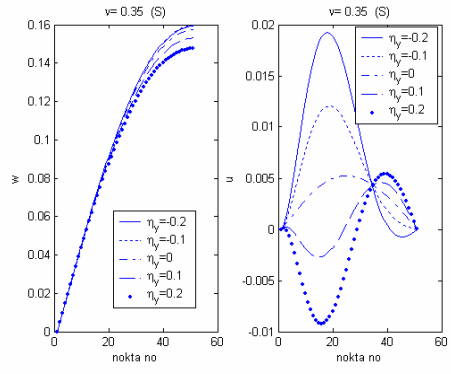
Şekil 22 Yer değiştirme grafiği



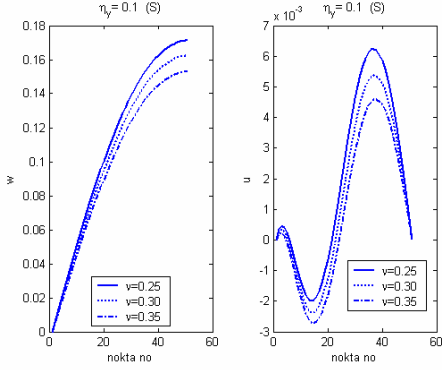
Şekil 24 Yer değiştirme grafiği



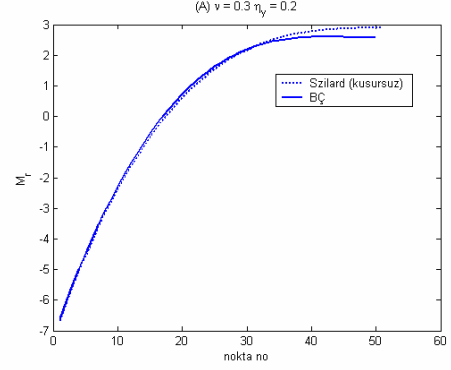
Şekil 26 Yer değiştirme grafiği



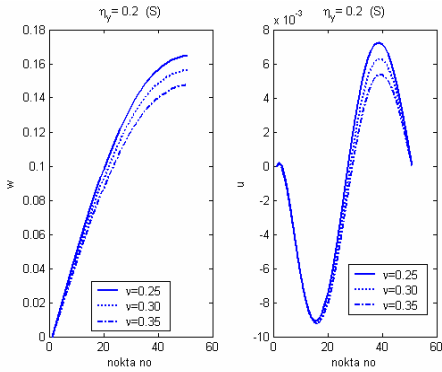
Şekil 27 Yer değiştirme grafiği



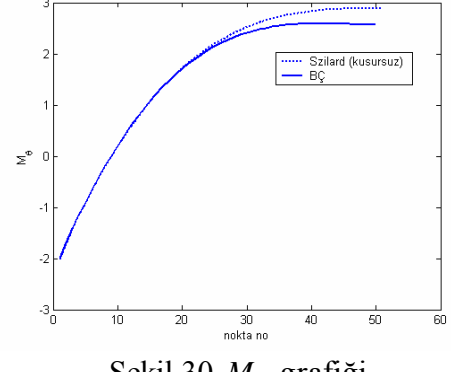
Şekil 21 Yer değiştirme grafiği



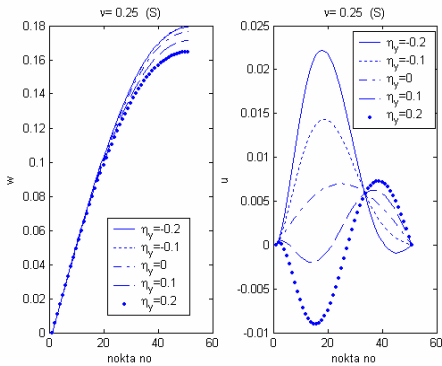
Şekil 28 M_r grafiği



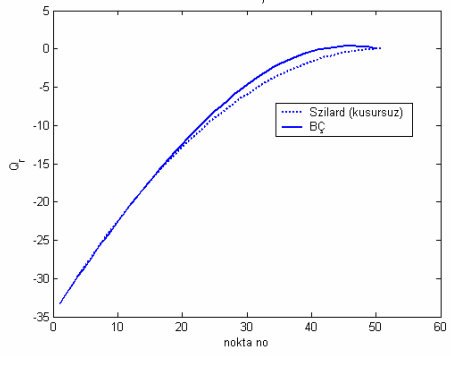
Şekil 23 Yer değiştirme grafiği



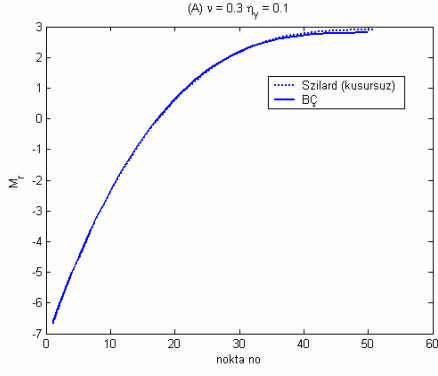
Şekil 30 M_θ grafiği



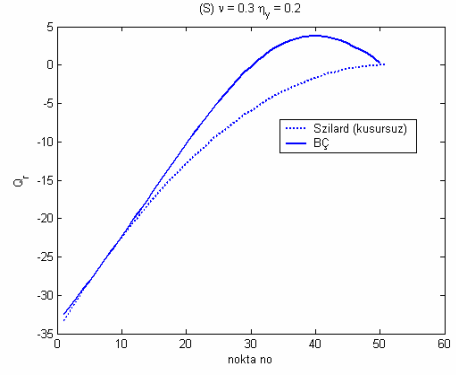
Şekil 25 Yer değiştirme grafiği



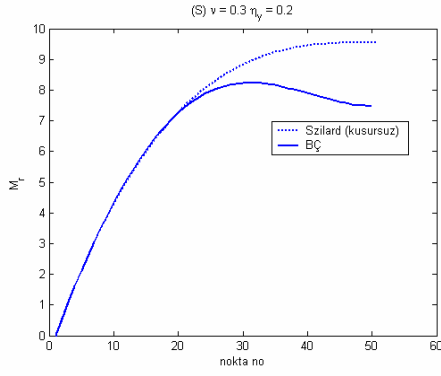
Şekil 32 Q_r grafiği



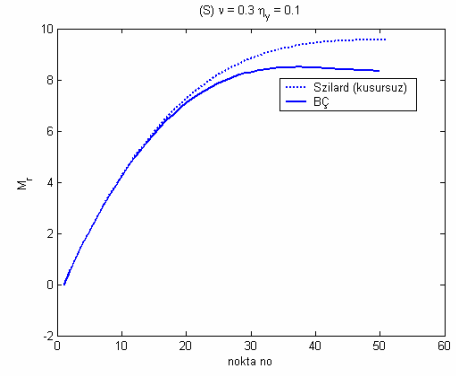
Şekil 34 M_r grafiği



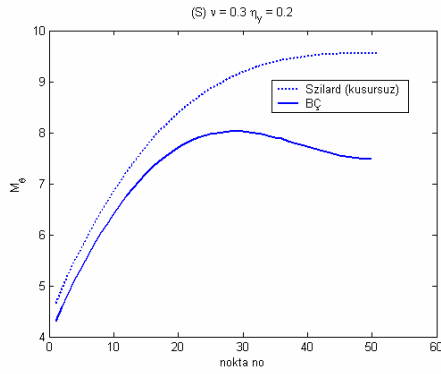
Şekil 33 Q_r grafiği



Şekil 29 M_r grafiği



Şekil 35 M_r grafiği



Şekil 31 $M_θ$ grafiği

Doğrusal değişen yükleme durumu için kesme kuvveti, eğilme momentine kıyasla göz önüne alınan ilkel kusurdan çok daha az etkilenmektedir. İlkel kusurun u üzerindeki etkisi dikkat çekici mertebededir. Ayrıca mesnetlenme şekli sonuçlar üzerinde belirleyici etkiye sahiptir. Ankastre mesnetli plak, sabit mesnetliye göre ilkel kusurdan kesit tesirleri bakımından daha az etkilenmektedir (Şekil 28-35).

KAYNAKLAR

- [1] Akkaş N., Odeh, G., "A Novel Snap-Through Buckling Behaviour of Axisymmetric Shallow Spherical Shell With Possible Application in Transducer Design", Computers and Structures, 79: 2579-2585, 2001.

- [2] Dube, G.P., Joshi, S., Dumir, P.C., “Nonlinear Analysis of Thick Shallow Spherical and Conical Orthotropic Caps Using Galerkin’s Method”, *Applied Mathematical Modelling* 25: 755-773, 2001.
- [3] Yükseler, R.F., “The Strain Energy Density of Compressible Rubber-Like Shells of Revolution”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 63: 419-423, 1996.
