

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ İÇİ DOLU DÖNEN BİR DİSKİN ELASTİK ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

Tunç Apatay*, Müfit Gülgeç*, Ahmet N. Eraslan**

*Makina Mühendisliği Bölümü
Mühendislik-Mimarlık Fakültesi
Gazi Üniversitesi, 06570 Ankara
tapatay@gazi.edu.tr, mgulgec@gazi.edu.tr

**Mühendislik Bilimleri Bölümü
Mühendislik Fakültesi
Orta Doğu Teknik Üniversitesi, 06531 Ankara
aderaslan@metu.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden (FDM) yapılmış elastik, dönen içi dolu disk probleminin düzlem gerilme durumu için analitik çözümü elde edilmiştir. Disk malzemesinin elastisite modülü, kütle yoğunluğu ve Poisson oranının disk içinde lineer olarak değiştiği kabul edilmiştir. Akma kriteri olarak von Mises akma kriteri esas alınmıştır. Herbir parametrenin, gerilme ve plastik akma limiti üzerindeki etkileri incelenmiştir.

ABSTRACT

In this study, plane stress analytical solution to elastic functionally graded (FGM) rotating solid disk problem is obtained. The modulus of elasticity, the mass density and the Poisson's ratio of the disk material are assumed to vary linearly in the disk. The analysis is based on von Mises yield criterion. The effect of each of the material properties on the stress response as well as on the yielding of the disk is investigated.

1.GİRİŞ

Mühendislik uygulamalarında kullanılan makinaların büyük bir bölümünün yapısında yüksek hızlarda dönen elemanlar bulunmaktadır [1, 2]. Bu makinalara örnek olarak, turbo makinalar, güç istasyonları, gaz türbinleri, kesici takımlar, medikal aletler gösterilebilir. Yaygın kullanım nedeniyle, dönen disklerde meydana gelen gerilme ve yer değiştirmelerin belirlenmesi, hem endüstriyel hem de bilimsel olarak önemli bir konudur.

Döner disk probleminin en temel hali içi dolu diskdir. Pratikte uygulaması olmamasına rağmen diğer disk problemleri için temel oluşturduğundan literatürde önemli bir yer tutar. Sabit kalınlıklı içi dolu bir diskin ilk doğru elastoplastik çözümü 1984 yılında Gamer [3, 4] tarafından elde edilmiştir. Bu çözüm, düzlem gerilme varsayımına dayalıdır ve elastik-plastik deformasyon için lineer birim şekil değiştirme pekleşmesi ve Tresca akma kriteri esas alınmıştır. Bu çalışmadan yola çıkılarak değişken kalınlıklı ve farklı sınır şartlarındaki diskler üzerine bir çok araştırma yapılmıştır [5-9]. Son yıllarda malzeme özelliklerinin eleman içerisinde değiştirilebildiği üretim yöntemlerinin geliştirilmesi ile döner diskler üzerine yapılan çalışmalar yeni bir boyut kazanmıştır. Değişken elastisite modülüne sahip içi dolu döner diskin ilk elastik çözümü Horgan ve Chan [10] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada diskin yoğunluğu ve kalınlığı sabit olarak alınmıştır, elastisite modülünün değişimi ise $E(r) = E_0 (r/b)^n$ şeklinde tanımlanmıştır. Burada E_0 elastisite modülünün referans değerini, r radyal koordinatı, n malzeme parametresini, b ise diskin çapını ifade etmektedir. Ancak bu tanımlama içi dolu disk için anlamlı değildir, çünkü disk merkezi $r=0$ da, $E=0$ olmaktadır. Bu nedenle yazarlar gerilme ve deformasyonlar için disk merkezinde fiziksel olarak anlamlı sonuçlar elde edememişlerdir. Literatürde homojen olmayan malzemelerden yapılmış disklerle ilgili diğer bazı çalışmalar, Güven [11], Durodola ve Attia [12], Eraslan ve Akış [13] tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmalar homojen olmayan malzemeden yapılmış disklerin mekanik dayanımının homojen disklere göre daha fazla olabileceğini göstermektedir.

