



İÇ ÇATLAK İÇEREN VİSKOELASTİK DİKDÖRTGEN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMASI

Esra Eylem Karataş¹
Yıldız Teknik Üniversitesi
İstanbul

Nazmiye Yahnioğlu²
Yıldız Teknik Üniversitesi
İstanbul

ÖZET

Ele alınan bu çalışmada, dikdörtgen iç çatlak içeren lineer viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış dikdörtgen plağın, karşılıklı iki kenarından etkiyen düzgün yayılı statik dış basınç kuvveti etkisinde oluşan delaminasyon burkulma problemi incelenmiştir. Plağın bütün yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlendiği ve yapısındaki dikdörtgen iç çatlakların yüzeylerinin başlangıçta çok küçük ön eğriliğe sahip olduğu kabul edilmektedir. Ele alınan sınırdeğer probleminde, çatlakla paralel doğrultuda etkiyen statik dış basınç kuvveti (elastik plak) etkisinde veya sabit dış basınç için zaman ilerlerken (viskoelastik plak), çatlak yüzeylerindeki eğriliklerin büyüyerek sonsuza gitmesi, burkulma kriteri olarak seçilmiştir. Ele alınan delaminasyon burkulma problemleri Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilite Teorisi (LEÜBST) yardımıyla modellenmiştir. Ele alınan sınırdeğer probleminin çözümünde, sınır tipli pertürbasyon tekniği, Laplace dönüşümü ve üç boyutlu sonlu elemanlar modellemesi kullanılmıştır. Dikdörtgen iç çatlak içeren lineer viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış dikdörtgen plağın delaminasyon burkulmasına ait kritik parametre değerleri ile plağın burkulma mod şekilleri verilmiştir.

GİRİŞ

Çok katlı kompozit malzemelerde, kompozit malzemeyi oluşturan bileşenler arasında bulunan çatlaklar ve bu çatlaklar ile ilgili araştırmalar pek çok mühendisliğin ilgi alanına girmekte olup önemli ve güncel problemler arasında yer almaktadır. Yapı elemanlarında çeşitli nedenlerle oluşmuş mevcut çatlaklar esas yüklem esnasında, yapı elemanının mukavemetini önemli ölçüde etkilediği için yapı elemanında meydana gelebilecek olumsuz durumların önceden tespit edilmesi ve gerekli önlemlerin alınması mühendislik açısından zaruri bir inceleme alanını oluşturmaktadır. Bu sebeple bir çok bilim dalındaki araştırmacılar, yapı elemanlarının kırılmasına ait problemlerin incelenmesinde, kritik parametrelerin belirlenmesine yönelik olarak yoğun şekilde çalışmaktadırlar. Yapı elemanlarının kırılmasına ait incelemelerin önemli bir kısmını delaminasyon burkulma problemleri oluşturur. Bu problemler, yapı elemanının serbest yüzeyi ile çatlak arasındaki kısmın dış basınç kuvveti etkisinde stabilite kaybına sebep olan kritik parametrelerin bulunması olarak verilebilir [17]. Belirtelim ki, delaminasyon burkulma problemleri ancak, çatlak uzunluğu ve çatlak ile plağın serbest üst yüzeyi arasındaki mesafe aynı mertebeden ise anlamlıdır. Çatlak boyutlarının kritik delaminasyon burkulma kuvvetine etkisini ortaya koyan bir çalışma [8] tarafından yapılmıştır. Delaminasyon burkulma problemlerinin daha gerçekçi teorilere dayanılarak çözülebilmesi Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Stabilite Teorisi (LEÜBST) yardımıyla yapılabilmektedir. Bu teorinin denklem ve bağıntıları, Lineer olmayan stabilite teorisinin üç boyutlu kesin denklem ve bağıntılarının lineerize edilmesiyle elde edilir [9,12,17]. Belirtilen teorisinin, mekanik özellikleri zamana bağlı malzemeler için geliştirilmesi ise Akbarov ve öğrencileri tarafından yapılmıştır [10,11,13,14]. Bu teorisinin viskoelastik

¹ Dr., İnşaat Müh. Böl., E-posta: ekaratas@yildiz.edu.tr

² Prof. Dr., Matematik Müh. Böl., E-posta: nazmiye@yildiz.edu.tr

kompozit şerit-plak veya dikdörtgen viskoelastik kompozit ve/veya viskoelastik sandviç plaklara ait delaminasyon burkulma problemlerine uygulanmasına ait çalışmalar [1,2,3,4,5,6,10] olarak verilebilir.

