



SICAKLIĞA BAĞIMLI MALZEME ÖZELLİKLERİNİN DÖNEN BİR DISKİN TİTREŞİM DAVRANIŞLARINA ETKİSİ

Ersin Demir¹

¹Pamukkale Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi, Mekatronik Mühendisliği Bölümü, Denizli

ABSTRACT

In this study, a numerical investigation is performed on vibration behavior of a rotating disc with temperature dependent material properties. The vibration behavior of a rotating disc with temperature independent material properties is also investigated for comparison. Finite element based SolidWorks program was used for modeling and analysis in the study. The disc material is defined as a new material in the program due to the material properties depend on the temperature. In the analysis, two types of boundary conditions are used. The first one is clamped-free and the second is clamped-simply supported. Moreover, two different angular velocity are used: 400 rad/s and 1800 rad/s and the temperature is changed from 22°C to 600°C. According to the results, it is obtained that the natural frequency of the disc with temperature dependent material properties is higher than one with temperature independent material properties especially between 200°C and 500°C.

ÖZET

Bu çalışmada, sıcaklığa bağımlı malzeme özelliklerine sahip dönen bir diskin titreşim davranışları sayısal olarak incelenmiştir. Sıcaklıktan bağımsız malzeme özelliklerine sahip dönen bir diskin titreşim davranışları da karşılaştırma için incelenmiştir. Çalışmada modelleme ve analiz için Sonlu elemanlar tabanlı SolidWorks programı kullanılmıştır. Malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı olduğundan, disk malzemesi programda yeni bir malzeme olarak tanımlanmıştır. Analizde iki tip sınır şartı kullanılmıştır. Bunlardan birincisi ankastre-serbest ve ikincisi de ankastre-basit mesnettir. Bundan başka, 400 rad/s ve 1800 rad/s olmak üzere iki farklı açısal hız kullanılmış ve sıcaklık 22°C ile 600°C arasında değiştirilmiştir. Sonuçlara göre sıcaklığa bağlı malzeme özelliklerine sahip diskin doğal frekansı sıcaklıktan bağımsız olana göre özellikle 200°C ile 500°C aralığında daha yüksek elde edilmiştir.

GİRİŞ

Bilindiği üzere endüstride disk yapılar oldukça yaygın bir şekilde kullanılmaktadır (Daire testere, fren diskleri vb.). Kullanılan bu disklerin bir kısmı belirli bir sıcaklık altında çalışmaktadır veya çalışırken ısınmaktadır. Dolayısıyla disklerin dinamik ve termal analizleri üzerine çalışmalar yapılmaktadır [1-3].

Endüstrideki mühendislik uygulamalarında kullanılan yapı elemanlarının mekanik özelliklerinin, sıcaklığın değişmesiyle değiştiği bilinmektedir. Ancak yapıların statik veya dinamik davranışları incelenirken genellikle oda sıcaklığındaki mekanik özellikleri kullanılmakta ve dolayısıyla genellikle mekanik özelliklerin sıcaklıkla değişimi göz ardı edilmektedir. Hâlbuki ele alınan yapının mekanik özelliklerinin sıcaklıkla değişmesi neticesinde farklı sıcaklık ortamlarında doğal frekans, kritik burkulma yükü vb. statik veya dinamik yapı davranışları da değişmektedir. Bu yüzden sıcaklığa bağlı malzeme

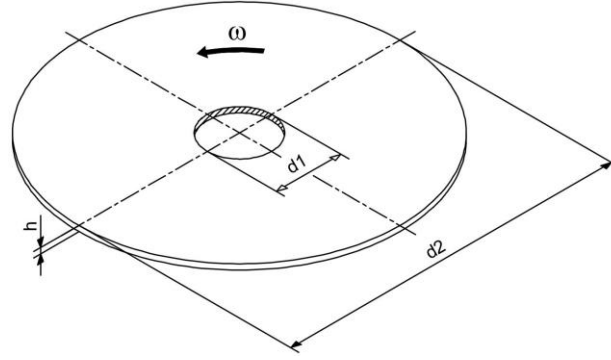
özelliklerinin, yapıların dinamik davranışlarına etkisi merak konusu olmuştur. Bu konuda yapılan bazı çalışmalar aşağıda sıralanmıştır.

