# Yapı Sistemlerinde Belirsizliklerin Aralık (Interval) Değerlerle Tanımlanması

**Ayşe ERDÖLEN**
Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul, erdolen@yildiz.edu.tr

**ÖZET**

Bu çalışmada, mühendislik sistemlerindeki olası hatalarından ve/veya sıcaklık değişimlerinden oluşabilecek belirsizlikler üzerinde durulmuştur. Kiriş sistem durumunda, İnterval Sonlu Eleman formülasyonu lineer interval denklemlerden oluşmaktadır. Sonuçlar örnek problem de gösterilmiştir.

**ABSTRACT**

In this work, uncertainty due to errors and/or thermal changes in engineering systems is addressed. In the case of elastic beam systems the Interval Finite Element formulation leads to a linear interval system of equations with interval right hand side. Results are illustrated in example problem.

## 1-GİRİŞ

Mühendislik problemlerindeki belirsizliklerin kaynaklarını genel olarak; model ve modelin içerdiği parametreler, problemin çözüm hedeflerine ulaşılması sırasında algoritma işlem satırlarından kaynaklanan sayısal hatalar ve sistemin durumuna göre inşa veya imalat aşamasında oluşacak kusur ve toleranslar olarak sıralayabiliriz. Söz konusu belirsizlikler genellikle olasılık teorisi ve istatistiksel yöntemler yardımıyla göz önüne alınmakta, belirsizlikler altında ortaya çıkacak başarısızlıklar (risk) ise güvenirlik analizi yardımıyla belirlenmektedir[1]. Dolayısıyla, yüksek derecede belirsizlik gösteren (karmaşık) mühendislik problemlerinin çözümünde belirsizliklerin azaltılmasına ve değerlendirilmesine yönelik klasik yaklaşımlar, çoğunlukla daha karmaşık ve zaman-maliyet açısından ekonomik olmayan çözümlere neden olabilmektedir [1].

Mühendislik planlaması ve tasarımı evrelerinde karşılaşılan sorunlar bir belirsizlik ortamında çözülür. Belirsizlik, bu süreçlerin gerçekleşmesi için gerekli olan çoğu bilginin hiç ya da eksiksiz elde edilememesinden ve niteliğinden kaynaklanabilir. Ayrıca mühendislik problemleri çoğu zaman rasgele karakterde yapıya sahip fiziksel süreçleri ve olguları içerir. Bu belirsizlikler nedeniyle bir mühendislik planlamasında ve tasarımında yapılan kabullerin ve varsayımların, verilen kararların tümüyle güvenli olmaması, hatalı olması ve çözümleme sonuçlarının gerçeği doğru yansıtmaması ihtimali her zaman vardır. Şu halde planlama ve tasarım yapan bir mühendis, bu etkenlere ilişkin tam ve kesin bilgilere hiçbir zaman ulaşamayacağını, dolayısıyla bilinmeyen sonucun önceden kesinlikle belirlenemeyeceğini algılamış olmalıdır[2].

Yapısal sistemlerin tasarımı; gerçeğin hedeflendiği betimlemelere sahip limit durum denklemleri, algoritmalar, bilgisayar benzeşim programları gibi matematiksel modellere ya da benzeşim modellerine dayanılarak yapılır. Bu teorik modeller, deneysel ve/veya teorik araştırmalar sonucu geliştirilen ve gerçeği olabildiğince doğru yansıtan karmaşık (kompleks, sofistike) modellerin mühendislik hayal gücü, sezgisi ve deneyimi ile, dolayısıyla öznel (subjektif) değerlendirmeler ve kabullerle basitleştirilmesi sonucu oluşturulur [2].

Tasarım yapılırken matematiksel kolaylıklar sağlamak için bir takım basitleştirmeler yapılır. Örneğin; zamanla ve mekanla değişen yükler eşdeğer uniform statik yüke dönüştürülür, üç boyutlu yapı iki boyutluymuş gibi çözümlenir, birleşimlerin rijit, mesnetlerin tam ankastre olduğu varsayılır, parametreler arasındaki korelasyon (istatistiksel ilişki) ihmal edilir ve kimi parametreler hesaba katılmaz, malzemenin doğrusal (lineer) olmayan davranışı doğrusal varsayılır, zamana bağlı etkiler göz önüne alınmaz. Bu bakımdan yapısal sistemlerin tasarımında kullanılan hesap modelleri, araştırma modellerinin yetkinliğine, idealleştirmenin ve basitleştirmenin doğruluk derecesine ve kapsamına göre gerçeği yakından yansıtabilir ya da yansıtmayabilir. Araştırma modellerinin yetkinliği ise, sağlanabilen bilgilerin güvenirliğine ve bu bilgilere ne ölçüde güvenilebileceğine bağlıdır. Güvenilirliğini, modelin sınanabilirliği ve test edilebilirliği belirler. Test edilebilirlik, modele ilişkin bilgilerin doğrulanabilirliği deneylerin tekrarlanabilirlik derecesiyle ölçülür [2].

