



## HESAPLAMALI AKIŞKANLAR MEKANİĞİ ÇALIŞMALARI İÇİN SIKIŞTIRILABİLİR FOURIER TAYFI YÖNTEMİ

Cihan Bayındır<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Işık Üniversitesi, 34980 Şile, İstanbul.

### ABSTRACT

In this study an approach which can improve the performance of the Fourier spectral method, which is very frequently used for simulations in computational fluid mechanics and similar branches, is proposed. The sparse functions, that are functions with majority of elements are zero, are considered and it is shown that compressive sampling algorithm can be used with the Fourier spectral method to improve the performance of the simulations. For this purpose nonlinear Schrödinger equation and its one and two soliton solutions are utilized. For the time integration split-step method is used and it is shown that proposed compressive Fourier spectral method can improve the performance of the simulations by decreasing the computation times significantly with negligible change in the accuracy.

### ÖZET

Bu çalışmada hesaplamalı akışkanlar mekaniği ve benzer dallarda benzetimlerde (simulasyon) sıkça kullanılan Fourier tayfı yönteminin performansını geliştirecek bir yaklaşım ortaya konulmuştur. Benzetimi yapılan fonksiyonların seyrekliği, yani çoğu bileşenin sıfır olması, durumu ele alınmış ve sıkıştırılabilir algılama yönteminin bu tip fonksiyonların benzetiminde klasik tayf yöntemiyle beraber kullanılarak benzetim performansını geliştirebileceği gösterilmiştir. Bu amaçla eğrisel (doğrusal olmayan) Schrödinger denklemi ve bu denklemin bir ve iki tekil dalga çözümleri kullanılmıştır. Zaman integrasyonu için yarık-basamaklı Fourier tayfı yöntemi (split-step Fourier method) kullanılmış ve önerilen sıkıştırılabilir Fourier tayfı yönteminin sonuçların kesinliğinde belirgin bir fark olmaksızın hesaplama zamanlarını belirgin ölçüde azaltarak benzetim performansını geliştirebileceği gösterilmiştir.

### GİRİŞ

Bu çalışmada hesaplamalı akışkanlar mekaniği, matematik vb. çalışmalarda kullanılan Fourier tayfı yönteminin performansını geliştirebilecek bir yöntem önerilmiştir. Sıkıştırılabilir Fourier tayfı yöntemi olarak adlandırılan bu yöntem, zaman basamaklaması boyunca Fourier dönüşümünün klasik Fourier dönüşümüne nazaran daha az sayıda bileşen için hesaplanması ve zaman basamaklama sonunda sıkıştırılabilir algılama yöntemi kullanılarak daha fazla sayıdaki bileşen için fonksiyonun geriçatılması ilkesine dayanmaktadır. Bu yöntemle benzetim sonucu çok daha kısa zamanda elde edilerek benzetim performansı geliştirilmiş olur.

Önerilen yöntem sıkıştırılabilir algılama yöntemini kullandığı için ancak seyrek, yani çoğu sıfır elemanlardan oluşan, fonksiyonların benzetiminde kullanılabilir. Doğa ve mühendislik yapılarındaki çoğu fonksiyonun seyrek olduğu düşünülürse bu yöntemin birçok benzetim için çok avantajlı olabileceği anlaşılır. Seyrek fonksiyon modeli olarak kuantum mekaniği, optik ve akışkanlar mekaniği gibi çeşitli branşlarda kullanılan ve su dalgası paketlerinin zayıf eğrisellik altında değişimini modelleyen eğrisel Schrödinger denklemi ele alınmıştır. Eğrisel Schrödinger denkleminin tek ve çift tekil dalga çözümleri yarık-basamaklı Fourier yöntemi için ilk şart olarak kullanılmıştır. Zaman basamaklama ise yarık-basamaklı Fourier yöntemiyle yapılmıştır. Önerilen sıkıştırılabilir Fourier tayfı

yönteminin kesinlikte belirgin bir azalma olmaksızın, hesaplama zamanını azaltarak benzetim performansını geliştirebileceği ortaya konmuştur. Özellikle daha fazla sayıda zaman basamağı kullanıldığında önerilen yöntemin çok daha avantajlı olacağı gösterilmiştir.

## ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

### Eğrisel Schrödinger Denkleminin Bir ve İki Tekil Dalga Çözümlerin

Eğrisel Schrödinger denklemi kuantum mekaniği, optik gibi branşlardaki yaygın kullanımının yanısıra akışkanlar mekaniğinde zayıf eğrilişli su dalgası paketlerinin modellenmesinde kullanılmaktadır [1]. Bu denklemin en yaygın kullanılan formu olarak

$$i\eta_t = \eta_{xx} + 2\eta|\eta|^2 \quad (1)$$

ele alınabilir. Bu denklemin bir tekil dalga çözümü

$$\eta(x,t) = 2A \exp\{-i[2x - 4(1 - A^2)t + \pi/2]\} \operatorname{sech}(2Ax - 8At) \quad (2)$$

olarak verilebilir. İki tekil dalga çözümünü elde etmek için gereken prosedür Hirota tarafından verilmiş olup [2], aşağıdaki şekilde özetlenebilir. Denklem için

$$\eta(x,t) = G(x,t)/F(x,t) \quad (3)$$

biçiminde bir çözüm aranırsa buradan

$$F(x,t) = 1 + a(1,1^*) \exp(\zeta_1 + \zeta_1^*) + a(1,2^*) \exp(\zeta_1 + \zeta_2^*) + a(2,1^*) \exp(\zeta_2 + \zeta_1^*) \\ + a(2,2^*) \exp(\zeta_2 + \zeta_2^*) + a(1,2,1^*,2^*) \exp(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1^* + \zeta_2^*) \quad (4)$$

ile

$$G(x,t) = \exp(\zeta_1) + \exp(\zeta_2) + a(1,2,1^*) \exp(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1^*) + a(1,2,2^*) \exp(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_2^*) \quad (5)$$

ifadeleri elde edilir [2]. Bu ifadelerdeki katsayılar

$$a(i,j^*) = (P_i + P_j^*)^{-2}, \quad a(i,j) = (P_i - P_j)^2, \quad a(i^*,j^*) = (P_i^* - P_j^*)^2, \\ a(i,j,k^*) = a(i,j)a(i,k^*)a(j,k^*) \quad (6) \\ a(i,j,k^*,l^*) = a(i,j)a(i,k^*)a(i,l^*)a(j,k^*)a(j,l^*)a(k^*,l^*).$$

şeklinde gösterilebilir [2]. Bu denklem setinin içindeki parametreler [2]'deki gibi seçilerek

$$\zeta_j = P_j x - \Omega_j t - \zeta_j^{(0)}, \quad \Omega_j = iP_j^2. \quad (7) \\ P_1 = 4 - 2i, P_2 = 3 + i, \zeta_1^{(0)} = -9.04, \zeta_2^{(0)} = 2.1.$$

olarak alınmıştır.

### Yarı-Basamaklı Fourier Tayfı Yöntemi

Tayf yöntemleri içinde Fourier tayf yöntemi çok değişik benzetimleri yapmak amacıyla kullanılan en yaygın yöntemdir [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Alan denklemindeki mekansal türevler Fourier serileri ile hesaplanırken zamansal türevlerin integrasyonu için Runge-Kutta, Adam-Bashforth gibi yöntemler kullanılmaktadır [3, 5, 6, 7, 8]. Sıkça kullanılan bir diğer yöntem ise yarı-basamaklı Fourier tayf yöntemidir (split-step Fourier method). Bu yöntem ilk olarak [9]'de ortaya konulmuştur. Bu yöntemin Schrödinger denklemi için uygulanabilecek hali [10, 11]'de verilmiştir. Bu yöntemde denklem önce eğrisel ve doğrusal kısımlarına ayrılır. Eğrisel kısım