Kim [4], termal çevre koşullarındaki fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen şeklindeki plakların titreşim karakteristikleri için teorik bir metot geliştirmiştir. Kim yaptığı çalışmada plak yüzeyinde sıcaklığın sabit kaldığı ve sadece kalınlık boyunca değiştiğini varsaymıştır. Ayrıca plağın malzeme özelliklerinin sıcaklıkla değiştiğini de varsaymıştır. Çalışma sonucunda malzeme kompozisyonunun, plak geometrisinin, sıcaklık alanının titreşim karakteristiğine etkisini incelemiştir. Malekzadeh [5], fonksiyonel derecelendirilmiş halka şeklindeki disk parçasının serbest titreşimini termal çevre koşullarında incelemiştir. Malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağımlı ve disk kalınlığı boyunca değiştiği varsayılmıştır. Çözümde Diferansiyel Quadrature Metot kullanılmıştır. Çalışma sonucunda sıcaklık, malzeme ve geometri parametrelerinin doğal frekansa etkileri incelenmiştir. Lim vd. [6] fonksiyonel derecelendirilmiş halka şeklindeki disk parçasının sıcaklığa bağımlı titreşimini araştırmışlardır. Analizlerinde sıcaklığa bağımlı efektif malzeme özelliklerini Mori-Tanaka modelini esas alarak kullanmışlardır. Çalışmalarının sonucunda malzeme değişim indisi, sıcaklık ve geometrik parametrelerin titreşim frekansına etkilerini değerlendirmişlerdir. Mahi vd. [7], fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedan yapılmış bir kirişin serbest titreşiminin kesin çözümünü sunmuşlardır. Çalışmada malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağımlı olduğu ve kiriş kalınlığı boyunca üç farklı dağılım yöntemiyle değiştiği varsayılmıştır. Çalışmada serbest titreşim frekansları farklı sınır şartları için sisteme ait adi diferansiyel denklemin analitik olarak çözülmesiyle elde edilmiştir. Attia vd. [8], çalışmalarında sıcaklığa bağımlı fonksiyonel derecelendirilmiş plakların titreşim analizi için dört farklı plak teorisi kullanmışlardır. Ele alınan plağın basit mesnet sınır şartları ile desteklenmiş olduğu varsayılmıştır. Ayrıca sabit, doğrusal değişen, doğrusal olmayan biçimde değişen ve sinüzoidal değişen termal şartların plağın üst ve alt yüzeyinden uygulandığı varsayılmıştır. Çalışma neticesinde ele alınan teorilerin sıcaklık bağımlı fonksiyonel dereceli plakların serbest titreşim cevaplarının hesabında kolay ve doğru sonuç verdiği bulunmuştur. Ebrahimi ve Jafari [9], fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko kirişinin, termal çevre koşullarında termo-mekanik titreşim analizini farklı sınır koşulları için, yarı analitik diferansiyel dönüşüm metodunu ve bir Navier tip çözüm metodunu kullanarak yapmışlardır. Kirişin malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı olarak alınmıştır. Termal yük, sabit ve doğrusal olarak kiriş kalınlığı boyunca uygulanmıştır. Analizde kirişi oluşturan malzemenin hacim oranının ve dağılımının yanında termal ve sınır şartlarının doğal frekansa etkileri incelenmiştir. Dong ve Li [10], termal yük altında sıcaklığa bağımlı fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen plağın eğilme, burkulma ve titreşiminin doğrusal olmayan analitik çözümünü sunmuşlardır. Çalışmada malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı olarak alınmıştır. Çalışma sonucunda malzeme dağılımının, termal yükün, plak geometrisinin, plağın eğilme, burkulma ve titreşimine etkileri sunulmuştur.

Bu çalışmada ise, malzeme özellikleri sıcaklığa bağımlı olarak değişen dönen bir diskin titreşim davranışları, sonlu elemanlar tabanlı sayısal çözümleme yapan bir program vasıtasıyla elde edilmiştir.

MODELLEME

Aşağıda gösterildiği gibi analizde kullanılan disk, endüstride oldukça yaygın kullanılan ortası delikli disk olarak ele alınmıştır. Diskin dış çapı $d_2=300$ mm, iç çapı $d_1=60$ mm ve kalınlığı da $h=10$ mm olarak hesaba katılmıştır. Bahsi geçen diskin $\omega=400$ rad/s ve $\omega=1800$ rad/s olmak üzere iki ayrı sabit açısız hız ile döndüğü varsayılmış ve analizde iki tip sınır şartı ele alınmıştır.



Şekil 1. Dönen disk

Bunlardan birincisinde, bir mil üzerine sıkı geçme yapıldığı düşünüldüğünden, iç deliğe ankastre sınır şartı uygulanmış ve örneğin balataların diske temas etmediği düşünüldüğünde, dış delik ise serbest bırakılmıştır. İkincisinde ise yine iç deliğe ankastre sınır şartı uygulanırken, dış deliğe balataların diske temas ettiği düşünüldüğünden, basit mesnet sınır şartı uygulanmıştır. Bu çalışmada birinci sınır şartı A-S, ikinci sınır şartı ise A-B olarak gösterilmiştir.

