XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

İKİ TABAKALI ELASTİK BİR ORTAMDA SH DALGALARININ BEŞİNCİ HARMONİK REZONANSI

Neşe Özdemir ve Semra Ahmetolan
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

In this work, the harmonic resonance of SH (shear horizontal) waves in a two layered elastic plate of uniform thickness is considered. Both layers are assumed to be homogeneous, isotropic and incompressible elastic and having different mechanical properties. Stress and displacements are continuous at the interface of the layers. Also, free surfaces of the layers are free of tractions. Under these assumptions, the equations of motion and boundary conditions governing the propagation of nonlinear SH waves in this elastic media are derived. Then, the occurence of harmonic resonances and the fifth harmonic resonance are examined in detail. It is shown that the governing system for the slowly varying amplitudes of the fundamental wave and its fifth harmonic is a pair of two coupled NLS (nonlinear Schrödinger) equations.

ÖZET

Bu çalışmada, düzgün kalınlıklara sahip farklı hiperelastik malzemelerden oluşan iki tabakalı elastik bir ortam içerisinde yayılan nonlineer SH dalgalarının harmonik rezonans etkileşimi problemi ele alınmıştır. Serbest yüzeylerde gerilmelerin olmadığı, tabakalar arası ara yüzeyde ise yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğu kabul edilmiştir.

Dalgaların harmonik rezonans etkileşimi problemi bir asimptotik pertürbasyon metodu kullanılarak incelenmiştir. Temel dalganın faz hızı ile onun m.ci harmoniği bir kritik dalga sayısı, k_c'de çakışırsa m. harmonik rezonans durumu ortaya çıkar. Bu durumda temel dalga ile onun m.ci harmonik bileşeni arasında enerji transferi meydana gelir. Bu yüzden harmonik rezonansın varolduğu durumda, uniform asimptotik açılımda, ilk mertebe problemde etkileşime girecek olan harmonik terim dahil edilerek incelemeye devam edilmesi gerekir. Bu çalışmada temel dalga ile onun beşinci harmoniğinin etkileşim problemi incelenmektedir. Harmonik rezonans incelemesine uygun şekilde yürütülen asimptotik analiz neticesinde temel dalga ve onun beşinci harmoniğinin etkileşimine ait birinci mertebe yavaş değişen genlik fonksiyonlarının değişimini asimptotik olarak karakterize eden kuple nonlineer Schrödinger (KNLS) denklemi elde edilmiştir.

GİRİŞ

Elastik dalgalar, sismoloji, malzeme yüzeylerinin tahribatsız muayeneleri, elektronik sinyal işleme teknolojisi gibi değişik alanlarda kullanılmaktadır. Homojen, izotrop elastik bir malzemeden oluşan çubuk, plak ve farklı malzemelerden oluşan tabakalı yarım uzay gibi, genel olarak dalga kılavuzları olarak adlandırılan ortamlarda yayılan dalgalar sınır yüzeylerinde oluşan yansımaların etkisi ile dispersif olurlar, yani faz hızları dalga sayısına bağlı olarak değişirler. Hem dispersif, hem de dispersif olmayan lineer elastik dalgalar ile ilgili çeşitli problemler yukarıda belirtilen uygulama alanlarının da etkileri ile 19. yüzyılın ortalarından bugüne kadar pek çok incelemenin konusunu oluşturmuşlar ve oluşturmaya devam etmektedirler [1-10].

Düzgün kalınlıklı, farklı malzeme özelliklerine sahip homojen, izotrop, sıkıştırılabilir ve hiperelastik malzemeden yapılmış bir tabaka ile kaplı yarı sonsuz uzayda SH dalgalarının nonlineer self modülasyonunun asimptotik olarak nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği [4]'de gösterilmiştir. Bu çalışmada incelenen yarı sonsuz uzay modeli için aynı yönde ilerleyen iki SH dalgasının etkileşimleri problemi [5]'de ele alınmış, dalgaların etkileşimi üzerindeki nonlineerlik etkisi incelenmiş ve grup hızı aynı olan dalgaların nonlineer etkileşimlerini karakterize eden kuple NLS denklemi türetilmiştir. [6]'da homojen, izotrop ve sıkıştırılamaz düzgün kalınlıklı bir tabakadan oluşan ortamda nonlineer SH dalgalarının yayılımı ve [7]'de aynı yönde ilerleyen iki SH dalgasının etkileşimi problemi incelenmiştir. [8]' de iki tabakalı elastik bir ortamda nonlineer SH dalgalarının self modülasyonu ele alınmış ve ortamı oluşturan malzemelerin nonlineer özelliklerinin yayılma olayına katkısı gözlemlenmiştir. Farklı nonlineer elastik malzemelerden oluşan tabakalı yarı sonsuz uzayda SH dalgalarının beşinci harmonik rezonans etkileşimi problemi [9]'da incelemiştir. Yapılan çalışma sonucunda, dalgalara ait birinci mertebe yavaş değişen genlik fonksiyonlarının özel halde KNLS denklem sistemine indirgenebileceği gösterilmiştir.