$$i\eta_t = 2\eta|\eta|^2 \quad (8)$$

olarak yazılır. Bir sonraki zaman basamağı için fonksiyon

$$\widehat{\eta}(x, t_0 + \Delta t) = e^{-2i\eta(x, t_0)^2 \Delta t} \eta(x, t_0) \quad (9)$$

olarak hesaplanabilir. Burada  $i$  imajiner sayıyı,  $\Delta t$  zaman basamağını göstermektedir. Schrödinger denkleminin doğrusal kısmı

$$i\eta_t = \eta_{xx} \quad (10)$$

olarak yazılır. Bu doğrusal kısım hızlı Fourier ve ters Fourier dönüşümleri kullanılarak

$$\eta(x, t_0 + \Delta t) = F^{-1}[e^{ik^2 \Delta t} F[\widehat{\eta}(x, t_0 + \Delta t)]] \quad (11)$$

şeklinde hesaplanabilir. (9) ve (11)'de verilen ifadeler birleştirilerek

$$\eta(x, t_0 + \Delta t) = F^{-1}[e^{ik^2 \Delta t} F[e^{-2i\eta(x, t_0)^2 \Delta t} \eta(x, t_0)]] \quad (12)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem ilk değerden başlayarak daha sonraki zaman basamakları için fonksiyonun bulunmasında kullanılır.

### Sıkıştırılabilir Algılama Yöntemi

Sıkıştırılabilir algılama yöntemi yaklaşık on yıl kadar önce ortaya atıldığı günden itibaren çok sayıda araştırmacının ilgisini çekmiş olup dijital sinyal işleme, uygulamalı matematik vb. gibi çok çeşitli branşta kullanılmaktadır. Bu yöntem aynı zamanda tek piksellli kamera sistemi, sıkıştırılabilir algılama yöntemine dayanan analog-dijital çeviriciler gibi donanım sistemlerinin temelini teşkil eden yöntemdir. Bu bölümde sıkıştırılabilir algılama yönteminin kısa bir özeti sunulmuştur.

$\eta$ ,  $N$  elemanı olan  $K$ -seyrek, yani  $N$  elemandan sadece  $K$  tanesi sıfırdan farklı olan, bir fonksiyon olsun. Dönüşüm matrisi  $\Psi$  olan dik dönüşüm yöntemleri kullanılarak  $\eta$  dönüşüm yüzeyindeki temel fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Günümüzde sıkça kullanılan dik dönüşüm yöntemlerine örnek Fourier, dalgacık, ayırık kosinüs dönüşümleridir. Dolayısıyla  $\eta_c$  dönüşüm katsayı vektörü olmak üzere fonksiyon,  $\eta = \Psi \eta_c$  olarak ifade edilebilir. Fonksiyonun sadece sıfırdan farklı olan bileşenleri ele alınarak  $\eta^s = \Psi \eta_c^s$  elde edilir.

Sıkıştırılabilir algılama yöntemi  $N$  elemanlı  $K$ -seyrek  $\eta$  fonksiyonunun  $M=O(K \log(N/K))$  mertebesinde rassal ölçüm yapılarak bu ölçümlerden çok yüksek bir olasılıkla geriçatılabileceğini belirtmektedir. Kullanılan  $M$  rassal ölçüm için ölçüm matrisi  $\Phi$  olarak gösterilirse yapılan rassal ölçümler sonunda  $g = \Phi \eta$  fonksiyonu elde edilir. Bu aşamadan sonra problem

$$g = \Phi \Psi \eta_c \text{ şartı altında } \min \|\eta_c\|_{l_1}$$

olarak özetlenebilir. Burada  $\|\eta_c\|_{l_1} = \sum_{i=1}^N |\eta_{ci}|$  dir. Yani verilen şartı sağlayan fonksiyonlar içinde sıkıştırılabilir algılama yöntemi çözümü,  $l_1$  enküçüklemesini sağlayan  $\eta = \Psi \eta_c$  dir. Seyrek fonksiyonların geriçatılmasındaki tek yöntem  $l_1$  enküçüklemesi yöntemi değildir. Açgözlü tarama, ağırlıklandırılmış  $l_1$  enküçüklemesi gibi yöntemler de mevcuttur. Bu çalışmada  $l_1$  enküçüklemesi yöntemi kullanılmıştır. Sıkıştırılabilir algılama yönteminin daha kapsamlı açıklaması [12]'de görülebilir.