Bu çalışmanın amacı, malzeme özellikleri radyal koordinatın fonksiyonu olarak değişen içi dolu elastik disklerin analitik çözümünü türeterek, malzeme parametrelerinin elastik limit açılmal hız ile gerilme ve yer değiştirme dağılımları üzerine etkilerini incelemektir. Bu amaçla malzeme özelliklerinin radyal koordinatın fonksiyonu olarak, $E(r) = E_0(1 + E_1r)$, $\nu(r) = \nu_0(1 + \nu_1r)$ ve $\rho(r) = \rho_0(1 + \rho_1r)$ şeklinde değiştiği sabit kalınlıklı içi dolu döner bir disk göz önüne alınmıştır. Burada; ν_0, ρ_0 sırasıyla diskin merkezindeki ($r=0$) Poisson oranını, yoğunluğu, E_1, ν_1 ve ρ_1 ise radyal koordinat boyunca değişimi belirleyen parametrelerdir. Bu ifadelerin boyutsuz formları ise $E = 1 + E_1r$, $\rho = 1 + \rho_1r$ ve $\nu = \nu_0(1 + \nu_1r)$ şeklindedir.

2. TEMEL DENKLEMLER

Bilinen avantajları nedeniyle temel denklemler boyutsuz büyüklükler cinsinden yazılmıştır. Bu boyutsuz büyüklükler, radyal koordinat: $\bar{r} = r/b$, normal gerilme bileşenleri: $\bar{\sigma}_i = \sigma_i/\sigma_0$, akma gerilmesi: $\bar{\sigma}_Y = \sigma_Y/\sigma_0$, birim şekil değiştirme bileşenleri: $\bar{\epsilon}_i = \epsilon_i E_0/\sigma_0$, radyal

yerdeğiştirme: $\bar{u} = uE_0/b\sigma_0$, elastisite modülü: $\bar{E} = E(r)/E_0$, boyutsuz açısai hız: $\Omega = (\rho_0\omega^2b^2/\sigma_0)^{1/2}$, kütle yoğunluğu: $\bar{\rho} = \rho(r)/\rho_0$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu ifadelerde, σ_0 malzemenin disk merkezi $r=0$ 'daki akma limiti değeri, ω ise açısai hızdır. Aşağıdaki denklemlerde, daha sade bir notasyon kullanmak için boyutsuz sembollerin üzerindeki çizgiler kaldırılmıştır.

Disk kalınlığının yarıçapa oranla küçük olduğu kabulüyle simetri eksenini doğrultusundaki gerilme bileşeni, σ_z , ihmal edilerek problem düzlem gerilme durumuna indirgenebilir. Böylece sadece radyal doğrultudaki kuvvetlerin dengesinden disk için hareket denklemi;

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + \rho\Omega^2r^2 = 0 \quad (1)$$

ve uygunluk denklemi $\varepsilon_r = d(r\varepsilon_\theta)/dr$ şeklinindedir [1]. Elastik birim şekil değiştirme kısmının Hooke kanunu yardımı ile yerine yazılmasıyla yerdeğiştirme ve gerilmeler arasındaki ilişki;

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu\sigma_\theta] = \frac{u}{r} \quad (2)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu\sigma_r] = \frac{du}{dr} \quad (3)$$

şeklinde yazılabilir.

3. ELASTİK ÇÖZÜM

(2) ve (3) ile verilen yerdeğiştirme-gerilme bağıntılarından σ_r ve σ_θ ifadeleri

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\nu u(r)}{r} + u'(r) \right], \quad (4)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{u(r)}{r} + \nu u'(r) \right] \quad (5)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadelerin (1) ile verilen hareket denkleminde yerlerine yazılmasıyla