MEKANİK ÖZELLİKLER

Dönen diskin titreşim davranışı incelenirken, gerçek duruma uygun olması açısından disk malzemesinin mekanik özelliklerinin sıcaklıkla değiştiği varsayılmıştır. Elde edilen veriler, mekanik özellikleri sıcaklıkla değişmeyen diskten elde edilen veriler ile kıyaslanmıştır.

Shen, malzemenin mekanik özelliklerinin sıcaklığa bağlı olarak değişimini, belirli katsayılara ve sıcaklığa bağlı olarak formülleştirmiştir [11]. Ayrıca bir örnek olarak AISI 304 paslanmaz çeliği için formülde geçen katsayıları da vermiştir. Bu yüzden bu çalışmada disk malzemesi olarak AISI 304 paslanmaz çeliği kullanılmıştır.

Elastisite modülü (E), Poisson oranı (ν), termal genleşme katsayısı (α), termal iletkenlik (κ) sıcaklığa bağımlı olarak aşağıdaki formülle verilmiştir.

$$P_j = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (1)$$

Burada P_j malzeme özelliğini, T , °C olarak sıcaklığı, $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$ ise malzeme özelliği ile değişen katsayıları göstermektedir. Bu katsayılar AISI 304 paslanmaz çeliği için aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 1. Malzeme özelliklerine bağlı katsayılar [11]

	E [Pa]	ν	α [K^{-1}]	κ [$W mK^{-1}$]
P_0	201.04e+9	0.3262	12.330e-6	15.379
P_{-1}	0	0	0	0
P_1	3.079e-4	-2.002e-4	8.086e-4	-1.264e-3
P_2	-6.534e-7	3.797e-7	0	2.092e-6
P_3	0	0	0	-7.223e-10

Yukarıda verilen mekanik özelliklerin yanı sıra titreşim hesaplarında malzeme yoğunluğu da kullanılmaktadır. Yoğunluğun sıcaklıkla değişimi çok az olmakla beraber aşağıdaki formülle verilmiştir[12].

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \alpha \cdot \Delta T} \quad (2)$$

Burada ρ_0 malzemenin oda sıcaklığındaki yoğunluğu, Δt ise sıcaklık farkıdır.

Ele alınan malzemenin yedi sıcaklık değeri için mekanik özellikleri yukarıdaki formüller ve tablolardan elde edilmiştir. Bu yedi sıcaklık değeri 22, 100, 200, 300, 400, 500 ve 600°C değerleridir. Bu değerlere göre mekanik özelliklerdeki değişim aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 2. AISI 304 paslanmaz çeliği için sıcaklığa bağımlı mekanik özellikler

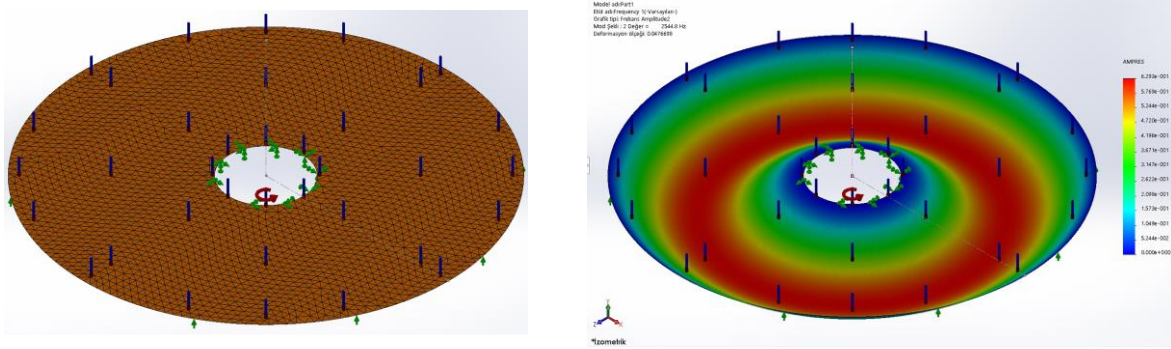
T [°C]	E [MPa]	ν	α [K ⁻¹]	κ [W mK ⁻¹]	ρ [kg/m ³]
22	202338.23	0.3248	1.25E-05	15000.00	7799.80
100	205916.43	0.3209	1.33E-05	13700.00	7791.69
200	208165.66	0.3181	1.43E-05	12689.24	7779.94
300	207787.71	0.3178	1.53E-05	12142.92	7766.68
400	204782.56	0.3199	1.63E-05	12040.11	7751.93
500	199150.22	0.3245	1.73E-05	12314.16	7735.71
600	190890.70	0.3316	1.83E-05	12898.42	7718.03