- [4] Yükseler, R.F., “On The Definition of the Deformed Reference Surface of Rubber-Like Shells of Revolution”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 63: 424-428, 1996.
- [5] Yükseler, R.F., “The Parameters Affecting the Differences Between the Solutions Corresponding to Two Different Definitions of the Reference Surface of Deformed Rubber-Like Shells of Revolution”, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 38(4): 597-602, 2003.
- [6] Altekin, M., “Siğ Küresel Kabukların Geometrik Doğrusal Olmayan Analizi”, Doktora tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul 2005.
- [7] Filho, L.A.D., Awruch, A.M., “Geometrically Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Shells and Plates Using the Eight-Node Hexahedral Element With One-Point Quadrature”, *Finite Element Analysis and Design*, 40: 1297-1315, 2004.
- [8] Erdölen, A., Yükseler, R.F., “An Approach for Finite Strains and Rotations of Shells of Revolution With Application to a Spherical Shell Under a Uniformly Distributed Pressure”, *Journal of Elastomers and Plastics*, 35 (4): 357-365, 2003.
- [9] Kheyrkhan, M., Peek, R., “Postbuckling Analysis and Imperfection Sensitivity of General Shells by the Finite Element Method”, *International Journal of Solids and Structures*, 36: 2641-2681, 1999.
- [10] Yamada, S., Yamada, M., “Buckling and Postbuckling Behavior of Half-Loaded Shallow Spherical Shells”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 20 (4): 239-248, 1985.
- [11] Huang, N., “Unsymmetrical Buckling of Thin Shallow Spherical Shells”, *Journal of Applied Mechanics*, September: 447-457, 1964.
- [12] Mathews, J.H., “Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering”, Prentice-Hall International Inc., 1992.
- [13] Maron, M.J., Lopez, R.J., “Numerical Analysis: A Practical Approach”, Wadsworth Publishing Company, 1991.
- [14] Szilard, R., “Theory and Analysis of Plates”, Prentice Hall, 1974.