



FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ DÖNEN SİLİNDİRLERDE ELASTİK GERİLME ANALİZİ

Ali Kurşun *, Emre Kara *, Halil Aykul *, Muzaffer Topçu +

*Hitit Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Çorum

+Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Denizli

ÖZET

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış dönen uzun silindirlere elastik gerilme dağılımı analitik olarak belirlenmiştir. Düzlem şekil değiştirme varsayımı altında Von Mises akma kriteri kullanılarak, elastik limitler analitik olarak belirlenmiştir. Sonuç olarak, derecelendirme parametresinin hem gerilme dağılımı hem de elastik limitler üzerinde önemli bir rol oynadığı ortaya konulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonel derecelendirilmiş silindirlere, Elastik gerilme, Elastik limit

ABSTRACT

In this study, elastic stress distribution on rotating long cylinders made of functionally graded material was analytically determined. Elastic limits were defined under plane strain assumption using Von Mises yielding criterion. As a result, it was presented that gradation parameter plays a role on both stress distribution and elastic limits.

Keywords: Functionally graded cylinders, Elastic stress, Elastic limit

1. GİRİŞ

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) özel bir performans veya fonksiyona uygun hale getirilmiş yapı veya kompozisyonları kapsayan malzemelerdir [1]. FDM'ler başlangıçta uzay yapı uygulamaları ve füzyon reaktörleri için termal bariyer olarak tasarlanmıştır [2-4]. Günümüzde ise mühendislik uygulamalarında elektronik aletlerin yapımı, pastan ve aşınmadan korunmalar için değişik tabaka yapımları, optik filmler, termal engel tabakaları ve biyomalzeme yapımlarında çok geniş uygulama yerleri bulunmaktadır [5-11].

Reiter ve Dvorak [12] derecelendirilmiş kompozit malzemenin, derecelendirme doğrultusunda üniform sıcaklık değişimi ve kararlı hal ısı iletimini sonlu elemanlar yöntemi ile incelemişlerdir. Horgan and Chan[13,14], FDM içi boş silindir ve dönen disk problemlerinin izotropik lineer elastik gerilme tepkisini içten basınç ile incelemişlerdir.

Derecelendirme parametresinin tasarım için önemini vurgulamışlardır. Noda yaptığı çalışmada [15], FDM'lerde oluşan termal gerilmelerin azaltılması için optimal kompozisyon

profili problemini çalışmıştır. Seramik ve metal arasındaki kompozisyon değişimi sürekli olursa, FDM’lerde oluşan termal gerilmelerin ve bir çatlak civarındaki termal gerilme şiddet faktörünün büyük bir şekilde düşebileceği sonucuna varılmıştır. Durodola ve Attia [16], fiber takviyeli fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin dönen katı disk ve halka diskleri için potansiyel faydasını incelenmişlerdir. FDM homojen olmayan bir ortotropik malzeme olarak modellenmiştir. Mikro yapısal boyutlar örneğin fiber çapı gibi disk boyutları yanında çok küçük kaldığı için mikromekanik model kullanılarak her bir noktadaki malzeme özelliklerini hesaplamışlardır. Santrifüj kütle kuvveti etkisinde, sonlu elemanlar yöntemi ve direkt integrasyon yöntemini kullanarak, diskteki deformasyon ve gerilme dağılımını hesaplamışlardır.

Bu çalışmada, malzeme özelliklerinin sadece radyal doğrultuda değiştiği varsayılarak, dönen fonksiyonel derecelendirilmiş uzun içi boş silindir için analitik çözüm geliştirilmiştir. Geliştirilen çözümden elde edilen sonuçlara göre derecelendirme parametresinin hem gerilme hem de dağılımı üzerinde önemli bir etkisinin olduğu tespit edilmiştir. Sonuçlar grafikler halinde sunulmuştur.