Tablo incelendiğinde sıcaklığın artması ile elastisite modülünün önce yükseldiği sonra düştüğü, Poisson oranının bunun aksine önce düştüğü sonra yükseldiği, termal genleşme katsayısının düzgün bir şekilde yükseldiği, termal iletkenliğin önce düştüğü daha sonra biraz yükseldiği ve yoğunluğun ise düştüğü görülmektedir. Elastisite modülü ve Poisson oranı değerleri incelendiğinde yükselme veya düşme eğiliminin yaklaşık 300°C civarlarında değiştiği görülmektedir. Termal iletkenlik değerleri incelendiğinde ise bu dönüm noktasının 400-500°C civarlarına kaydığı görülmektedir.

SAYISAL TİTREŞİM ANALİZİ

Dönen diskin titreşim analizi için Sonlu Elemanlar Metodunu esas alan, Solidworks® (SolidWorks Corp., USA) programı kullanılmıştır. Solidworks® programı hem modelleme yapabile hem de içerisindeki simülasyon modülü ile farklı analizleri yapabilme özelliğine sahip bir programdır. Öncelikle diskin iki boyutlu tel kafes modeli, ölçülerine uygun olarak programın çizim modülünde çizilmiştir. Daha sonra çizilen tel kafes modelinin sınır çizgilerinden yüzey tanımlaması yapılmıştır. Bundan sonra programın simülasyon modülü çalıştırılmıştır. Simülasyon ortamında diskin titreşim analizini yapmadan önce bazı tanımlamaların yapılması gerekmektedir. Önce diskin malzemesi programa tanımlanmıştır. Daha önce bahsedildiği üzere bu malzeme AISI 304 paslanmaz çeliğidir. Ancak bunun için programda hazır olarak tanımlanmış çelik malzeme kullanılmamış, bunun yerine özel malzeme tanımlanmıştır. Malzemenin özel olarak tanımlanmasının nedeni adı geçen çelik malzemenin özelliklerinin sıcaklıkla Çizelge 2’de verildiği şekilde değişmesidir. Programa çizelge olarak bu değerler tanımlandığında program tarafından her bir özellik için ayrı ayrı eğriler oluşturulmuştur. Dolayısıyla program verilen sıcaklık değerlerinin dışında ara sıcaklık değerleri için de çözüm yapabilmektedir. Bundan sonra çizilen modelin kabuk (shell) elemanı olduğu tanımlanarak plağın kalınlığı tanımlanmıştır. Sınır şartlarının tanımlanmasında ise, ankastre sınır şartları için diskin iç delik çevresinin ankastre sınır şartından dolayı dönmesine ve çökmesine müsaade edilmemiştir. Dış delik çevresinin sınır şartlarında ise, serbest sınır şartı için herhangi bir işlem yapılmamış, basit mesnet sınır şartı için sadece z yönündeki çökmeye müsaade edilmemiştir. Ayrıca programın harici yük bölümünden sabit sıcaklık [°C] ve açısal hız değerlerinin [rad/s] girilmesiyle, diskin sıcaklığı ve dönme hızı tanımlanmıştır. Daha sonra ağ yapı (mesh) oluşturulmuştur. Ağ yapı işlemi neticesinde örnek olarak 600°C’de 1800 rad/s açısal hızla dönen ankastre-basit mesnet sınır şartlarına sahip disk için 10334 düğüm ve 5058 eleman elde edilmiştir. Son olarak program çalıştırılarak sonuçlar elde

edilmiştir. Aşağıdaki şekilde örnek olarak adı geçen diskin ağ yapı oluşturulmuş görüntüsü ve analiz sonrası görüntüsü Şekil 2-a ve 2-b’de gösterilmiştir.