Buraya kadar yapılan açıklamalar; bir hesap modelinde, içerdiği değişkenler bir an için deterministik değişken kabul edilse bile her zaman bir belirsizlik olduğunu göstermektedir. Bu belirsizlik, hesap modeli belirsizliği terimiyle adlandırılır. Öte yandan, araştırma ve hesap modellerinin içerdiği parametreler genellikle rasgele değişkendir. Belirli değerler alabilmeleri ya da belirli aralıklarda değer alabilmeleri yalnızca, belirli olasılıklarla ifade edilebilen istatistiksel, stokastik büyüklüklerdir. Örnek; olarak tasarım temel değişkenleri olan yükler, malzeme mukavemetleri, boyutlar verilebilir[2].

Hesap modeli ve stokastik model belirsizlikleri çeşitli yöntemlerle kısmen ya da tamamen ortadan kaldırılabilir. Fakat tasarım temel değişkenlerinin yapısında var olan rasgelelikten kaynaklanan belirsizlikler her zaman kalıcıdır, yok edilemez. Bu yüzden yapıların mukavemeti ve güvenilirliği rasgele olgulardır [2].

Bireysel parametrelerin varyasyonuna etkisinin küçük olması halinde boyut hataları, hesap ya da yapım hataları gibi model belirsizliği kabul edilebilir. Büyük ölçüde insani hatalardan kaynaklanan risk, tasarımda öngörülen koşulların bütünüyle değişmesine yol açar[2].

Bütün bunlara ilaveten, inşa edilen yapı elemanlarının boyutlandırmada öngörülen seviyeden daha düşük mukavemete sahip olması ihtimali de mevcuttur. Dolayısıyla, kabul edilen toleranslar içinde kalsa bile yapı elemanlarının boyutlandırmada göz önünde tutulan boyutlarından sapmalar, boyutlandırmada varsayılan eleman mukavemetlerinin altında bir değere sahip olmalarına sebep olurlar. Örneğin, boyutlandırma hesaplarında göz önünde tutulan çelik malzeme, bulon ve kaynak mukavemetlerinde gerçekte sapmalar meydana gelebilir. Çelik profiller, minimum saptanmış olan seviyenin altında, ancak istatistik olarak kabul edilebilir limitler içinde akma sınırına sahip olabilir [3]. Mühendislik uygulamalarında, bu tür bir imali sapma tekil elemanlar veya montaj sonrası tamamlanmış sistem için maksimum izin verilebilir tolerans sınırları içinde kalacak şekilde tanımlanır. Dolayısıyla en uygun tasarım, üzerinde çalışılan bir sistemin geometrik elemanlarının geometrilerinin tümünün tolerans sınırları içinde tanımlanmış olacak şekilde, 'toplam toleranslı' bir tasarım olmalıdır [4].

Belirsizliğin temel nedenlerinden biri olan toleranslar, daha yüksek performans, daha yüksek verimlilik ve daha büyük güvenilirlik için, analiz ve tasarım aşamalarında, sonucu (ürünü) etkileyebilecek tüm muhtemel faktörler için dikkate alınmalıdır. Toleranslar, genellikle, tanımlanan değerlerden toplam sapma olarak tanımlandığından dolayı, bir analiz ve tasarımda, sınır değerleri belirli olarak verilen aralıktaki olası bir değer gibi bir toleransı kapsamak, bu tür belirsizlikleri tanımlamanın gerçekçi ya da doğal bir yolu olabilir.