2. GERİLME ANALİZİ

Silindirik koordinatlarda iki boyutlu denge denklemi,

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + R = 0 \quad (2)$$

şeklini alır [17]. Gerilme bileşenleri simetriden dolayı θ 'ya bağlı olmazlar ve yalnız r 'nin fonksiyonu olurlar. Aynı zamanda $\tau_{r\theta}$, kayma gerilme değeri sifıra eşittir [17] ve R kütle kuvveti ile birlikte denklem (3)'e dönüşür.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho(r)\omega^2 r = 0 \quad (3)$$

Burada σ_r ve σ_θ , sırasıyla radyal ve teğetsel gerilmeleri gösterirken, $\rho(r)$ ise radyal yönde değişken yoğunluğu göstermektedir. Düzlem şekil değiştirme durumu için gerilme ile şekil değiştirme arasındaki ilişki Hooke kanuna göre yazılacak olursa,

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E(r)} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \quad (4)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E(r)} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \quad (5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E(r)} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \quad (6)$$

burada $\varepsilon_z = 0$ 'dır. Denklem (6)'daki eşitlikten σ_z , denklem (7)'deki gibi elde edilir.

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (7)$$

Elde edilen σ_z gerilme değeri denklem (4) ve (5)'de yerine konulursa,

$$\varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E(r)} [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta] \quad (8)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1+\nu}{E(r)} [(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r] \quad (9)$$

Gerinim-şekil değiştirme arasındaki ilişki aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (10)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (11)$$

Denklem (10) ve (11)'den süreklilik denklemini denklem (12)'deki gibi tanımlanabilir.

$$\varepsilon_r = \frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) \quad (12)$$

Dönen silindir için radyal ve teğetsel gerilme bileşenleri, bir gerilme fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\sigma_r = \frac{F}{r} \quad (13)$$

$$\sigma_\theta = \frac{dF}{dr} + \rho\omega^2 r^2$$

Denklem (13)'teki gerilme değerleri, gerilme fonksiyonu cinsinden denklem (8) ve (9)'da yerine konulur ve elde edilen şekil değiştirme değerleri süreklilik denkleminde (12) yerine konulursa;

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \left(1 - \nu \frac{E'(r)}{E(r)} \right) \frac{dF}{dr} + \left(\nu r \frac{E'(r)}{E(r)} - 1 \right) F = \rho(r)\omega^2 r^3 \left(r \frac{E'(r)}{E(r)} - r \frac{\rho'(r)}{\rho(r)} - 3 - \frac{\nu}{1-\nu} \right) \quad (14)$$

Elde edilen denklem (14) dönen silindirde gerilme analizi için kullanılır. Burada fonksiyonel derecelendirilmiş silindirin malzeme özellikleri sadece yarıçapa bağlı üssel değişen fonksiyon olarak seçilmiştir. Elastisite modülü ve yoğunluğun denklem (15)'teki fonksiyonlara göre değiştiği varsayılmıştır.

$$E(r) = E_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^n$$

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^\gamma$$
(15)

Burada, E_0 ve ρ_0 , sırasıyla, elastisite modülü ve yoğunluk referans değerleri olarak tanımlanmıştır, n ve γ ise, isteğe bağlı sabitlerdir. Bu sabitlere göre malzeme özelliklerinin değişim profili elde edilir. Denklem (15)'teki değerler denklem (14)'te yerine konular ve $r = e^t$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{d^2 F}{dt^2} - n \frac{dF}{dt} + (n\gamma - 1)F = \frac{\rho_0 \omega^2 \left(n - \gamma - 3 - \frac{\nu}{1 - \nu} \right)}{r_0^\gamma} e^{(3+\gamma)t}$$
(16)

Buradan denklem (16)'nın genel çözümü bize gerilme fonksiyonunu verir.

$$F = C_1 r^{\frac{n+k}{2}} + C_2 r^{\frac{n-k}{2}} + A r^{(3+\gamma)}$$
(17)