a) Ağ yapı oluşturulmuş disk

b) Analiz sonrası disk

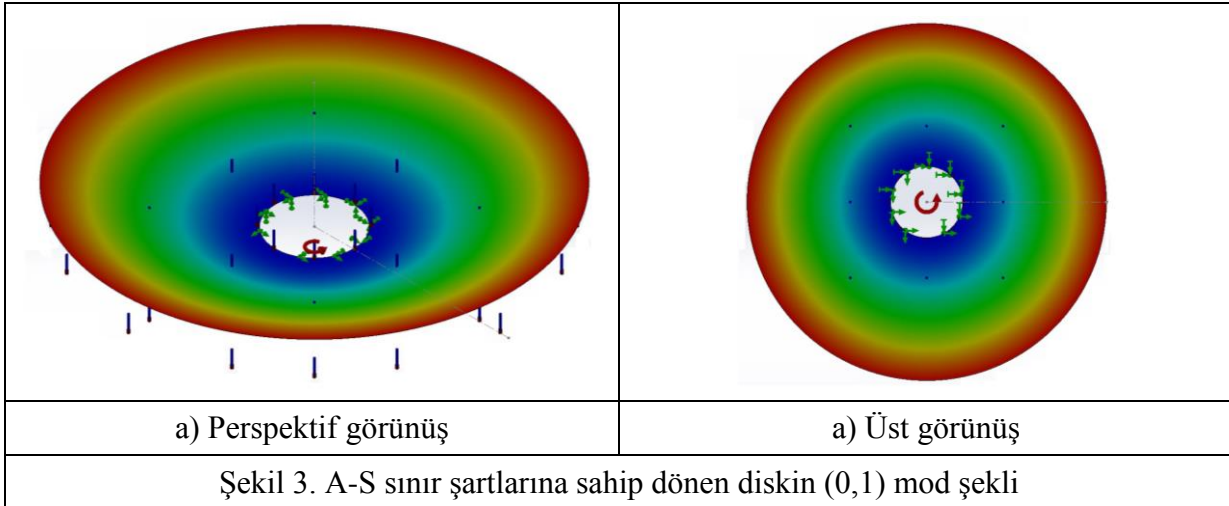
Şekil 2. A-B sınır şartlarına sahip dönen diskin analizi

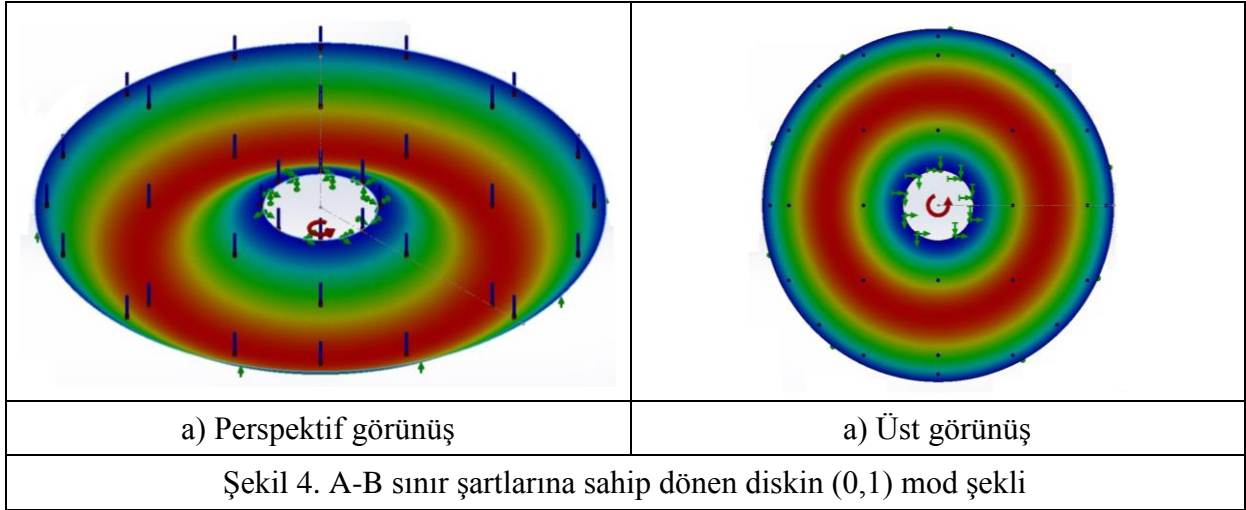
DEĞERLENDİRME

Mekanik özellikleri sıcaklıkla değişen ve değişmeyen, farklı sıcaklık ortamlarında dönen diskin, Solidworks® programı ile analizi yapılmış ve mod şekilleri ile sıcaklığın, devir sayısının ve sınır koşulların etkileri elde edilmiştir. Mod şekilleri ve elde edilen bu etkiler aşağıda değerlendirilmiştir.