Bu çalışmada ise, daha önceden [8]' de incelenen homojen, sıkıştırılamaz, izotrop elastik malzemelerden oluşan düzgün kalınlıklı iki tabaka ile kaplı elastik bir ortamda yayılan SH dalgaları için temel mod ile onun beşinci harmoniğinin etkileşimi (beşinci harmonik rezonans) problemi ele alınmaktadır. Dalgaların rezonans etkileşimi problemi bir asimptotik pertürbasyon metodu olan değişik ölçekler yöntemi uygulanarak incelenecektir. Yapılan asimptotik inceleme neticesinde, temel dalga (l=1) ile onun beşinci harmoniğinin etkileşimine ait birinci mertebe yavaş değişen genlik fonksiyonlarının değişimlerini asimptotik olarak karakterize eden kuple denklem sisteminin KNLS denklem sistemine indirgenebileceği gösterilmiştir.

PROBLEMİN TANIMI VE TEMEL DENKLEMLER

Üç boyutlu uzayda bir noktanın, aynı dik kartezyen eksen takımına göre uzaysal ve maddesel koordinatları sırası ile (x, y, z) ve (X, Y, Z) sıralı üçlü sayıları ile verilsin.

Başlangıç konumunda,

$$P_1 = \{(X, Y, Z) \mid 0 \le Y \le h_1, -\infty < (X, Z) < \infty\},$$
$$P_2 = \{(X, Y, Z) \mid -h_2 \le Y \le 0, -\infty < (X, Z) < \infty\} \tag{1}$$

bölgesini dolduran ve farklı elastik malzemelerden oluşan düzgün (uniform) kalınlıklı iki tabakadan oluşan bir sürekli ortamı gözönüne alalım. $Y=0$ ara yüzeyi boyunca yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğunu ve $Y = h_1$ ve $Y = -h_2$ serbest yüzeylerinde ise gerilmelerin sıfır olduğunu varsayalım. Böyle bir ortamda X ekseni boyunca yayılan ve Z ekseni boyunca yer değiştiren SH dalgalarını gözönüne alalım. Burada u ve v, sırasıyla P_1 ve P_2 tabakalarındaki noktaların Z yönündeki yer değiştirmelerini göstermektedir. Bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalgaların yayılması problemi inceleneceği için, deformasyon gradyantinde üçüncü dereceden büyük olan terimler ihmal edilerek elde edilen yaklaşık hareket denklemleri ve sınır koşullarından oluşan sınır değer problemi aşağıdaki formda yazılabilir:

$$P_1'de \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right\} = n_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u}{\partial X} Q(u) \right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} Q(u) \right) \right\} \tag{2}$$

$$P_2'de \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right\} = n_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial v}{\partial X} Q(v) \right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial v}{\partial Y} Q(v) \right) \right\} \tag{3}$$

$$Y = h_1'de \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

$$Y = -h_2'de \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

$$Y = 0'da \qquad u = v \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial Y} - \gamma \frac{\partial v}{\partial Y} = \gamma \beta_2 \frac{\partial v}{\partial Y} Q(v) - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial Y} Q(u) \ . \tag{6}$$