Burada A,

$$A = \frac{\rho_0 \omega^2 \left(n - \gamma - 3 - \frac{\nu}{1 - \nu} \right)}{r_0^\gamma \left((3 + \gamma)^2 - n(3 + \gamma) + \nu n - 1 \right)}$$
(18)

Buradan gerilme fonksiyonundan (17) radyal ve teğetsel gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\sigma_r = \frac{F}{r} = C_1 r^{\frac{n+k-2}{2}} + C_2 r^{\frac{n-k-2}{2}} + A r^{(2+\gamma)}$$
(19)

$$\sigma_\theta = \left(\frac{n+k}{2} \right) C_1 r^{\frac{n+k-2}{2}} + \left(\frac{n-k}{2} \right) C_2 r^{\frac{n-k-2}{2}} + (3+\gamma) A r^{(2+\gamma)} + \rho(r) \omega^2 r^2$$
(20)

C_1 ve C_2 integral sabitleridir ve aşağıda verilen sınır şartları kullanılarak bulunabilir.

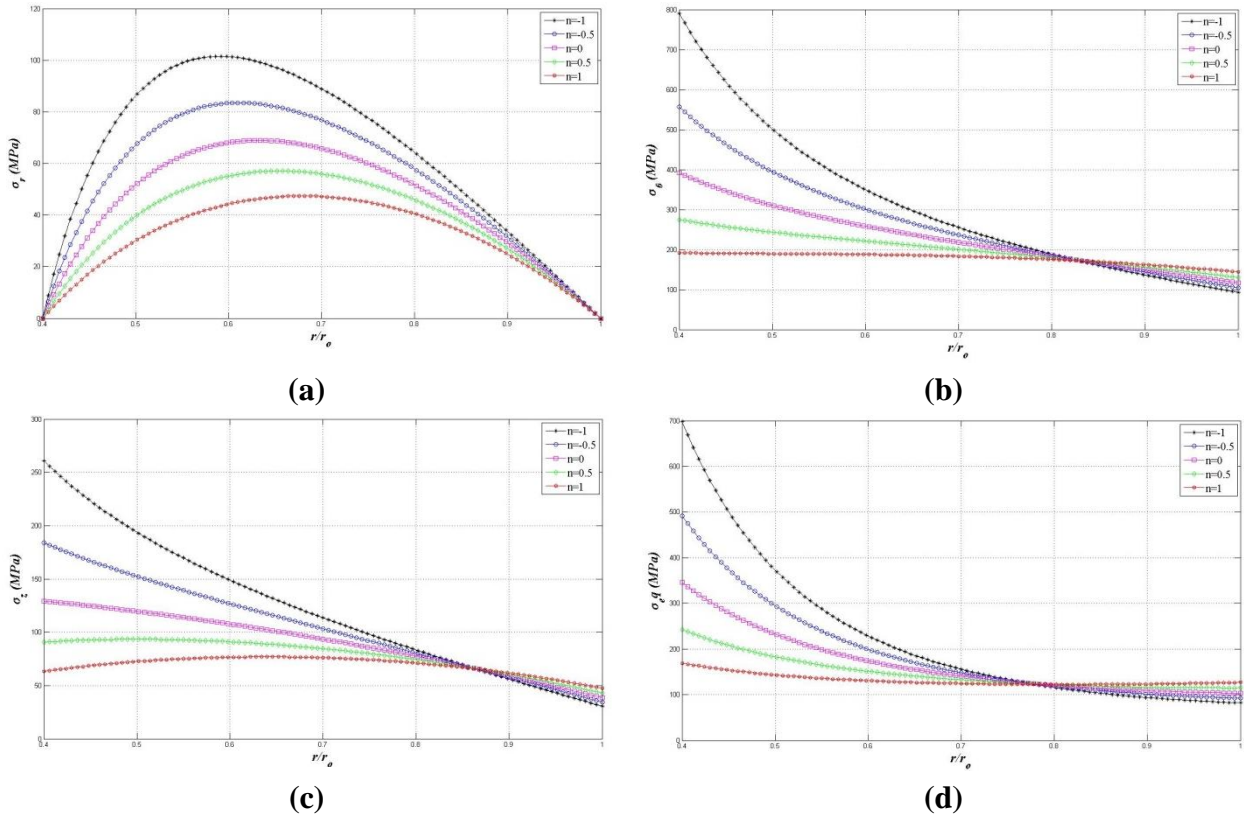
$$\sigma_r(r_i) = 0, \quad \sigma_r(r_0) = 0$$
(21)