Kesin (belli) bir büyüklük sayısal olarak ifade edilebilen, bilinen bir değere sahiptir. Belirsiz bir değer tanımlanırken, bir tanım aralığı bu sayısal ifadenin yerini alır. Aralık değerler (interval), belirsiz bir değer olan x 'i, $1 \leq x \leq 2$ olduğu yerde, alt sınır olarak 1 ve üst sınır olarak 2 ile tanım aralığı olarak [1, 2] şeklinde ifade eder. Aralık değerlerle işlemler sayısal uygulamalarda klasik matematiksel işlemlerle uyumlu olarak kullanılır. Algoritmanın her işleminde bir sayının alabileceği en küçük ve en büyük değerlerini kullanma esasına dayanan ***aralık (interval) analizi yöntemi***, sınırın alt ve üst değerleri olarak, anlamlı gerçek sayı dizilerinin sınır değerlere yaklaşarak sıfır hata fikrine yakınsaması olarak tanımlanabilir. Aralık değerleri, belirsizliği sayısal sınırlarla modelleyen deterministik bir yöntem olarak da tanımlayabiliriz.

Aralık analizin ilk somut uygulamaları yirmili yıllara kadar uzanmaktadır [5, 6, 7]. Günümüz uygulamalarına en büyük katkıyı kuşkusuz; Ramon E. Moore yapmıştır [8, 9].

## 2-ARALIK DEĞERLER

Çalışmanın tümünde, kalın karakter olarak yazılanlar, aralık değerlerin sayı, vektör ve matris şeklinde gösterimidir. Normal karakter olarak yazılanlar gerçek (kesin) miktarları belirtmektedir.

**R** gerçel sayılar kümesi olmak üzere bir aralık değerler kümesi

$$\boldsymbol{x} \equiv [a,b] = \{\tilde{x} \in \mathbf{R} \mid a \leq \tilde{x} \leq b\} \tag{1}$$

olarak tanımlanabilir. Bu bağıntıda; $a$ ve $b$ **R** gerçel kümesinin elemanları olup her koşulda $a \leq b$ şartı sağlanmalıdır. Aralık değerler, **R** gerçel kümesinin $a \equiv \inf(\boldsymbol{x})$ alt ve $b \equiv \text{sub}(\boldsymbol{x})$ üst sınırlarında bir alt kümesini oluşturmaktadır. Bundan sonra aralıkların ait olduğu sayılar kümesi **IR** olarak sembolize edilecektir. "~" sembolü aralık değerler kümesinde yer alan sayıların her birinin gösterimi için kullanılacaktır ($\tilde{x} \in \boldsymbol{x}$). Eğer bir aralığın alt ve üst sınırları birbirine eşit ise $a$=$b$ böyle aralıklar ince aralıklardır ve tek bir gerçek sayıyı ifade eder. Böyle bir aralık değeri $x=[a,a]$ şeklinde gösterilir.

**Aralık değerler işlem operatörleri**

Matematikte kullanılan; toplama, çıkarma, çarpma ve bölme $\circ\in\{+,-,\times,/\}$ işlem operatörlerinin tümü aralık değerler analizinde kullanılmaktadır. $x=[a,b]$ ve $y=[c,d]$ iki aralık değeri, $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ söz konusu aralıklarda ki herhangi iki değer olmak üzere;

$$x\circ y=\{\tilde{x}\circ\tilde{y}\ \mid a\leq\tilde{x}\leq b,\ c\leq\tilde{y}\leq d\} \qquad (2)$$

tanımı geçerlidir. $y$ aralık değerinin sınır değerlerinden birinin 0 olması durumunda $x/y$ eşitliğinin gerçekleşmeyeceği açıktır.
Aralık sınırlarını dikkate alınarak temel işlemler olan toplama, çıkarma, çarpma ve bölme için şu kurallar yazılabilir;

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d] \qquad (3)$$

$$[a,b]-[c,d]=[a-d,b-c]\ . \qquad (4)$$

Çarpma ve bölme için sonuçlar aralık sınırlarının işaretlerine bağlıdır. $x=[a,b]$ ve $y=[c,d]$ iki aralık değer olmak üzere $x$ ve $y$ aralık değerlerinin çarpımı için ($xy$);

$$[a,b]\times[c,d]=[\min(ac,ad,bc,bd),\max(ac,ad,bc,bd)]\ , \qquad (5)$$

$x$ ve $y$ aralıklarının bölümü için ($x/y$);

$$[a,b]/[c,d]=[\min(a/c,a/d,b/c,b/d),\max(a/c,a/d,b/c,b/d)]\quad 0\notin y \qquad (6)$$

kuralları yazılabilir. Aralık değerlerle ilgili değişme, birleşme gibi işlemsel özelliklerin toplama, çıkarma, bölme ve de çarpma üzerine uygulamaları, 1 ve 0 sayılarının etkileri aşağıda örneklendiği şekilde kullanılmaktadır ($x$, $y$, $z$ iki sınır değer arasında tanımlanmış aralık değerlerdir);