c_1 üst tabakada, c_2 ise alt tabakadaki lineer dalgaların yayılma hızını göstermek üzere $c_\nu^2 = \frac{\mu_\nu}{\rho_\nu}$, $\nu = 1,2$ şeklinde tanımlanmaktadır [8]. $\mu_\nu = \frac{2d\Sigma_\nu(3)}{dI}$ olmak üzere, μ_1 ve μ_2 sırasıyla üst ve alt tabakadaki kayma modüllerini, ρ_1 ve ρ_2 ortamı oluşturan malzemelerin yoğunluklarını göstermektedir. n_1 ve n_2 sabitleri ise tabakaları oluşturan malzemelerin nonlineer özellikleri ile ilgili sabitlerdir ve $n_\nu = \frac{2}{\rho_\nu} \frac{d^2\Sigma_\nu}{d^2 I}$ şeklinde tanımlanmaktadırlar [8]. Burada Σ_ν, ortamı oluşturan elastik malzemelerin iç enerji fonksiyonudur ve $\Sigma_\nu = \Sigma_\nu(I)$ yapısındadır ve I, Green deformasyon tensorü $C_{KL} = x_{k,K} x_{k,K}$'nin birinci invaryantını göstermektedir. Bu özelliğe sahip elastik malzemeler, yani iç enerji fonksiyonu sadece Green deformasyon tensörünün birinci invaryantının bir fonksiyonu olarak yazılabiliyor ise bu tip malzemelere neo-Hookean malzeme adı verilmektedir. Bu çalışmada ortamı oluşturan malzemelerin neo Hookean malzemeden oluştuğu kabul edilmektedir. Ayrıca $n_\nu > 0$ ise malzeme kaymada sertleşen, $n_\nu < 0$ ise kaymada yumuşayan özelliğe sahiptir [8]. γ lineer, β_1 ve β_2 nonlineer elastik sabitleri ise sırasıyla $\gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, $\beta_\nu = \frac{n_\nu}{c_\nu^2}$ şeklinde tanımlanmaktadır.

SH DALGALARININ BEŞİNCİ HARMONİK REZONANS ETKİLEŞİMİ

Bir kritik dalga sayısı k_c ve ona karşı gelen açısal frekans w_c çifti ile, (mk_c, mw_c) $m \in \{3,5,7,9,...\}$ çiftleri aynı anda dispersiyon bağıntısını sağlarsa temel modla onun m. harmoniği birbirleri ile etkileşir, yani m.harmonik rezonans oluşur. Harmonik rezonansta, etkileşen dalgaların faz hızları aynı olduğundan, lineer dispersiyon bağıntısı yardımıyla harmonik rezonansın hangi dalga sayılarında ortaya çıkacağı incelenebilir. İki tabakalı elastik bir ortamda yayılan nonlineer SH dalgalarına ait dispersiyon bağıntısı aşağıdaki gibidir [8]:

$$p_1 \tan(kh_1 p_1) - \gamma v_2 \tanh(kh_2 v_2) = 0, \quad p_1^{\,2} = \left(c^2 / c_1^2 - 1\right), \quad v_2^{\,2} = \left(1 - c^2 / c_2^2\right) \tag{7}$$

Burada, $c_1 < c_2$ kabulu altında c, SH dalgalarının faz hızını, c_1 ve c_2 sırasıyla üst tabakada ve alt tabakadaki lineer kayma dalgalarının yayılma hızlarını göstermek üzere, $c_1 < c \le c_2$ eşitsizliğinin geçerli olduğu kabul edilmektedir.

Öncelikle beşinci harmonik rezonansın oluşması için gerekli olan (k, w) ve $(5k, 5w)$ çiftlerinin aynı anda dispersiyon bağıntısını sağlaması koşulu ve (7) denkleminde yer alan periyodik fonksiyon gözönünde bulundurulursa, boyutsuz değişkenler ve sabitler kullanılarak (7)'de verilen dispersiyon bağıntısı yeni boyutsuz değişkenler tanımlanarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\tan\frac{n\pi}{4} = \frac{\gamma\sqrt{1 - C^2 M^2}}{\sqrt{C^2 - 1}} \tanh(KH\sqrt{1 - M^2 C^2}) \quad . \tag{8}$$

$C = \dfrac{c}{c_1}$ dalgaların boyutsuz faz hızını ve $K = \dfrac{n\pi}{4\sqrt{C^2 - 1}}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) ise boyutsuz dalga sayısını göstermektedir. Ayrıca $M = \dfrac{c_1}{c_2}$, $H = \dfrac{h_2}{h_1}$ şeklinde tanımlanmışlardır. Şimdi, (8) de verilen dispersiyon bağıntısını inceleyelim:

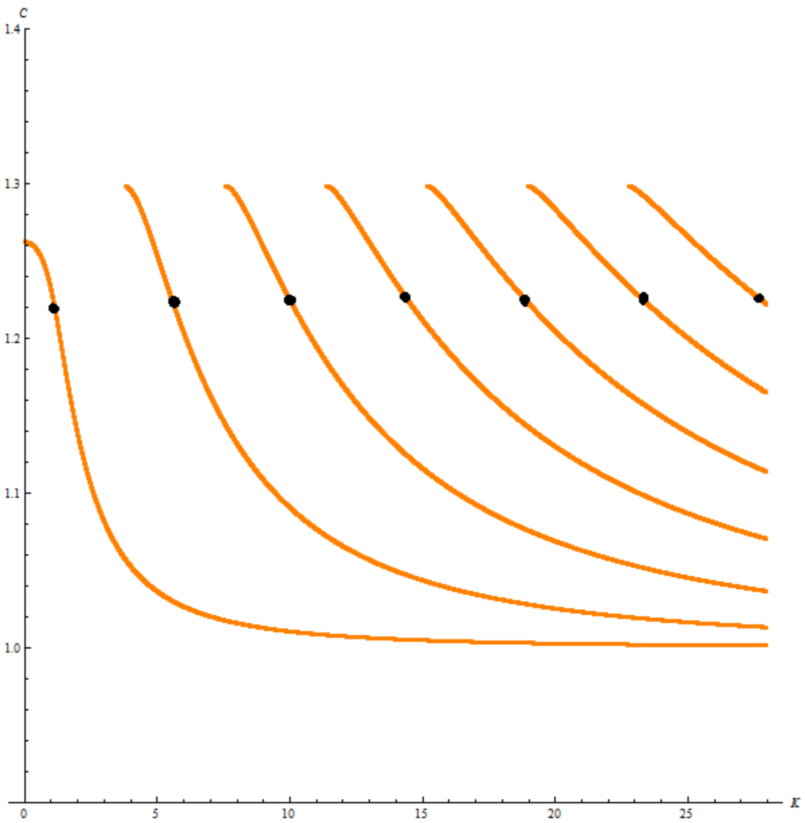
a) $n = 2, 6, 10, \ldots (2 + 4r)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ için $\tan(\frac{n\pi}{4}) = \tan(\frac{(2r+1)\pi}{2}) \to \infty$ olur ve tanh fonksiyonunun sınırlı olduğu gözönüne alınırsa $C^2 - 1 = 0$, $C = 1$, buradan $c \to c_1$ elde edilir. Yani, bu halde temel dalga ile onun beşinci harmoniğinin etkileşimi $n = 2, 6, 10, \ldots (2 + 4r)$ için $c \to c_1$ olduğunda ortaya çıkmaktadır.

b) $n = 4, 8, \ldots (4r)$, $(r = 1, 2, \ldots)$ için $\tan(\frac{n\pi}{4}) = \tan(r\pi) = 0$ olur. Bu durumda (8) de verilen dispersiyon bağıntısından, $1 - C^2 M^2 = 0$, $C = 1/M$, yani $c = c_2$ elde edilir ve beşinci harmonik rezonans $c = c_2$ olduğunda ortaya çıkmaktadır.

c) $n = 1, 5, 9, \ldots (1 + 4r)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ için $\tan\frac{n\pi}{4} = 1$ olur. Bu durumda (8) dispersiyon bağıntısı

$$\frac{\sqrt{C^2 - 1}}{\gamma\sqrt{1 - M^2 C^2}} = \tanh\left(\frac{(1 + 4r)\pi}{4\sqrt{C^2 - 1}} H\sqrt{1 - M^2 C^2}\right) \tag{9}$$

halini alır. Yani temel dalga ile onun beşinci harmoniğinin arasındaki etkileşim $c \to c_1$, $c = c_2$ ve (9)' da verilen bağıntıyı sağlayan (k, c) çiftlerinde ortaya çıkmaktadır. Şekil 1'de (7) ile verilen dispersiyon bağıntısınının ilk yedi dalı çizdirilmiştir. Burada malzeme modeli olarak $\rho_2 / \rho_1 = 1{,}28007$, $\gamma = 2{,}159$ seçilmiştir. Seçilen malzeme modeli için (9) bağıntısını sağlayan, beşinci harmonik rezonans etkileşiminin ortaya çıktığı (K,C) noktaları da Şekil 1'de verilmektedir.



Şekil 1. Beşinci harmonik rezonansın ortaya çıktığı (9) denklemini sağlayan (K,C) noktaları. Malzeme modeli olarak $\rho_2 / \rho_1 = 1,28007$, $\gamma = 2,159$ seçilmiştir.