Mod Şekilleri

Disk yapıların serbest titreşimi incelendiğinde, simetrik ve asimetrik olmak üzere iki tip mod şeklinin olduğu görülür. Simetrik ve asimetrik mod şekilleri, düğüm çapı (m) ve düğüm dairesi (n) olarak tanımlanan iki katsayının aldığı değerlere göre belirlenir. Düğüm çapı değerinin sıfır olduğu tüm mod şekilleri simetrik mod şekilleri iken sıfır olmadığı diğer mod şekilleri ise asimetrik mod şekilleridir. Burada düğüm çapı değerleri 0,1,2,... gibi değerler alırken düğüm dairesi değerleri 1,2,... gibi değerler alır. Mod şekli gösterimi Mod(m,n) şeklindedir.

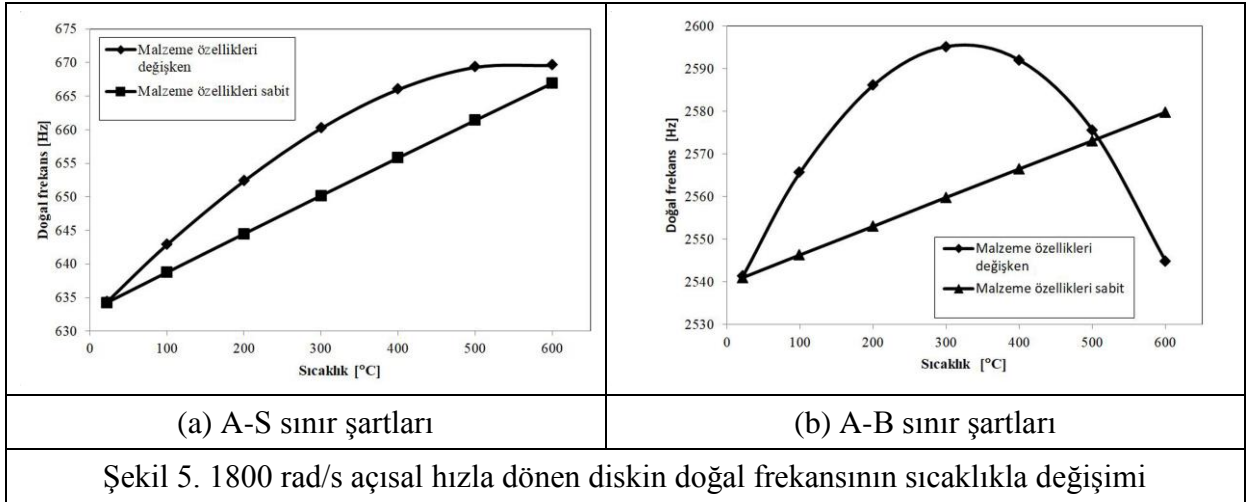




Bu çalışmada sadece simetrik mod şekillerinden birincileri, yani Mod(0,1) şekilleri ele alınmıştır. Aşağıda gösterilen Şekil 3 ve Şekil 4’de sırasıyla, A-S ve A-B sınır koşullarına sahip 1800 rad/s hızla dönen 600°C altındaki disklerin perspektif ve üst görünüşleri verilmiştir. Şekil 3’de, diskin sadece iç dairesinden tutulduğundan huni şeklinde bir yapı ortaya çıkmıştır. Şekil 4’de ise diskin hem iç hem de dış dairelerden tutulduğundan şekil değişimi bu bölgelerde olmamıştır.

Malzeme ve Sıcaklığın Etkisi

Aşağıdaki şekilde, malzeme özellikleri 22°C’den 600°C’ye kadar Çizelge 2’de verilen şekilde değişen, 1800 rad/s hızla dönen diskin doğal frekansları ile malzeme özellikleri 22°C’deki değerleri sabit olarak alınmış, 1800 rad/s açısal hızla dönen diskin doğal frekansları ile kıyaslanmıştır.