$$C_1 = \frac{A \left(-r_i^{(\gamma+2)} r_o^{\frac{n-k-2}{2}} + r_o^{(\gamma+2)} r_i^{\frac{n-k-2}{2}} \right)}{r_i^{\frac{n+k-2}{2}} r_o^{\frac{n-k-2}{2}} - r_o^{\frac{n+k-2}{2}} r_i^{\frac{n-k-2}{2}}} \quad (22)$$

$$C_2 = \frac{A \left(-r_o^{(\gamma+2)} r_i^{\frac{n+k-2}{2}} + r_i^{(\gamma+2)} r_o^{\frac{n+k-2}{2}} \right)}{r_i^{\frac{n+k-2}{2}} r_o^{\frac{n-k-2}{2}} - r_o^{\frac{n+k-2}{2}} r_i^{\frac{n-k-2}{2}}} \quad (23)$$

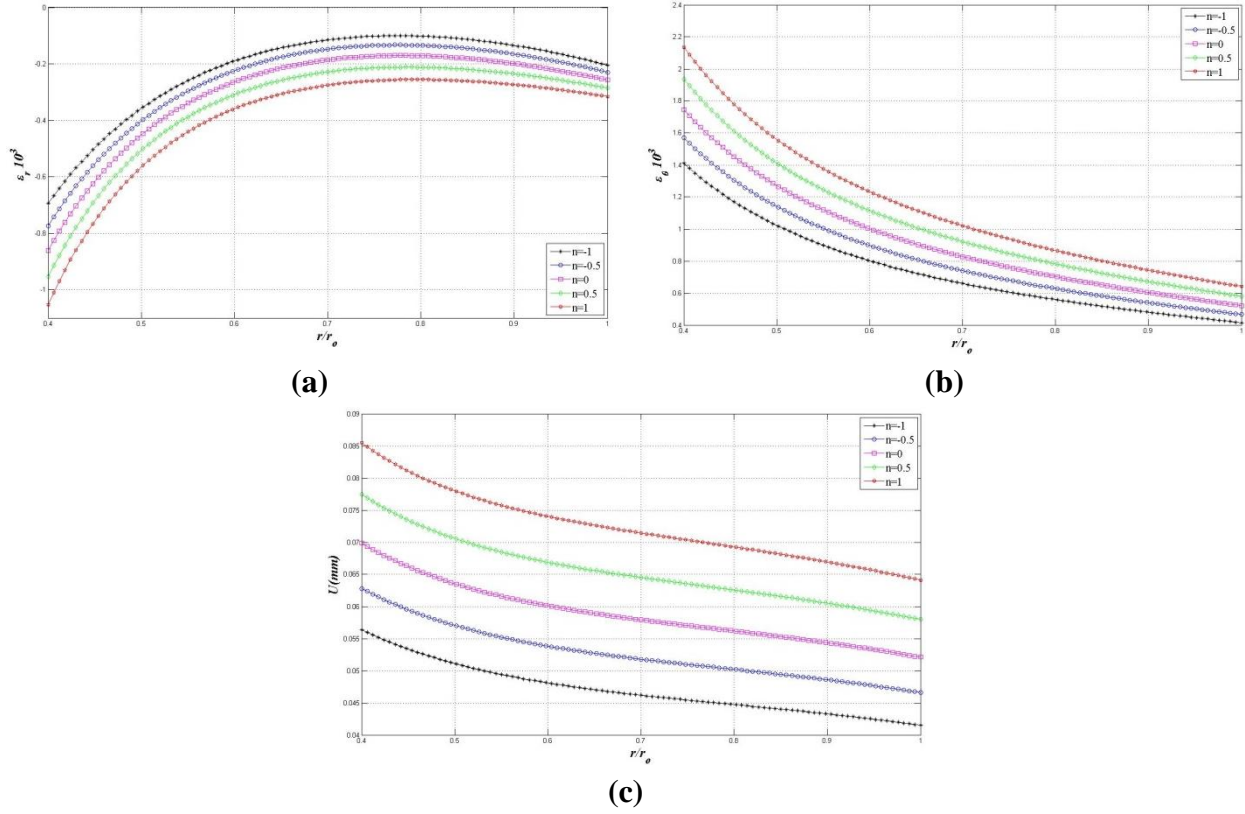
3. SONUÇLAR

Nümerik sonuçlar için silindirin iç yarı çapı 40 mm, dış yarıçapı 100 mm, nominal elastisite modülü 200000 MPa ve nominal yoğunluk 7800 kg/m³ olarak kullanılmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir. Dönme sırasında oluşan açısız maruz uzun içi boş fonksiyonel derecelendirilmiş silindirde oluşan radyal, teğetsel, aksel ve eşdeğer gerilme dağılımları Şekil 1 a, b, c ve d'de sırasıyla gösterilmiştir. Şekil 1 a'da görüldüğü gibi radyal gerilme bileşenleri silindirin iç kısmında ve dış kısmında sıfırdır. Derecelendirme parametresi değerlerinin artmasıyla gerilmenin ters orantılı olduğu gözlemlenmektedir. Maksimum radyal gerilme değeri silindirin iç kısmına daha yakın orta bölgede oluşmuştur. Radyal gerilmeler daima çeki durumundadırlar. Teğetsel gerilmeler ise Şekil 1 b'de görüldüğü gibi silindirin iç kısmından dış kısmına doğru azalan bir dağılım göstermektedirler. En düzenli dağılım derecelendirme parametresinin en büyük değeri için elde edilirken, en büyük teğetsel gerilme silindirin iç yüzeyinde derecelendirme parametresinin en küçük değeri için bulunmuştur.