Ele alınan bu çalışma, [2,3,4,6] çalışmalarının viskoelastik dikdörtgen plağın iç çatlak içermesi durumu için geliştirilmesi olarak verilebilir. Dolayısıyla bu çalışmada, yapısında dikdörtgen iç çatlak bulunan lineer viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış dikdörtgen plağın delaminasyon burkulma problemi incelenmiştir. Plağın dört kenarından düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlendiği ve mevcut iç çatlak yüzeylerinin başlangıçta çok küçük ön eğriliğe sahip olduğu kabul edilmektedir. Bu eğriliklerin, çatlak doğrultusunda uygulanan statik dış basınç kuvveti etkisinde (elastik plak) veya sabit dış basınç etkisinde zaman ilerlerken (viskoelastik plak), yer değiştirmelerinin büyüerek sonsuza gitmesi kriterinden, plağa ait kritik parametre değerleri belirlenmiştir. Ele alınan problemin matematiksel modeli, lineer viskoelastik cisim teorisinin LEÜBST üç boyutlu geometrik lineer olmayan alan denklemleri çerçevesinde yapılmış ve kritik burkulma yükünün belirlenmesinde "başlangıç eğinti kriteri" kullanılmıştır [18]. Ele alınan sınır değer problemi sınır tipli pertürbasyon tekniği, Laplace dönüşümü ve üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Çözümün gerektirdiği bütün algoritma ve programlar FORTRAN dilinde tarafımızdan yapılmıştır.

PROBLEMİN MATEMATİKSEL MODELİ

Ele alınan problemin çözüm bölgesi (Şekil 1),

$$(\Omega - \Omega') \quad (1)$$

burada,

$$\Omega = \{0 \leq x_1 \leq \ell_1, 0 \leq x_2 \leq h, 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}$$

$$\Omega' = \left\{ (\ell_1 - \ell_{10})/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_{10})/2, x_2 = h_A \pm 0, (\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2 \right\} \quad (2)$$

dir. (2)'de ℓ_1, h, ℓ_3 dikdörtgen plağın sırasıyla Ox_1, Ox_2, Ox_3 eksenleri doğrultusundaki uzunluklarını, $\ell_{10}(\ell_{30})$ yapıdaki çatlakın $Ox_1(Ox_3)$ doğrultusundaki uzunluğunu, h_A ise çatlakın $x_2 = 0$ düzleminde düşey doğrultudaki mesafesini temsil etmektedir. Çatlak yüzeylerinin ($h_{A+0}(h_{A-0})$ çatlakın üst (alt) yüzeyi) önceden çok küçük "eğriliğe" sahip olduğu ve bu eğriliğin $x_1 = \ell_1/2$ ve $x_3 = \ell_3/2$ düzlemlerine göre simetrik olduğu kabul edilmektedir. Çatlak yüzeylerinin denklemi

$$x_2^\pm = h_A + \varepsilon f^\pm(x_1, x_3), (\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2, (\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2 \quad (3)$$

ile verilebilir. Burada ε ($\varepsilon \ll 1$), çatlak yüzeylerinin başlangıçta sahip olduğu kabul edilen eğrintinin derecesini gösteren boyutsuz küçük bir parametre ve $f(x_1, x_3)$ fonksiyonu ise bu eğriliğin formunu göstermektedir. (3)'deki $f(x_1, x_3)$ fonksiyonunun,

$$f^\pm(\ell_1 - \ell_{01}/2, x_3) \Big|_{(\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2} = 0, \quad f^\pm((\ell_1 + \ell_{10})/2, x_3) \Big|_{(\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2} = 0$$

$$\frac{df^\pm((\ell_1 - \ell_{10})/2, x_3)}{dx_1} \Big|_{(\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2} = \frac{df^\pm((\ell_1 + \ell_{10})/2, x_3)}{dx_1} \Big|_{(\ell_3 - \ell_{30})/2 \leq x_3 \leq (\ell_3 + \ell_{30})/2} = 0$$

$$f^{\pm}(x_1, (\ell_3 - \ell_{30})/2) \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_{10})/2} = 0 \quad , \quad f^{\pm}(x_1, (\ell_3 + \ell_{30})/2) \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_{10})/2} = 0$$

$$\frac{df^{\pm}(x_1, (\ell_3 - \ell_{30})/2)}{dx_3} \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} = \frac{df^{\pm}(x_1, (\ell_3 + \ell_{30})/2)}{dx_3} \Big|_{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \leq x_1 \leq (\ell_1 + \ell_{10})/2} = 0 \quad (4)$$