Temel Dalga İle Beşinci Harmoniğinin Etkileşimi

İki tabakalı elastik bir ortamda pozitif X ekseni boyunca yayılan ve Z ekseni boyunca yer değiştiren küçük ama sonlu genlikli nonlineer SH dalgalarının harmonik rezonans etkileşimi problemi, asimptotik bir pertürbasyon metodu olan değişik ölçekler metodu kullanılarak incelenecektir.

Bu amaçla, $\varepsilon > 0$ nonlineerliğin mertebesini gösteren küçük bir parametre olmak üzere, X, Y, t bağımsız değişkenleri yerine aşağıdaki yeni değişkenler tanımlanır:

$$x_i = \varepsilon^i X \ , \quad t_i = \varepsilon^i t \ , \quad y = Y \ , \ i = 0,1,2 \ . \tag{10}$$

Burada (x_0, t_0, y) değişkenleri problemdeki hızlı değişimleri ve (x_1, x_2, t_1, t_2) değişkenleri ise yavaş değişimleri karakterize eden değişkenlerdir. Ayrıca eski ve yeni değişkenlere göre türev operatörleri arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\frac{\partial}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial x_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_2},\quad \frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2},\quad \frac{\partial}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial y}. \tag{11}$$

Tabakalara ait yer değiştirme fonksiyonlarının, u ve v, ε cinsinden uniform geçerli açılıma sahip olduğu varsayılmaktadır [11];

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n u_n(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2),\quad v=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n v_n(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2)\ . \tag{12}$$

İlk olarak, (2)-(3) de verilen hareket denklemleri ve (4)-(6) ile verilen sınır koşulları (10)' da verilen bu yeni değişkenler cinsinden yazılır ve daha sonrasında da (12)' de verilen asimptotik açılımlar kullanılırsa, ε'nun aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek u_n' lerin ve v_n' lerin ardışık olarak hesaplanabileceği bir problemler hiyerarjisi elde edilir. Bu tip asimptotik analizde her bir mertebe pertürbasyon problemi lineer olmaktadır ve birinci mertebe problem tabakalı elastik ortamdaki klasik lineer problem ile eş yapıdadır. Sadece lineer problemde u ve v yer değiştirme fonksiyonları (X,Y,t) değişkenlerine bağlı iken ε mertebesindeki problemde u_1 ve v_1 yer değiştirme fonksiyonları $(x_0,x_1,x_2,y,t_0,t_1,t_2)$ değişkenlerine bağlıdır ve ε mertebesindeki problem çözülerek u_1 ve v_1'in (x_0,t_0,y) hızlı değişkenlerine bağlılığı açık olarak hesaplanabilecektir. Bu çalışmada dalgaların faz hızı için $c_1<c\le c_2$ eşitsizliğinin sağlandığı kabulu altında inceleme yürütülecektir.

Burada, temel dalga ile onun beşinci harmoniğinin etkleşimi problemi incelenecektir. Yani, (k,w) ve $(5k,5w)$ çiftleri aynı anda dispersiyon bağıntısını sağlayacaklardır. Temel dalganın dalga sayısına $k_1=k$ ve açısal frekansına $w_1=w$ dersek ve $k_5=5k$ ve $w_5=5w$ ile gösterirsek, birinci mertebe pertürbasyon probleminin çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} u_1 &= (\mathrm{A}_1^{(1)}(x_1,x_2,t_1,t_2)(e^{ik_1p_1y}\mathrm{R}_1^{(1)}+e^{-ik_1p_1y}\mathrm{R}_2^{(1)})e^{i(k_1x_0-w_1t_0)}\\ &\quad +(\mathrm{A}_1^{(5)}(x_1,x_2,t_1,t_2)(e^{ik_5p_1y}\mathrm{R}_1^{(5)}+e^{-ik_5p_1y}\mathrm{R}_2^{(5)})e^{i(k_5x_0-w_5t_0)}+k.e.\\ v_1 &= (\mathrm{A}_1^{(1)}(x_1,x_2,t_1,t_2)(e^{-k_1v_2y}\mathrm{R}_3^{(1)}+e^{k_1v_2y}\mathrm{R}_4^{(1)})e^{i(k_1x_0-w_1t_0)}\\ &\quad +(\mathrm{A}_1^{(5)}(x_1,x_2,t_1,t_2)(e^{-k_5v_2y}\mathrm{R}_3^{(5)}+e^{k_5v_2y}\mathrm{R}_4^{(5)})e^{i(k_5x_0-w_5t_0)}+k.e.\end{aligned} \tag{13}$$