Şekil 1. 75 rad/sn açısal hızla dönen silindirde oluşan a) radyal, b) teğetsel, c) eksenel ve d) eşdeğer gerilme dağılımı.

Şekil 2'de ise açısal hıza maruz uzun içi boş fonksiyonel derecelendirilmiş silindirde oluşan radyal, teğetsel şekil değiştirmeler ile radyal yöndeki yer değiştirme dağılımı sırasıya a,b ve c'de gösterilmiştir. Şekil 2 a'da görüldüğü gibi radyal şekil değiştirmeler silindirin iç kısmında minimum, dış kısmına doğru artan bir dağılım göstermiştir. Radyal şekil değiştirmeler silindirin dış kısmına yakın orta kısmında maksimum olduğu Şekil 2 a'da görülmektedir. Derecelendirme parametresinin en küçük değeri için maksimum, en büyük değeri için minimum radyal şekil değiştirmeler tespit edilmiştir. Şekil 2 b'de ise teğetsel şekil değiştirmeler silindirin iç yüzeyinde maksimum, dış yüzeyinde ise minimum olduğu görülmektedir. Teğetsel şekil değiştirmeler derecelendirme parametresinin en büyük değeri için maksimum, minimum şekil değiştirme ise en küçük derecelendirme parametresi için bulunmuştur. Şekil 2 c'de radyal yöndeki yer değiştirmelere bakıldığında ise silindirin iç yüzeyinden dış yüzeyine doğru azaldığı görülmektedir. Maksimum radyal yöndeki yer değiştirme derecelendirme parametresinin en büyük değer için silindirin iç kısmında meydana geldiği şekilden açıkça görülmektedir.