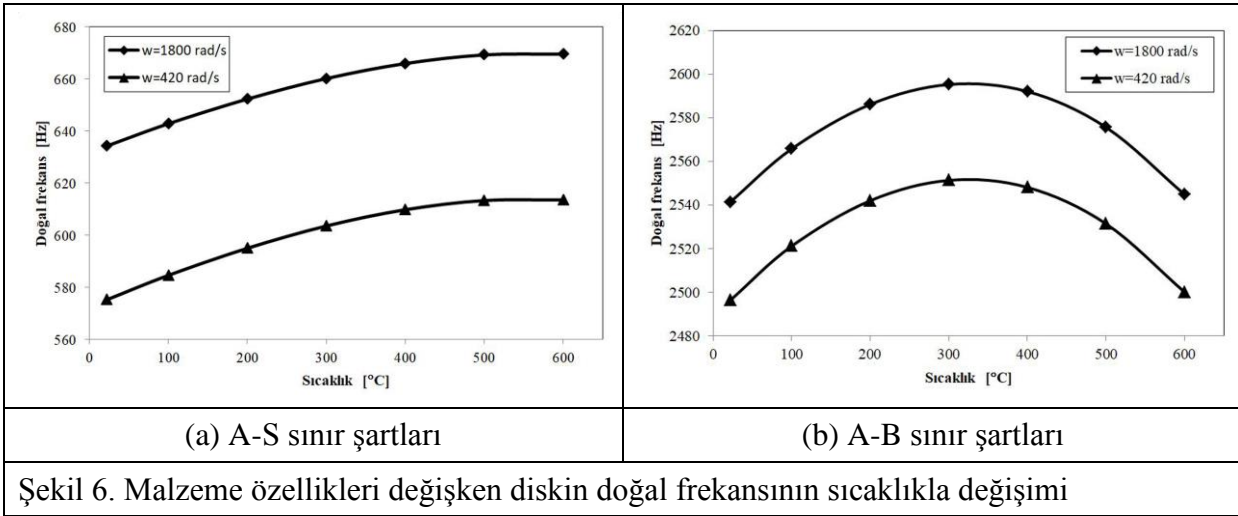


Şekil 5(a)’da, malzeme özellikleri değişken A-S diski dikkate alındığında doğal frekansın sıcaklıkla beraber arttığı, ancak bu artış oranının sıcaklığın artmasıyla azaldığı görülmektedir. Hatta 500°C’deki doğal frekans değeri, 600°C’deki ile neredeyse aynıdır. Bunun yanında malzeme özellikleri sabit olan disk ele alındığında ise doğal frekansın sıcaklıkla düzgün bir şekilde arttığı görülmektedir. İki grafik beraber incelendiğinde oda sıcaklığındaki ve 600°C civarındaki doğal frekansların birbirine yaklaştığı buna karşın, hususan 300-400°C civarında bu farkın büyük olduğu gözlemlenmektedir. Dolayısıyla yüksek sıcaklıklarda çalışacak bir diskin doğal frekans hesabında, malzeme özelliklerinin oda sıcaklığındaki değerlerinin alınması sonuçların hatalı çıkmasına sebep olacaktır.

Şekil 5(b)'de ise A-B sınır şartlarına sahip malzeme özellikleri değişken dönen diskin doğal frekansındaki değişimi gösterilmiştir. A-S sınır şartlarına sahip diskten farklı olarak, A-B sınır şartlarına sahip diskte malzeme özelliklerinin sabit veya değişken alınması, doğal frekans değişiminde oldukça farklı bir eğri eğiliminin çıkmasına sebep olmuştur. Değişken malzeme özelliklerine sahip diskin doğal frekansı yaklaşık 300°C'ye kadar artarken, daha sonra düşmüştür. Hâlbuki malzeme özellikleri sabit olan diskin doğal frekans değerleri sıcaklığın artmasıyla beraber doğrusal olarak artmıştır. İki eğrinin oda sıcaklığında ve yaklaşık 500°C civarında yakınlığı görülmüştür. Diskin 600°C'deki doğal frekansının neredeyse oda sıcaklığındaki değere geri döndüğü görülmüştür.

Devir Sayısı ve Sıcaklığın Etkisi

Malzeme özellikleri sıcaklıkla değişen diskin, 1800 ve 420 rad/s sabit açısal hızla dönmesi durumunda, doğal frekans değerlerinin sıcaklıkla değişimi Şekil 6'da gösterilmiştir.

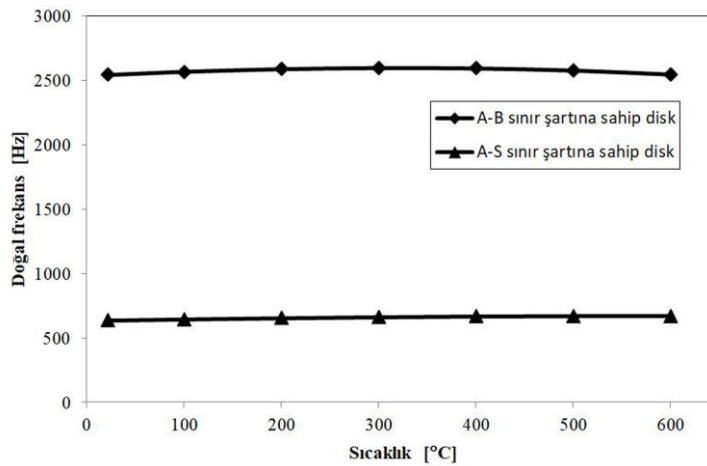


Şekil 6. Malzeme özellikleri değişken diskin doğal frekansının sıcaklıkla değişimi