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{E} \frac{dE}{dr} + \frac{2\nu}{1-\nu^2} \frac{d\nu}{dr} \right] - \frac{u}{r^2} \left[1 - r\nu \frac{1}{E} \frac{dE}{dr} - \frac{r(1+\nu^2)}{1-\nu^2} \frac{d\nu}{dr} \right] = - \frac{\Omega^2 r(1-\nu^2)\rho}{E} \quad (6)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözüümü,

$$u(r) = C_1P(r) + C_2Q(r) + R(r) \quad (7)$$

şeklindedir. Burada $R(r)$ özel çözümdür, homojen çözümü oluşturan $P(r)$ ve $Q(r)$ terimleri Mapple [15] yazılımı yardımıyla seri çözüm metoduyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$P(r) = r \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i r^i \right] \quad (8)$$

$$Q(r) = Q_1(r) + Q_2(r) \quad (9)$$

Bu ifadelerde;

$$Q_1(r) = -\frac{\ln r(1-\nu_0)}{1+\nu_0} b_1 b_2 P(r) \quad (10)$$

$$Q_2(r) = \frac{1}{r} \left[-2 + \sum_{i=1}^{\infty} t_i r^i \right]$$

$$a_i = (-1)^{i+1} 2 \frac{[i(i-1)-1] + \nu_0}{(i+2)! i! (1-\nu_0)} \prod_{k=1}^i b_k, \quad (b_k = E_1 [k(k-1) - 1 + \nu_0] - \nu_0 \nu_1)$$

şeklinde tanımlanmıştır. t_i terimlerinin ilk birkaç tanesi ise şu şekildedir:

$$t_1 = -2 \frac{(-1+\nu_0)}{(1+\nu_0)} b_1 \quad (11)$$

$$t_2 = 2E_1^2(-1+\nu_0) - \frac{2E_1\nu_0(1-2\nu_0+3\nu_0^2)\nu_1}{(1+\nu_0)(-1+\nu_0)} + \frac{2\nu_0^2(1+2\nu_0-\nu_0^2+2\nu_0^3)\nu_1^2}{(1+\nu_0)^2(-1+\nu_0)^2}$$

$$t_3 = \frac{1}{9} E_1^3 (1+14\nu_0-19\nu_0^2+4\nu_0^3) + 4E_1^2\nu_0 \frac{-2+2\nu_0+5\nu_0^2-14\nu_0^3+3\nu_0^4}{9(1-\nu_0)(1+\nu_0)} \nu_1 + E_1\nu_0^2 \frac{(-7-41\nu_0+55\nu_0^2-67\nu_0^3+12\nu_0^4)}{9(1+\nu_0)(1-\nu_0)^2} \nu_1^2 + 2\nu_0^3 \frac{(1-17\nu_0+15\nu_0^2-13\nu_0^3+2\nu_0^4)}{9(1+\nu_0)(1-\nu_0)^3} \nu_1^3$$

$R(r)$ özel çözümü ise parametrelerin değişimi metoduyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$R(r) = P(r)U_1(r) + Q(r)U_2(r) \quad (12)$$

Burada;

$$U_1(r) = -\int_0^r \frac{Q(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi, \quad U_2(r) = \int_0^r \frac{P(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi, \quad f(r) = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \Omega^2 r \quad (13)$$

Bu denklemlerde, $W(r)$ terimi Wronskian' dır. Buna göre $u(r) = C_1P(r) + C_2Q(r) + R(r)$ denklemi, gerilme – yerdeğiştirme ifadelerinde yerine yazıldığında radyal ve teğetsel gerilme bileşenleri;

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1 \left(\frac{\nu P}{r} + \frac{dP}{dr} \right) + C_2 \left(\frac{\nu Q}{r} + \frac{dQ}{dr} \right) + \frac{\nu R}{r} + \frac{dR}{dr} \right] \quad (14)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1 \left(\frac{P}{r} + \nu \frac{dP}{dr} \right) + C_2 \left(\frac{Q}{r} + \nu \frac{dQ}{dr} \right) + \frac{R}{r} + \nu \frac{dR}{dr} \right] \quad (15)$$

şeklinde elde edilir.

İçi dolu disk için sınır şartları şu şekildedir: Diskin merkezinde ($r = 0$) gerilmeler sonludur ve disk serbest ucunda ($r = 1$) ise gerilme yoktur, $\sigma_r(1) = 0$. İlk sınır şartından $C_2 = 0$ bulunur, ikinci sınır şartından ise;

$$C_1 = -\frac{\nu(1)R(1) + R'(1)}{\nu(1)P(1) + P'(1)} \quad (16)$$

şeklinde elde edilir.