Şekil 2. 75 rad/sn açısal hızla dönen silindirde oluşan a) radyal, b) teğetsel şekil değiştirmeler ve c) radyal yöndeki yer değiştirmeler.

4. ÖNERİLER

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış dönen içi boş silindirde oluşan elastik gerilme dağılımı belirlenmiş ve derecelendirme parametresinin gerilme dağılımı üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Araştırmanın başlıca sonuçları aşağıda sıralanmıştır.

- Maksimum radyal gerilme değeri silindirin iç kısmına daha yakın orta bölgede oluşmuştur.
- Derecelendirme parametresinin artmasıyla gerilmelerin ters orantılı olduğu tespit edilmiştir.
- En düzenli gerilme dağılımı derecelendirme parametresinin en büyük değeri için elde edilmiştir.
- Maksimum radyal yöndeki yer değiştirme derecelendirme parametresinin en büyük değeri için silindirin iç kısmında oluşmuştur.
-

KAYNAKLAR

- [1] Kurşun, A., “Fonksiyonel Derecelendirilmiş Disklerin Elastoplastik Gerilme Analizi” Doktora Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Denizli, Türkiye, 2013.
- [2] Hirai, T. and Chen, L., ‘Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan’ Materials Science Forum, 308–311, 509–514, 1999.

- [3] Chan, S.H., "Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine" *International Journal of Thermal Science*, 40, 255–261, 2001.
- [4] Uemura, S., "The activities of FGM on new applications" *Materials Science Forum*, 423–425, 1–10, 2003.
- [5] Koizumi, M., "The concept of FGM" *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*. 34, 3–10, 1993.
- [6] Koizumi, M., "FGM activities in Japan", *Composites Part B*, 28, 1-4, 1997.
- [7] Suresh, S. and Mortensen, A., "Fundamentals of functionally graded materials: processing and thermo-mechanical behavior of graded metals and metalceramic composites" *IOM Communications*, London, 1998.
- [8] Reddy, J.N. and Chin, C.D., "Thermal-mechanical analysis of functionally graded cylinders and plates" *Journal of Thermal Stresses*, 21, 593–626, 1998.
- [9] Miyamoto, Y., Kaysser, W.A., Rabin, B.H., Kawasaki, A. and Ford, R.G., "Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications" *MA, Kluwer Academic*, 331 p, Boston, 1999.
- [10] Müller, E., Drašar, C., Schilz, J. and Kaysser, W.A., "Functionally graded materials for sensor and energy applications" *Materials Science Engineering A*, 362(1–2), 17–39, 2003.
- [11] Pompe, W., Worchorch, H., Epple, M., Friess, W., Gelinsky, M., Greil, P., Hempel, U., Scharnweber, D. and Schulte, K., "Functionally graded materials for biomedical applications" *Materials Science Engineering A*, 362(1–2), 40–60, 2003.
- [12] Reiter, T. and Dvorak, G.J., "Micromechanical Modeling of Functionally Graded Materials" *IUTAM Symposium on Transformation Problems in Composite and Active Materials*, Hingham, MA, USA, Kluwer Academic Publishers, p 173, 1998.
- [13] Horgan, C.O. and Chan, A.M., "The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials" *Journal of Elasticity*, 55(1), 43–59, 1999.
- [14] Horgan, C.O. and Chan, A.M., "The Stress Response of Functionally Graded Isotropic Linearly Elastic Rotating Disks" *Journal of Elasticity*, 55(3), 219–230, 1999.
- [15] Noda, N., "Thermal Stresses in Functionally Graded Materials" *Third International Congress on Thermal Stresses*, Cracow, Poland; June 13-17, 1999.
- [16] Durodola, J.F. and Attia, O., "Deformation and Stresses in FG Rotating Disks" *Compos. Sci. Technol.*, 60, 987–995, 2000.
- [17] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., "Theory of Elasticity" 3rd Edition, McGraw Hill, New York-1970.