$x+y=y+x$ $\qquad$ $x\,y=y\,x$

$(x+y)\pm z=x+(y\pm z)$ $\qquad$ $(x\,y)z=x\,(y\,z)$

$x-(y\pm z)=(x-y)\pm z$ $\qquad$ $(-x)(-y)=x\,y$

$x(y\pm z)\subseteq xy\pm xz$

$x-y\subseteq(x+z)-(y+z)$ $\qquad$ $x/y\subseteq(xz)/(yz)$

$0\in x-x$ $\qquad$ $1\in x/x$

$-(x-y)=y-x$ $\qquad$ $x(-y)=(-x)\,y=-x\,y$

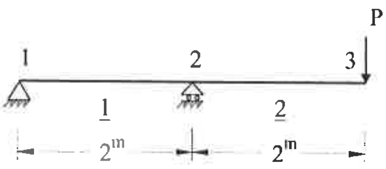
$x+0=0+x=x$

$1\times x=x\times 1$

## 3-ÖRNEK

Şekil 1'de verilen 2 elemanlı, 3 düğüm noktalı kirişin sayısal çözümü verilmiştir. Çalışmada sayısal çözümleme yöntemi olarak sonlu elemanlar yöntemi, aralık değerlerle ilgili matematiksel işlemler için Matlab programlama ortamı kullanılmıştır. Bu çalışmada yük belirsizliği olarak düşünülen 3 düğümüne etkiyen tekil kuvvet; $\underline{P}$=5 kN alt sınır ve $\overline{P}$=5.5

kN üst sınır olmak üzere iki sınır değer arasında tanımlanan $P$ =[5, 5.5] aralık (interval) değer olarak tanımlanmıştır. $EI$ eğilme rijitlikleri her iki eleman için sabittir. Tüm düğüm noktaları yer değiştirmelerinin değerleri alt ve üst sınırlar halinde aralık değerler olarak Tablo 1'de verilmiştir. Maksimum duyarlılık gerektiren uygulamalarda aralık değerler gerçek değeri içeren bir çözüm aralığına olanak sağlamaktadır. Böylelikle hata kaynağına bakılmaksızın doğru sonucun içeriği garanti edilmektedir. Örnek problemde yük belirsizliği yerine boyutsal toleransları kapsayan geometrik belirsizlik ya da malzeme belirsizliği de kullanılabilir.




**Şekil 1:** 2 Elemanlı Çıkmalı Kiriş

| *D. Nok.* | *v.EI* | ***θ**.EI* |
|---|---|---|
| 1 | [0,0] | [3.333333333333325,3.666666666666675] |
| 2 | [0,0] | [-7.333333333333349,-6.66666666666665] |
| 3 | [-29.33333333333339,-26.6666666666666] | [-18.33333333333337,-16.66666666666662] |

**Tablo 1.** İki Elemanlı Kirişin Düğüm Noktalarının Yatay ve Düşey Yer değiştirmeleri

**Kaynaklar:**

[1] Koç, M. L., Balas, C. E., ve Arslan, A., Taş Dolgu Dalgakıranların Yapay Sinir Ağları ile Ön Tasarımı, İMO Teknik Dergi, 3351-3375, 2004.

[2] Gündüz, A., Mühendislikte Olasılık, İstatistik, Risk ve Güvenirlik, İstanbul, 1996.

[3] Deren, H., Uzgider, E., Piroğlu, F., Çağlayan, Ö., Çelik Yapılar, İstanbul, 2008.

[4] Henzold, Georg, Handbook of Geometrical Tolerancing, Design, Munufacturing and Inspection. John Wiley & Sons Ltd., England, 1995.

[5] Burkil, J. C., Functions of İntervals, Proceedings of the London Mathematical Society, 22, 375-446, 1924.

[6] Young, R. C., The Algebra of Many-Valued Quantities, Mathematische Annalen, 104, 260-290, 1931.

[7] Sunaga, T., Theory of an Interval Algebra and its Application to Numerical Analysis, in RAAG Memoirs, Gaukutsu Bunkwen Fukeyu-kai, Tokyo, 29-46, 1958.

[8] Moore, R. E., Interval Analysis, Prentice Hall, New Jersey, 1966.

[9] Moore, R. E., Methods and Applications of Interval Analysis, SIAM, Philadelphia, 1979., 1985.