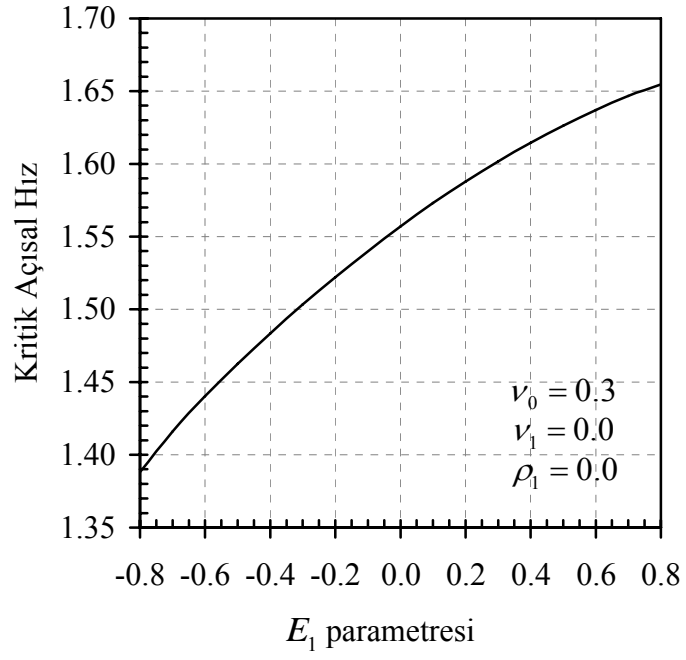
4. SAYISAL SONUÇLAR

Diskde plastik deformasyonun başlangıcını belirlemek için kullanılan von Mises akma kriteri boyutsuz büyüklükler cinsinden

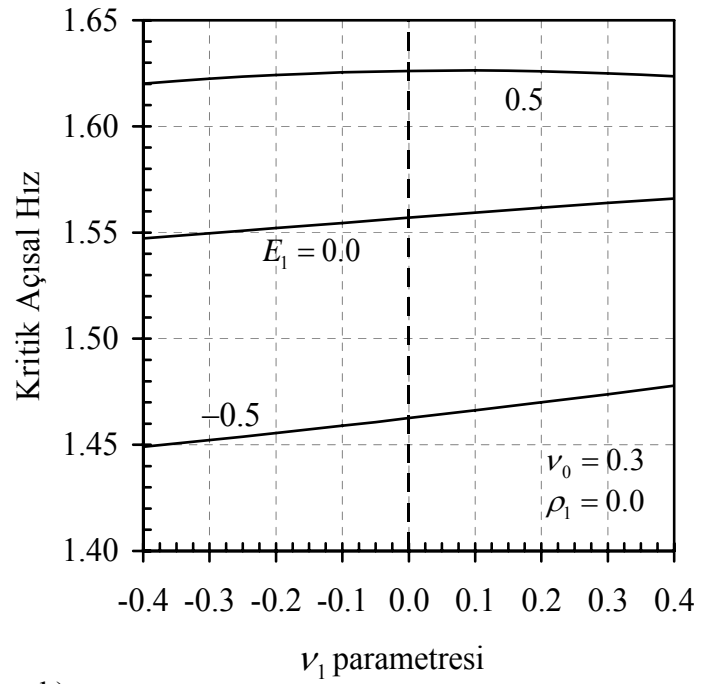
$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2} \quad (17)$$

şeklinde tanımlanmaktadır [14]. Plastik deformasyon bölgesinde $\sigma_y \geq 1$ ' dir ve $\sigma_y = 1$ olduğu andaki açısal hız değeri, elastik limit açısal hızdır.