özelliklerini sağladığı kabul edilmektedir. Ele alınan plağın geometrisi ile yükleme durumu Şekil 1'de verilmiştir. Çözüm bölgesinde sağlanan alan denklemleri, bünye denklemleri, şekil değiştirme- yer değiştirme ilişkileri ve sınır koşulları;

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \right] = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijrs}(0) \varepsilon_{rs}(t) + \int_0^t C_{ijrs}(t-\tau) \varepsilon_{rs}(\tau) d\tau,$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right) \quad (5)$$

$$u_2 \Big|_{x_1=0; \ell_1} = u_2 \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0$$

$$\left[\sigma_{1n} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} = p \delta_i^1, \quad \left[\sigma_{3n} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0 \quad (6)$$

$$\left[\sigma_{jn} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \right] n_j^{\pm} \Big|_{\substack{x_1^{\pm} = h_1 + n_1^{\pm}(x_1, x_3) \\ (\ell_1 - \ell_{10})/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_{10})/2 \\ (\ell_3 - \ell_{30})/2 < x_3 < (\ell_3 + \ell_{30})/2}} = 0 \quad ; j; n=1,2,3 \quad (7)$$

olarak verilebilir. Yukarıda verilen (5)-(7) denklem ve ifadelerinde σ_{ij} gerilme tansörü bileşenlerini, ε_{ij} şekil değiştirme tansörü bileşenlerini, u_i 'ler ($i, j = 1,2,3$) yer değiştirme vektörü bileşenlerini, n_j^{\pm} çatlak yüzeylerine ait birim normal vektörün bileşenlerini ve t zamanı göstermektedir. Ayrıca, $C_{ijrs}(0)$ anizotrop ortamlar için mekanik sabitlerin başlangıçtaki yani, $t=0$ anındaki değerlerini, $C_{ijrs}(t)$ fonksiyonları ise, viskoelastik anizotrop ortamların "gevşeme-relaxation" lerini temsil eden integral operatörün çekirdeğini göstermektedir. (3) denklemini kullanılarak, n_j^{\pm} için;

$$n_1^{\pm} = \frac{\pm \varepsilon \frac{\partial f^{\pm}(x_1, x_3)}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^{\pm}(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^{\pm}(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}} \quad , \quad n_2^{\pm} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^{\pm}(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^{\pm}(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}}$$

$$n_3^\pm = \frac{\pm \varepsilon \frac{\partial F^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial F^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial F^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}} \quad (8)$$

elde edilir. $\varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial F^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial F^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2 \right] \ll 1$ olduğu kabul edilirse, buna dayanarak, (8)

deki denklemler ε 'na bağlı kuvvet serisi olarak ifade edilebilir,

$$n_1^\pm = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} n_{1k}^\pm(x_1, x_3), \quad n_2^\pm = \pm 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} n_{2k}^\pm(x_1, x_3), \quad n_3^\pm = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} n_{3k}^\pm(x_1, x_3) \quad (9)$$

olur. Aranılan büyüklükler küçük parametre ε 'na göre seri formunda yazılırsa,

$$\{\sigma_{ij}; \varepsilon_{ij}; u_i\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \{\sigma_{ij}^{(q)}; \varepsilon_{ij}^{(q)}; u_i^{(q)}\} \quad (10)$$

olur. (10) ifadeleri, (5) ve (6) da yerine yazılır ayrıca (10)'daki büyüklükler $(x_1, h_A - 0, x_3)$ ve $(x_1, h_A + 0, x_3)$ civarında seriye açılırsa ve bu seriler (9) ile birlikte (7) ifadesinde yerine konur (sınır pertürbasyonu) ve ε parametresinin kuvvetlerine göre gruplaştırılırsa, her bir yaklaşım için seri-sınırdeğer problemleri elde edilir. Elde edilen seri-sınırdeğer problemlerinin her biri kendisinden önce gelen sınırdeğer problemlerine ait büyüklükleri içermektedir. Her bir sınırdeğer problemi, elde edildiği ε 'nın derecesine göre isimlendirilecektir örneğin, sıfıncı, birinci vb. sınırdeğer problemi (yaklaşım).