Burada, $p_1=\left(c^2/c_1^2-1\right)^{1/2}$, $v_2=\left(1-c^2/c_2^2\right)^{1/2}$, $\phi_m=k_mx_0-w_mt_0$ ve $\mathrm{R}_1^{(m)},\mathrm{R}_2^{(m)},\mathrm{R}_3^{(m)}$ ve $\mathrm{R}_4^{(m)}$ $(m=1,5)$ aşağıdaki şekilde elde edilmişlerdir:

$$(\mathrm{R}^{(m)})=(S_me^{-ik_mp_1h_1-k_mv_2h_2},S_me^{ik_mp_1h_1-k_mv_2h_2},e^{-2k_mv_2h_2},1)^T,\quad S_m=\frac{\cosh(k_mh_2v_2)}{\cos(k_mh_1p_1)} \tag{14}$$

$\mathrm{A}_1^{(1)}$ ve $\mathrm{A}_1^{(5)}$ sırasıyla temel mod $(l=1)$ ve onun beşinci harmoniğinin yavaş değişen kompleks genlik fonksiyonlarıdır. Ayrıca "$k.e.$" ise önceki terimlerin kompleks eşleniğini göstermektedir. Dikkat edilirse, birinci mertebe yavaş değişen kompleks genlik fonksiyonları $\mathrm{A}_1^{(1)}$ ve $\mathrm{A}_1^{(5)}$' nin açık olarak hesaplanması, birinci mertebe problemin çözümü için yeterli olacaktır. $\mathrm{A}_1^{(1)}$ ve $\mathrm{A}_1^{(5)}$' yi açık olarak hesaplayabilmek için ikinci ve üçüncü mertebe problemin de incelenmesi gerekmektedir. İkinci mertebe problemin uygunluk koşulundan

$$\frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial t_1}+V_g^{(1)}\frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial x_1}=0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial A_1^{(5)}}{\partial t_1}+V_g^{(5)}\frac{\partial A_1^{(5)}}{\partial x_1}=0\ , \quad V_g^{(l)}=\frac{dw_l}{dk_l}\ ,\ (l=1,5) \qquad (15)$$

olduğu görülür. Bu ise $A_1^{(1)}$ ve $A_1^{(5)}$ genlik fonksiyonlarının sırasıyla $V_g^{(1)}$ grup hızı ve $V_g^{(5)}$ grup hızı ile ilerleyen bir referans çerçevesinde sabit kaldıklarını gösterir. Üçüncü mertebe problemin uygunluk koşulundan ise aşağıdaki denklemler sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial A^{(1)}}{\partial \tau}+\Gamma^{(1)}\frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial \xi^2}+\Delta^{(11)}\left|A^{(1)}\right|^2 A^{(1)}+\Delta^{(51)}\left|A^{(5)}\right|^2 A^{(1)}=0 \\ & i\frac{\partial A^{(5)}}{\partial \tau}+i\Lambda\frac{\partial A^{(5)}}{\partial \xi}+\Gamma^{(5)}\frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial \xi^2}+\Delta^{(55)}\left|A^{(5)}\right|^2 A^{(5)}+\Delta^{(15)}\left|A^{(1)}\right|^2 A^{(5)}=0 \end{aligned} \qquad (16)$$

Burada,

$$\tau=w_c t_2, \quad \xi=k_c(x_1-V_g^{(1)}t_1), \quad A^{(\alpha)}=k_c A_1^{(\alpha)}, \quad \Lambda=\frac{k_c}{\varepsilon w_c}(V_g^{(5)}-V_g^{(1)}) \qquad (17)$$