Şekil 6 (a) ve (b) incelendiğinde devir sayısındaki artışın doğal frekansını artırdığı açık bir şekilde görülmektedir. Ancak eğri eğiliminde herhangi bir değişim olmamıştır. Şekil 6 (a)'da doğal frekans değerleri önce artmış ancak daha sonra artış oranı azalmıştır. Şekil 6 (b)'de ise doğal frekans değerleri önce artmış daha sonra azalmıştır.

Sınır Şartları ve Sıcaklığın Etkisi

Malzeme özellikleri değişken, 1800 rad/s sabit açısal hızla dönen diskin, A-S ve A-B sınır şartları için doğal frekansındaki değişim aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 7. 1800 rad/s açısal hızla dönen diskin doğal frekansının sıcaklıkla değişimi

Yukarıdaki şekilden A-B sınır şartına sahip diskin doğal frekansının, A-S sınır şartına sahip diskten oldukça yüksek olduğu görülmektedir. Yani dönen diskin dış çevresinin düşey ekseninde hareketine müsaade edilmemesi, doğal frekansını ciddi oranda yükseltmiştir.

SONUÇLAR

Yapılan analizler neticesinde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- Yüksek sıcaklıklarda çalışan bir diskin titreşim analizi yapılırken, mekanik özelliklerinin sıcaklıkla değişimi dikkate alınmalıdır.
- Mekanik özellikleri sıcaklıkla değişen dönen A-S sınır şartlarına sahip bir diskin sıcaklığının artması, diskin doğal frekans değerini artırır. Ancak bu artış yaklaşık 500°C'den sonra oldukça yavaşlamaktadır. A-B sınır şartlarına sahip diskte ise 300°C'ye kadar artar daha sonra ise düşer.
- Diskin dönme hızının artması doğal frekansını artırır. Ancak bu artış, diskin sıcaklık-doğal frekans değişim eğrisinin eğilimini etkilemez.
- A-B sınır şartlarına sahip diskin doğal frekansını A-S sınır şartlarına sahip olandan daha yüksektir.

KAYNAKLAR

- [1] H. Çallıoğlu, E. Demir, M. Sayer, Thermal stress analysis of functionally graded rotating discs, *Scientific Research and Essays*. 6(16) (2011) 3437–3446.
- [2] H. Çallıoğlu, E. Demir, Y. Yılmaz, Z. Girgin, Vibration behavior of a radially functionally graded annular disc with variable geometry, *Science and Engineering of Composite Materials*. 21(3) (2014) 453–461.
- [3] E. Demir, H. Çallıoğlu, M. Sayer, Elasto-plastic thermal stress analysis of functionally graded hyperbolic discs, *Structural Engineering and Mechanics*. 62(5) (2017) 587–593.
- [4] Y.W. Kim, Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*. 284(3-5) (2005) 531-549.
- [5] P. Malekzadeh, Two-dimensional in-plane free vibrations of functionally graded circular arches with temperature-dependent properties, *Composite Structures*. 91(1) (2009) 38-47.
- [6] C. W. Lim, Q. Yang, C.F. Lue, Two-dimensional elasticity solutions for temperature-dependent in-plane vibration of FGM circular arches, *Composite Structures*. 90(3) (2009) 323-329.
- [7] A. Mahi, E.A.A. Bedia, A. Tounsi, I. Mechab, An analytical method for temperature-dependent free vibration analysis of functionally graded beams with general boundary conditions, *Composite Structures*. 92(8) (2010) 1877-1887.
- [8] A. Attia, A. Tounsi, E.A.A. Bedia, S.R. Mahmoud, Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories, *Steel and Composite Structures*. 18(1) (2015) 187-212.
- [9] F. Ebrahimi, A. Jafari, Thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent porous FG beams based on Timoshenko beam theory, *Structural Engineering and Mechanics*. 59(2) (2016) 343-371.
- [10] Y.H. Dong, Y.H. Li, A unified nonlinear analytical solution of bending, buckling and vibration for the temperature-dependent FG rectangular plates subjected to thermal load, *Composite Structures*. 159 (2017) 689-701.

- [11] H.S. Shen, *Functionally Graded Materials Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, CRC Press, Boca Raton, 2009.
- [12] <https://en.wikipedia.org/wiki/Density> (ulařım Temmuz 14, 2017).