Dikdörtgen iç çatlak içeren viskoelastik dikdörtgen plağın delaminasyon burkulmasına ait sıfıncı yaklaşım için elde edilen sınırdeğer problemi göz önüne alındığında, ele alınan sınır koşulları ve $\delta_i^n + \partial u_i^{(0)}/\partial x_n \approx \delta_i^n$ için çözüm kolayca yazılabilir. Buna göre sıfıncı yaklaşıma ait çözümden gerilme fonksiyonları;

$$\sigma_{11}^{(0)} = p \text{ ve } \sigma_{ij}^{(0)} = 0, \quad ij \neq 11 \quad (11)$$

bulunur. Birinci yaklaşıma ait denklem ve bağıntılar:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{ji}^{(1)} + \sigma_{jn}^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n} \right] = 0, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right) \quad (12)$$

$$u_2^{(1)} \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0, \quad u_2^{(1)} \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0, \quad \left[\sigma_{1i}^{(1)} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0$$

$$\sigma_{31}^{(1)} \Big|_{x_1=0} = \sigma_{33}^{(1)} \Big|_{x_3=0} = \sigma_{31}^{(1)} \Big|_{x_3=\ell_3} = \sigma_{33}^{(1)} \Big|_{x_3=\ell_3} = 0, \quad \sigma_{2i}^{(1)} \Big|_{x_2=0; h} = 0, \quad i=1,2,3 \quad (13)$$

$$\sigma_{2i}^{(1)} \Big|_{\substack{x_2^{\pm}=h_A \pm 0 \\ (\ell_1 - \ell_{10})/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_{10})/2 \\ (\ell_3 - \ell_{30})/2 < x_3 < (\ell_3 + \ell_{30})/2}} = \mp \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial F^\pm}{\partial x_1} \delta_i^1, \quad i=1,2,3 \quad (14)$$

bulunur. (12) de $\sigma_{jn}^{(0)}$ sıfırncı yaklaşıma ait gerilmeleri göstermektedir.

Ele alınan problem için yapı elemanının malzemesi normalize edilmiş mekanik özellikli, homojen, simetri eksenleri Ox_1 , Ox_2 ve Ox_3 olan lineer viskoelastik malzeme olarak seçilmiştir. Buna göre bünye denklemleri,

$$\sigma_{ii}^{(q)} = A_{ij} \varepsilon_{ij}^{(q)}, i,j=1,2,3, \sigma_{12}^{(q)} = 2A_{66} \varepsilon_{12}^{(q)}, \sigma_{13}^{(q)} = 2A_{55} \varepsilon_{13}^{(q)}, \sigma_{23}^{(q)} = 2A_{44} \varepsilon_{23}^{(q)}, q=0,1,2,\dots \quad (15)$$

olur. (15)'de verilen A_{11}, \dots, A_{66} malzeme sabitleri,

$$A_{ij} \varphi(t) = A_{ij0} \varphi(t) + \int_0^t A_{iji}(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad ij=11;22;33;12;13;23;44;55;66 \quad (16)$$

şeklinde operatörlerdir [4]. Ele alınan delaminasyon burkulma probleminin incelenmesinde ve probleme ait kritik parametre değerlerinin belirlenmesinde, çatlak yüzeylerinin başlangıçta sahip olduğu kabul edilen küçük eğintilerin verilen dış basınç kuvveti etkisinde büyüyerek sonsuza gitmesi kriterinden yararlanılmıştır. Kritik parametrelerin değerlerinin belirlenmesinde, sadece sıfırncı ve birinci yaklaşıma ait sınırdeğer problemlerinin çözümü yeterli olmaktadır. Çünkü, her bir yaklaşım için bulunan alan denklemlerinin homojen kısmı birbiriyle aynen çakışmakta, sadece homojen olmayan kısımları (denklemin sağ tarafları) birbirinden farklılaşmaktadır. Aranan kritik değer, denklem takımının katsayılar matrisini tekil yapan değer olarak belirlendiğinden, 2. ve sonraki yaklaşımlar kritik parametrelerin değerini değiştirmemektedir. 2. ve sonraki yaklaşımların göz önüne alınması, gerilme yayılımının hassaslaştırılmasında etkindir. Amacımız burkulmaya sebep olan kritik parametre değerinin belirlenmesi olduğundan hesaplamalar, sıfırncı ve birinci yaklaşım çerçevesinde sınırlandırılmıştır. Sıfırncı yaklaşıma ait çözüm (11) ile verildiğine göre, (12)-(14) ile verilen birinci yaklaşımın çözümü yapılmalıdır. Bu amaç ile birinci yaklaşıma ait bütün denklem ve bağıntılara $s > 0$ parametresine göre,