### Önerilen Sıkıştırılabilir Fourier Tayfı Yöntemi

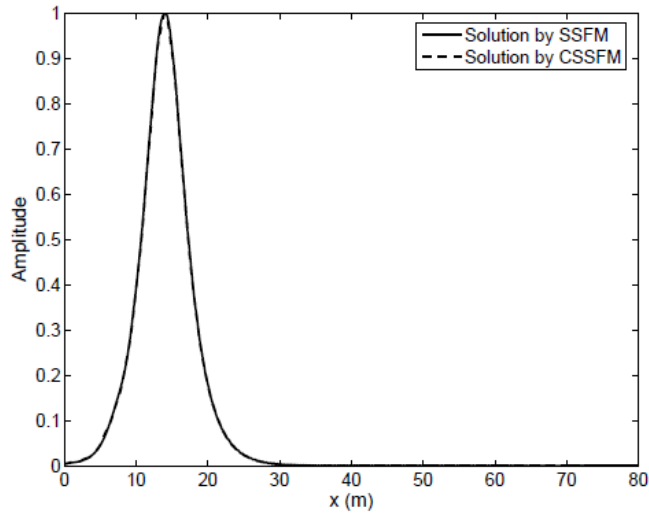
Klasik Fourier tayf yönteminde bir fonksiyon  $N$  tayf bileşeniyle temsil edilir. Dolayısıyla Fourier katsayıları bu  $N$  bileşen için hesaplanmakta olup, her zaman basamağında bu işlem tekrarlanmaktadır. Çözülen denkleme bağlı olmak üzere birden fazla sayıda hızlı Fourier ve ters hızlı Fourier dönüşümü gerekebilir. Bu da hesaplama süresini arttıran en temel faktördür.

Bu çalışmada sıkıştırılabilir algılama yöntemine dayanan ve hesaplamalı Fourier tayfı yöntemini hızlandırabilecek bir yaklaşım önerilmiştir. Benzer bir yaklaşım [13]'te görülebilir. Bu yöntemde  $N$  bileşen kullanmak yerine  $M \ll N$  olmak üzere, seyrek bir fonksiyondan  $M=O(K \log(N/K))$  bileşen

seçilip hızlı Fourier ve ters hızlı Fourier dönüşümleri bu M bileşen için yapılır. Zaman basamaklamasının sonunda fonksiyonun N bileşeni, bu M bileşene sıkıştırılabilir algılama yöntemi uygulanarak elde edilir. Böylelikle Fourier dönüşümleri için bileşen sayısı büyük ölçüde azalacağından sonuç çok daha kısa zamanda elde edilir. Bu yöntem sıkıştırılabilir Fourier tayfi yöntemi olarak adlandırılabilir. Bu yöntemin klasik Fourier tayfi yöntemine kıyasla kesinlikte belirgin bir azalma olmaksızın performansı büyük ölçüde geliştirdiği ileriki kısımlarda gösterilmiştir.