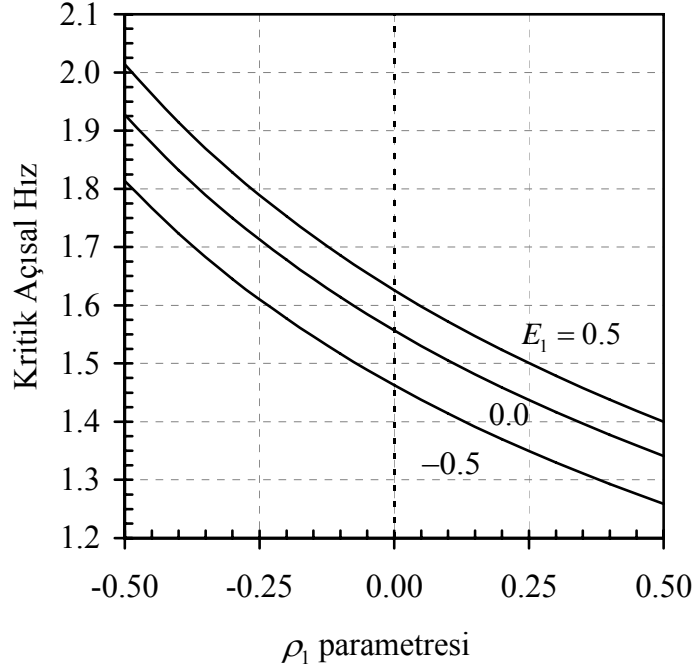
Şekil 1' de malzeme parametrelerinin akmanın başladığı elastik limit açısal hız üzerindeki etkileri elde edilmiştir. Bunun için parametrelerden biri değiştirilirken diğerleri sabit tutulmuştur. Şekildeki grafikler incelendiğinde kritik hız değerinin E_1 ve ν_1 parametreleri ile doğru, ρ_1 parametresi ile ise ters orantılı olarak değiştiği görülür.



a)



b)



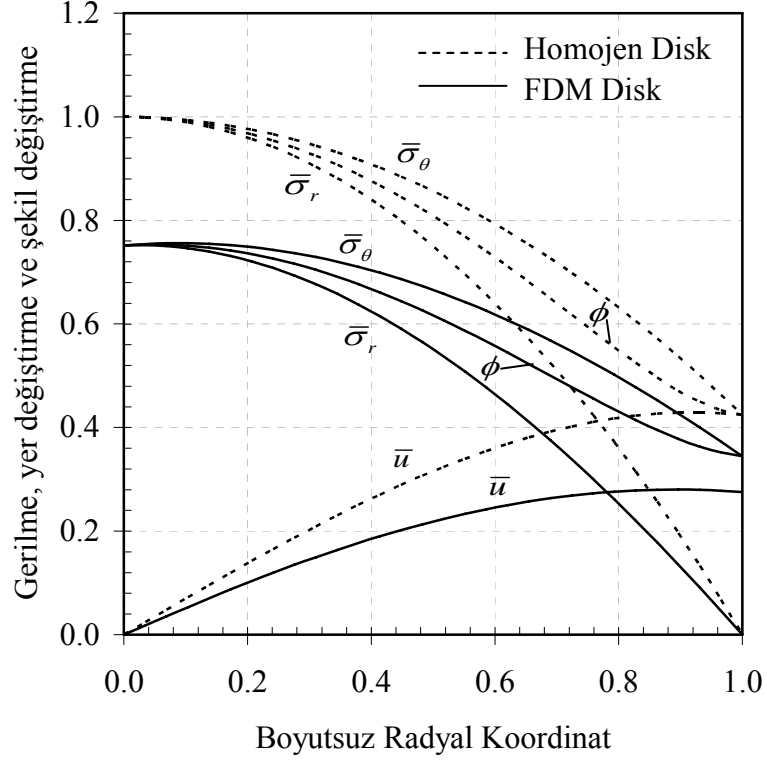
c)

Şekil 1. Malzeme parametrelerinin kritik açısal hıza etkisi a) E_1 'in etkisi, b) ν_1 'in etkisi, c) ρ_1 'in etkisi.

Bu parametrelerin uygun şekilde seçilmesiyle homojen yapıdaki disklere göre daha avantajlı diskler elde edilebilir. Yani aynı açısal hız için homojen olmayan bir disk mekanik dayanımı homojen diske göre daha yüksek olabilir.