$$\bar{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-st} dt \quad (17)$$

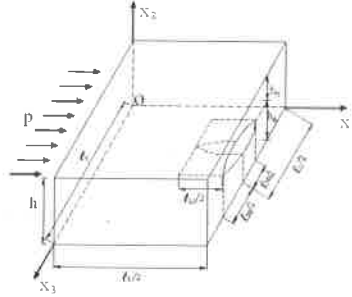
Laplace dönüşümü uygulanır. Birinci yaklaşıma ait denklem ve bağıntıların Laplace dönüşümleri, bu yaklaşımdaki denklem ve bağıntılarda $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, $u_i^{(1)}$ ve A_{ij} leri sırasıyla $\bar{\sigma}_{ij}^{(1)}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}^{(1)}$, $\bar{u}_i^{(1)}$ ve \bar{A}_{ij} , yani Laplace dönüşümleri ile değiştirilerek Laplace uzayındaki birinci yaklaşıma ait uygun denklem ve ifadeler elde edilir.

SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Ele alınan problemin birinci yaklaşımının Laplace uzayındaki formuna ait sonlu eleman formülasyonu,

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \left[\left(\bar{\sigma}_{11}^{(1)} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial \bar{u}_1^{(1)}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{u}_1^{(1)}}{\partial x_1} + \left(\bar{\sigma}_{12}^{(1)} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{u}_1^{(1)}}{\partial x_2} + \right. \\ & \bar{\sigma}_{21}^{(1)} \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial x_1} + \bar{\sigma}_{22}^{(1)} \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial x_2} + \left(\bar{\sigma}_{13}^{(1)} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial \bar{u}_3^{(1)}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{u}_1^{(1)}}{\partial x_3} \\ & \left. + \bar{\sigma}_{31}^{(1)} \frac{\partial \bar{u}_3^{(1)}}{\partial x_1} + \bar{\sigma}_{32}^{(1)} \frac{\partial \bar{u}_3^{(1)}}{\partial x_2} + \bar{\sigma}_{23}^{(1)} \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial x_3} + \bar{\sigma}_{33}^{(1)} \frac{\partial \bar{u}_3^{(1)}}{\partial x_3} \right] dx_1 dx_2 dx_3 - \\ & \int_{(t_3 + t_{30})/2}^{(t_3 + t_{30})/2 + (t_1 + t_{10})/2} \int_{(t_3 - t_{30})/2}^{(t_3 - t_{30})/2 + (t_1 - t_{10})/2} \int_{x_2 = h_A - 0}^{x_2 = h_A + 0} \left[-\sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial f^-}{\partial x_1} \bar{u}_1^{(1)} \right] dx_1 dx_3 - \int_{(t_3 + t_{30})/2}^{(t_3 + t_{30})/2 + (t_1 + t_{10})/2} \int_{(t_3 - t_{30})/2}^{(t_3 - t_{30})/2 + (t_1 - t_{10})/2} \int_{x_2 = h_A + 0} \left[\sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial f^+}{\partial x_1} \bar{u}_1^{(1)} \right] dx_1 dx_3 \end{aligned} \quad (18)$$

fonksiyoneli ve Ritz tekniği yardımıyla yapılmıştır.



Şekil 1. Plak geometrisi ve yükleme durumu

Sonlu eleman çözümü için, çözüm bölgesi sonlu adet alt bölgeye ayrıştırılır. Sonlu eleman ayrıklaştırmasında sekiz nodlu dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlar kullanılmıştır [15]. Aranan büyüklüklerin Laplace dönüşümlerinin değerleri bulunduğundan sonra, aynı büyüklüklerin orijinal değerleri Schapery metodu [16] yardımıyla sayısal olarak elde edilir [4].

SAYISAL ÇÖZÜM

Plak malzemesinin Ox_1x_3 düzlemine paralel olacak şekilde yerleştirilmiş birbirini tekrarlayan, çok sayıda iki izotrop, homojen levhadan oluşmuş çok katlı kompozit malzeme olduğu kabul edilmektedir. Kompozit malzemenin bileşenlerinden güçlendirici levhanın, mekanik sabitleri E_2 (Young Modülü) ve ν_2 (Poisson oranı) olan elastik bir malzemeden yapıldığı; diğer bileşen matris malzemesinin ise, lineer viskoelastik bir malzemeden yapıldığı kabul edilmektedir. Matris malzemenin Elastisite modülü ve Poisson katsayısı,

$$E_1 = E_{10} \left[1 - \omega_0 R_\alpha^* (-\omega_0 - \omega_\infty) \right] \quad \nu_1 = \nu_{10} \left[1 + \frac{1 - 2\nu_{10}}{2\nu_{10}} \omega_0 R_\alpha^* (-\omega_0 - \omega_\infty) \right] \quad (19)$$