dır. $\Gamma^{(1)}$ ve $\Gamma^{(5)}$ katsayıları lineer dispersiyon katsayılarıdır. $\Delta^{(11)}$ ve $\Delta^{(55)}$ katsayıları ise temel dalga ve onun beşinci harmoniğinin self modülasyonlarını tanımlayan nonlineer katsayılardır. $\Delta^{(15)}$ ve $\Delta^{(51)}$ katsayıları ise temel ve beşinci harmoniğin birbirleri ile etkileşen terimlerini gösteren katsayılardır. Dikkat edilirse, (16)' da $\Lambda=V_g^{(5)}-V_g^{(1)}=0$ olarak alınırsa yani temel dalganın grup hızı ile onun beşinci harmoniğinin grup hızı birbirlerine eşit olursa, (16) denklem sistemi kuple nonlineer Schrödinger denklem (KNLS) sistemi haline dönüşür. KNLS denklem sisteminin analitik ve nümerik çözümlerinin incelenmesi üzerine literatürde bir çok çalışma mevcuttur, daha ayrıntılı bilgi için [1,4,5,6] numaralı kaynaklara ve bu kaynaklarda adı geçen çalışmalara da bakılabilir. Ayrıca, $A^{(5)}=0$ kabulu yapılırsa (16) denklem sistemi, iki tabakalı elastik ortamda yayılan ve $A^{(1)}$ genliğine sahip SH dalgasının modülasyonunu karakterize eden bir NLS denklemine indirgenmiş olur [8]:

$$i\frac{\partial A^{(1)}}{\partial \tau}+\Gamma^{(1)}\frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial \xi^2}+\Delta^{(11)}\left|A^{(1)}\right|^2 A^{(1)}=0\,. \qquad (18)$$

SONUÇLAR

Bu çalışmada farklı elastik özelliklere sahip düzgün kalınlıklı iki tabakadan oluşan bir ortamda nonlineer SH dalgalarının yayılması problem ele elınmıştır. Ortamda yayılan dalgaların faz hızları c, üst tabakaya ait lineer dalgaların faz hızı c_1, alt tabakaya ait olan ise c_2 olmak üzere $c_1 < c \le c_2$ kabulu altında temel dalga ile onun beşinci harmoniği etkileşimi incelenmiştir. Bu inceleme için bir asimptotik pertürbasyon metodu olan değişik ölçekler metodu kullanılmıştır.

Öncelikli olarak lineer dalgalara ait dispersiyon bağıntısından yararlanılarak hangi dalga sayılarında harmonik rezonansın ortaya çıkacağı araştırılmış, özel halde temel dalga ile onun beşinci harmoniğinin etkileşiminin ortaya çıktığı boyutsuz dalga sayıları ve faz hızları (K,C) belirlenmiştir. Daha sonra nonlineer SH dalgalarının beşinci harmonik rezonans etkileşimi incelenmiş ve temel dalga ile onun beşinci harmoniğinin genliklerinin sağladığı denklemler sistemi elde edilmiştir. Ayrıca temel dalga paketi ile beşinci harmoniğinin grup hızlarının aynı olması durumunda bu etkileşimin bir kuple nonlineer Schrödinger denklem sistemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] W.M. Ewing, W.S. Jardesky and F. Press, *Elastic Waves in Layered Media*, Mc Graw-Hill, 1957.

[2] J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, NortHolland Publishing Co.,1973.

[3] K. F. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids*, Clarendon Press, 1975.

[4] M. Teymur, Nonlinear modulation of Love waves in a compressible hyperelastic layered half space : *Int. J. Engng. Sci.*, 1998: s. 907–927.

[5] M.Teymur, Nonlinear interaction of two co-directional surface SH waves in a layered half-space : *16th International Symposium on Nonlinear Acoustics* , Moscow, Russia, 2002: s. 69–72.

[6] S. Ahmetolan, M. Teymur, Nonlinear modulation of SH waves in an incompressible hyperelastic plate : *ZAMP*, 2007: s. 457–474.

[7] E. Akman, S. Ahmetolan, Nonlinear interaction of two co-directional SH waves in a plate : *8th European Solid Mechanics Conference*, Graz, Austria, 2012.

[8] S. Ahmetolan, M. Teymur, Nonlinear modulation of SH waves in a two layered plate and formation of surface SH waves: *Int. J. Nonlinear Mechanics*, 2003: s. 1237–1250.

[9] M. Teymur, Nonlinear modulation and the fifth harmonic resonance of Love waves on a neo-Hookean layered half space *in Nonlinear Wave Motion*, 1989: s. 205–228.

[10] A.P.Mayer, Surface acoustic waves in nonlinear elastic media, *Phys. Rep.* 1995: s.237.

[11] A. Jeffrey, T. Kawahara, *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory*, Pitman, Boston, 1982.