Örnek olarak Şekil 2' de malzeme parametreleri, $E_1 = 0.25$, $\rho_1 = -0.3$, $\nu_0 = 0.3$ ve $\nu_1 = 0.1$ alınan bir FDM diskde meydana gelen gerilme ve yer değiştirmelerin aynı açısal hız değerinde homojen bir diskde meydana gelen gerilme ve yer değiştirmeler ile karşılaştırılması verilmiştir. Seçilen boyutsuz açısal hız değeri $\Omega = 1.55699$, homojen diskte plastik deformasyonun başladığı elastik limit açısal hız değeridir. Şekilden görüldüğü gibi aynı açısal hız değerinde, FDM malzemeden yapılmış diskde homojen diske göre çok daha küçük gerilme ve yer değiştirmeler meydana gelmektedir. Şekilde gösterilen ϕ ifadesi, gerilme bileşenlerine bağlı bir fonksiyonun değeridir.

Plastik deformasyon bölgesi için $\phi = \sigma_y'$ dir ve von Mises akma kriterine bağlı olarak ϕ' nin değeri $\sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2}$ şeklindedir, $\phi = 1.0$ olduğu anda ve radyal konumda disk içerisinde akma başlamaktadır [14].



şekil 2. Aynı aışsal hız değerinde FDM ve Homojen Diskde oluşan gerilmeler, $\Omega = 1.55699$

5. SONUÇ

Bu alışmada, FDM malzemeden yapılmış içi dolu donen bir diskin elastik gerilme analizi yapılmıştır. Elastisite modülü, yoğunluk ve Poisson oranının disk içerisinde radyal koordinat boyunca değişimini belirleyen parametrelerin, gerilme, yer değiştirme ve plastik değormasyonun başladığı kritik aışsal hız üzerine etkileri incelenmiştir. Malzeme parametreleri uygun şekilde seçilen FDM disklerin homojen disklere göre daha yüksek mekanik dayanıma sahip olabileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., "Theory of Elasticity" 3rd Edition, McGraw Hill, New York - 1970
- [2] Uğural, A.C. and Fenster, S.K., "Advanced Strength and Applied Elasticity" 3rd Edition, Prentice Hall International, London - 1995
- [3] Gamer, U., "Elastic-Plastic Deformation of the Rotating Solid Disk" Ingenieur-Archiv 54 345-354, 1984.
- [4] Gamer, U., "Stress Distribution in the Rotating Elastic-Plastic Disk" ZAMM 65(4) 136-137, 1985.
- [5] Eraslan, A.N. and Orcan, Y., "Elastic-Plastic Deformations of a Rotating Solid Disk of Exponentially Varying Thickness" Mechanics of Materials 34 423-432, 2002.

- [6] Orcan, Y. and Eraslan, A.N., “Elastic-Plastic Stresses in Linearly Hardening Rotating Solid Disks of Variable Thickness” *Mechanics Research Communications* 29 269-281, 2002.
- [7] Eraslan, A.N. and Orcan, Y., “On the Rotating Elastic-Plastic Solid Disks of Variable Thickness Having Concave Profiles” *International Journal of Mechanical Sciences* 44 1445-1466, 2002.
- [8] Güven, U., “Elastic-Plastic Stress Distribution in a Rotating Hyperbolic Disk With Rigid Inclusion” *International Journal of Mechanical Sciences* 40 97-109, 1998.
- [9] Eraslan, A.N. and Argeso, H., “Limit Angular Velocities of Variable Thickness Rotating Disks” *International Journal of Solids and Structures* 39 3109-3130, 2002.
- [10] Horgan, C.O. and Chan, A. M., “The Stress Response of Functionally Graded Isotropic Linearly Elastic Rotating Disks” *Journal of Elasticity* 55 219-230, 1999.
- [11] Güven, U., “Elastic-Plastic Stresses in a Rotating Annular Disk of Variable Thickness and Variable Density” *International Journal of Mechanical Sciences* 34(2) 133-138, 1992.
- [12] Durodola JF and Attia O., “Deformation and Stresses in FG Rotating Disks.” *Compos. Sci. Technol.* 60 987–995, 2000.
- [13] Eraslan, A.N. and Akış, T., “On the Plane Strain and Plane Stress Solutions of Functionally Graded Rotating Solid Shaft and Solid Disk Problems” *Acta Mechanica* 181 43-63, 2006.
- [14] Mendelson, A., “Plasticity: Theory and Applications” Collier-Macmillan, New York, London - 1968
- [15] Garvan, F., “The Mapple Book” Chapman and Hall/CCR - 2002