ile verilir. Burada E_{10} ve ν_{10} sırasıyla anlık Young modülü ve anlık Poisson katsayısıdır. α , ω_0 ve ω_∞ 'ler viskoelastik malzemenin reolojik parametreleri, R_α^* Rabotnov operatörüdür [4]. Bu operatör

$$R_\alpha^* \phi(t) = \int_0^t R_\alpha(\beta, t - \tau) \phi(\tau) dt \quad R_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((1+n)(1+\alpha))}, \quad -1 < \alpha \leq 0 \quad (20)$$

dir. (20)'de $\Gamma(x)$ Gamma fonksiyonudur. Sayısal hesaplamalarda boyutsuz reolojik parametre $\omega = \omega_0 / \omega_\infty$ ve boyutsuz zaman $t' = \omega_0^{1/(1+\alpha)} t$ kullanılmıştır. Sayısal hesaplamalarda $h/l_1 = 0.15$, $E_2/E_{10} = 10$, $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1 = 1$, $\nu_{10} = \nu_2 = 0.3$, $\eta_{10} = \eta_2 = 0.5$ alınmıştır. Ayrıca (3)'de verilen ve çatlak yüzeylerinin başlangıçtaki eğintisini ifade eden fonksiyon,

$$f^\pm(x_1, x_3) = h_A \pm A \sin^2 \left(\frac{\pi}{\ell_{10}} \left(x_1 - \frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2} \right) \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{\ell_{30}} \left(x_3 - \frac{\ell_3 - \ell_{30}}{2} \right) \right) \quad (21)$$

şeklinde seçilmiştir. Ele alınan parametre değerlerinde öncelikle $t' = 0$ ve $t' = \infty$ için sayısal hesaplamalar yapılmıştır. $t' = 0$ ($t' = \infty$) durumuna ait kritik delaminasyon burkulma kuvveti p_{cr0}/E_{10} ($p_{cr\infty}/E_{10}$) ile gösterilmiştir. Problemin $x_1 = \ell_1/2$ ve $x_3 = \ell_3/2$ düzlemlerine göre simetri özelliğinden yararlanılarak, dörtte bir çözüm bölgesi Ox_1 doğrultusunda 20, Ox_2 doğrultusunda 12, Ox_3 doğrultusunda 20 dikdörtgen prizmatik sonlu eleman olacak şekilde

toplam, 4800 dikdörtgen prizmatik sonlu elemana ayrıklaştırılmıştır. Ele alınan durumda, sonlu eleman modellemesi 5833 nod ve 16.966 serbestlik derecesi içermektedir.

Çizelge 1. Farklı ℓ_{10}/ℓ_1 için $p_{cr,0}/p_{cr,\infty}$ değerleri ($h_A = h_u = h/2$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$, $\omega = 1$, $\alpha = -0.5$)

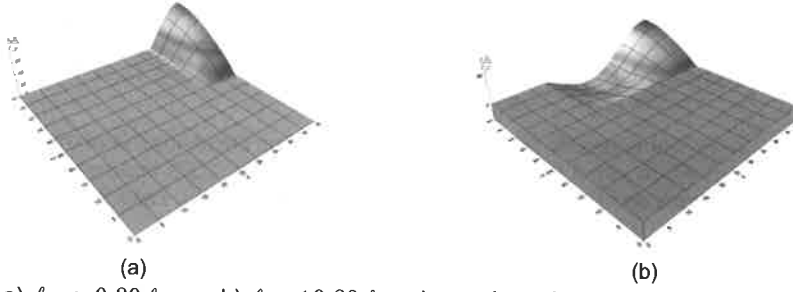
| ℓ_{10}/ℓ_1 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $p_{cr,0}/p_{cr,\infty}$ | <u>0.4280</u> 0.2677 | <u>0.4135</u> 0.2669 | <u>0.4123</u> 0.2617 | <u>0.4015</u> 0.2537 |

Çizelge 1'de, dikdörtgen iç çatlağın Ox_1 doğrultusundaki uzunluğunun değişiminin kritik delaminasyon burkulma kuvveti $p_{cr,0}/p_{cr,\infty}$ değerine etkisi verilmiştir. Çizelgedeki sayısal verilerden, Ox_1 doğrultusundaki çatlak uzunluğu (ℓ_{10}/ℓ_1) artarken, $p_{cr,0}/p_{cr,\infty}$ değerleri önemli ölçüde azalmaktadır.

Çizelge 2. Farklı ℓ_{30}/ℓ_1 için $p_{cr,0}/p_{cr,\infty}$ değerleri ($h_A = h_u = h/2$, $\ell_{10}/\ell_1 = 0.5$, $\omega = 1$, $\alpha = -0.5$)

| ℓ_{30}/ℓ_1 | 0.20 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.70 | 0.80 | Bant çatlak [7] |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $p_{cr,0}/p_{cr,\infty}$ | <u>0.6600</u> 0.4103 | <u>0.5368</u> 0.3114 | <u>0.4715</u> 0.2817 | <u>0.4123</u> 0.2617 | <u>0.3451</u> 0.2356 | <u>0.2986</u> 0.2077 | <u>0.2682</u> 0.1874 | <u>0.2285</u> 0.1635 |

Çizelge 2'de, ℓ_{30}/ℓ_1 (Ox_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğu) değerlerinin değişiminin $p_{cr,0}/p_{cr,\infty}$ değerine etkisi verilmiştir. Çizelge 1'de, Ox_1 doğrultusundaki çatlak uzunluğu değişiminin $p_{cr,0}/p_{cr,\infty}$ değerlerine etkisi ile Çizelge 2'de verilen Ox_3 doğrultusundaki çatlak uzunluğu değişiminin (ℓ_{30}/ℓ_1) $p_{cr,0}/p_{cr,\infty}$ değerlerine etkisi benzerdir. Çizelgenin son sütununda ise bant çatlak içeren plağa ait sayısal sonuçlar verilmiştir [7]. Çizelgeden de görüleceği üzere çatlağın Ox_3 doğrultusundaki boyu arttıkça yani yapıdaki çatlak bant çatlak durumuna yaklaştıkça elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvvetleri, bant çatlak için elde edilen değere yaklaşmaktadır. Bununla beraber, ℓ_{30}/ℓ_1 parametresinin değerinin azalması, yani Ox_3 doğrultusundaki uzunluğunun azalması ve $\ell_{30} \leq k \cdot \ell_{10}$ ($k \in \mathbb{R}$) için $k = k_{cr}$ oluşması durumunda, plağın delaminasyon burkulma modu, çatlak yüzeylerine verilen çok küçük ön eğrilik formu ile uyum göstermemekte, farklı bir burkulma modu oluşmaktadır. Bu bağıntıdaki k değeri çatlağın geometrisine bağlı bir büyüklük olup ele alınan problem için $k_{cr} = 0.80$ olarak elde edilmiştir [3]. Ele alınan plağın delaminasyon burkulma probleminin çözülmesi sonucunda, çatlağın üst yüzeyinin içinde bulunduğu düzlemdeki noktaların düşey doğrultudaki yer değiştirmelerinin grafiği çizilmiş ve kritik delaminasyon burkulma kuvvetine yakın $p/E_1 \left((p_{cr}/E_1 - p/E_1) (10^{-3}) \right)$ için plağın burkulma modu Şekil 2'de verilmiştir. Bu grafiklerin çiziminde, Şekil 2a için $\ell_{10}/\ell_1 = 0.2$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.5$ ve $h_A = h_u = h/2$ ve Şekil 2b için $\ell_{10}/\ell_1 = 0.7$, $\ell_{30}/\ell_1 = 0.4$ ve $h_A = h_u = h/2$ parametre değerleri kullanılmıştır.



Şekil 2. a) $l_{30} > 0,80.l_{10}$ ve b) $l_{30} \leq 0,80.l_{10}$ olması durumlarına ait delaminasyon burkulma modları.

Çizelge 3. Farklı ω için t'_{cr} değerleri

($h_A = h_u = h/2$, $\alpha = -0.5$, $p/E_{10} = 0.38$, $l_{30}/l_1 = 0.5$, $l_{10}/l_1 = 0.5$)

| ω | 1 | 2 | 3 |
|-----------|--------|--------|--------|
| t'_{cr} | 0.0158 | 0.0235 | 0.0384 |

Çizelge 3'de seçilen bir p/E_{10} ($p_{cr,\omega}/E_{10} < p/E_{10} < p_{cr,0}/E_{10}$) ve ω için t'_{cr} değerleri verilmiştir. Çizelgeden ω arttıkça t'_{cr} değerlerinde de artma olduğu görülmektedir.

Çizelge 4. Farklı $\alpha = -0.5$ için t'_{cr} değerleri

($h_A = h_u = h/2$, $\omega = 1$, $p/E_{10} = 0.38$, $l_{30}/l_1 = 0.5$, $l_{10}/l_1 = 0.5$)

| α | -0.3 | -0.5 | -0.7 |
|-----------|--------|--------|--------|
| t'_{cr} | 0.0425 | 0.0158 | 0.0015 |

Çizelge 4'de farklı α için t'_{cr} değerleri verilmiştir. α mutlak değerce büyüdükçe t'_{cr} değerleri küçülmektedir.

Bu çalışmanın hazırlanma sürecinde yardımlarını esirgemeyen değerli hocamız Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV'a en derin şükranlarımızı sunmayı bir borç biliriz. Ayrıca Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne de bu çalışmayı desteklemesinden ötürü teşekkür ederiz.

Kaynaklar

- [1]. Karataş, E. E., Viskoelastik Kompozit Malzemeden Yapılmış Dikdörtgen Kalın Plakların Delaminasyonunun İncelenmesi, Y.T.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2011, İstanbul
- [2]. Akbarov, S. D., Yahnioglu, N. ve Karatas, E. E., Buckling Delamination Of The Rectangular Orthotropic Thick Plate With An Edge Rectangular Crack, ASME2010 International Mechanical Engineering Congress And Exposition, 12-14 July, 2010, Istanbul, Turkey
- [3]. Akbarov, S. D., Yahnioglu, N. ve Karatas, E. E., An analysis of buckling delamination of the composite rectangular thick plate with an inner rectangular Crack, Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology (CST2010) 14-17 September. 2010, Valencia, Spain
- [4]. Akbarov, S. D., Yahnioglu, N. ve Karatas, E. E., Buckling Delamination of a rectangular plate containing a rectangular Crack and made from elastic and viscoelastic composite materials, International Journal of Solids and Structures,47(25-26):3426-3434, 2010

- [5]. Akbarov, S. D., Yahnioğlu, N. ve Tekin, A., 3D FEM analyses of the buckling delamination of a rectangular sandwich plate containing interface rectangular cracks and made from elastic and viscoelastic material, CMES. Computer Modeling and Engineering System, 64(2):147-186, 2010
- [6]. Akbarov, S. D., Yahnioğlu, N. ve Karatas, E. E., Buckling Delamination of the Viscoelastic Rectangular Thick Plate with a Edge Rectangular Crack, ASME 2009 International Mechanical Engineering Congress and Exposition (IMECE09), 13-19 Nov. 2009, Lake Buena Vista, Florida, USA
- [7]. Akbarov, S. D., Yahnioğlu, N. ve Rzayev, O. G., The Delamination Buckling of The Elastic and Viscoelastic Rectangular Composite Plate Containing a Band-Crack, 8 th International Fracture Conference, 07-09 Nov. 2007, Istanbul, Turkey
- [8]. Arman, Y., Zor, M. ve Aksoy, S., Determination of critical delamination diameter of laminated composite plates under buckling loads, Compos. Sci. and Technol., 66: 2945-2953, 2006
- [9]. Guz, A. N., Dyshel, M. Sh. ve Nazarenko, V. M., Fracture and stability of materials and structural members with cracks: Approaches and results, Inter. Appl. Mech., 40(12):1323-1359, 2004
- [10]. Akbarov, S. D. ve Rzayev, O. G., On the delamination of the elastic and viscoelastic composite circular plate, European Journal of Mechanics A/Solids, 21:269-279, 2001
- [11]. Akbarov, S. D. ve Yahnioğlu, N., The method for investigation of the general theory of stability problems of structural elements fabricated from the viscoelastic composite materials, Composites Part B: Engineering, 32(5):475-482, 2001
- [12]. Guz, A. N., Fundamentals of The Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies, Springer-Verlag, Berlin Heideberg, 1999
- [13]. Akbarov, S. D., On the three dimensional stability loss problems of elements of constructions fabricated from the viscoelastic composite materials, Mech. Comp. Mater. 34(6): 537-544, 1998
- [14]. Akbarov, S. D., Sisman, T. ve Yahnioğlu, N., On the fracture of the unidirectional composites in compression, International Journal Engineering and Science, 35(12/13): 1115-1136, 1997
- [15]. Zienkiewicz, O. C. ve Taylor, R. L., The Finite Element Methods: Basic Formulation and Linear Problems, Mc Graw-Hill Book Company, Oxford, 1989
- [16]. Schapery, R. A., Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analyses, Proc. US Nat. Cong. Appl. ASME., 1075-1085, 1966
- [17]. Biot, M. A., Mechanics Of Incremental Deformations, Wiley, New York, 1965
- [18]. Hoff, N. J., Buckling and stability, J. Roy. Aeron. Soc., 58(1), 1954