## SAYISAL SONUÇLAR

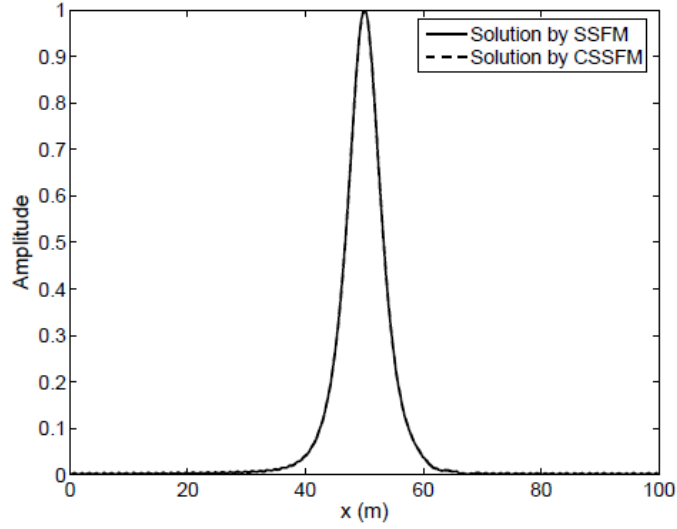
### Eğrisel Schrödinger Denkleminin Yarık-Basamaklı Fourier Tayfi Yöntemi Çözümü için Sonuçlar



Şekil 1. Klasik Fourier tayfi yöntemi ile önerilen sıkıştırılabilir Fourier tayfi yönteminin bir tekil dalga çözümü için kıyaslanması,  $N=1024$ ,  $M=128$ .

Şekil 1’de,  $N=1024$  bileşenli klasik Fourier tayfi yöntemi ve  $M=128$  bileşenli sıkıştırılabilir Fourier tayfi yöntemi eğrisel Schrödinger denkleminin bir tekil dalga çözümü için kıyaslanmıştır. Bu benzetim için ilk şart (2)’yle tanımlanmıştır. Şekilde görülebileceği üzere bu iki yöntemin kesinliği arasında belirgin bir fark yoktur. İki yöntemle elde edilen sonuçlar arasındaki normalleştirilmiş ortalama karekök fark (root-mean-square) 0.0025 olarak hesaplanmıştır.

Şekil 2’de,  $N=1024$  bileşenli klasik Fourier tayfi yöntemi ve  $M=256$  bileşenli sıkıştırılabilir Fourier tayfi yöntemi eğrisel Schrödinger denkleminin bir tekil dalga çözümü için kıyaslanmıştır. Bu benzetim için de ilk şart (2)’yle tanımlanmıştır. Şekilden görülebileceği üzere bu iki yöntemin kesinliği arasında belirgin bir fark yoktur. İki yöntemle elde edilen sonuçlar arasındaki normalleştirilmiş ortalama karekök fark (root-mean-square) 0.0012 olarak hesaplanmıştır.

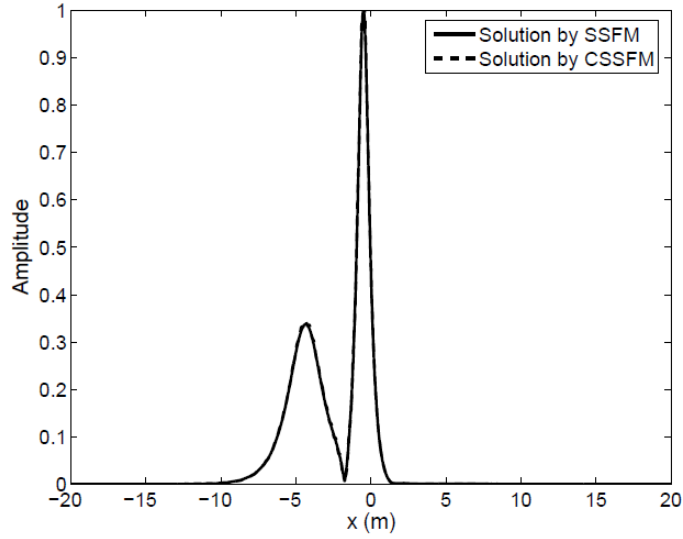


Şekil 2. Klasik Fourier tayfı yöntemi ile önerilen sıkıştırılabilir Fourier tayfı yönteminin bir tekil dalga çözümü için kıyaslanması,  $N=1024$ ,  $M=256$ .

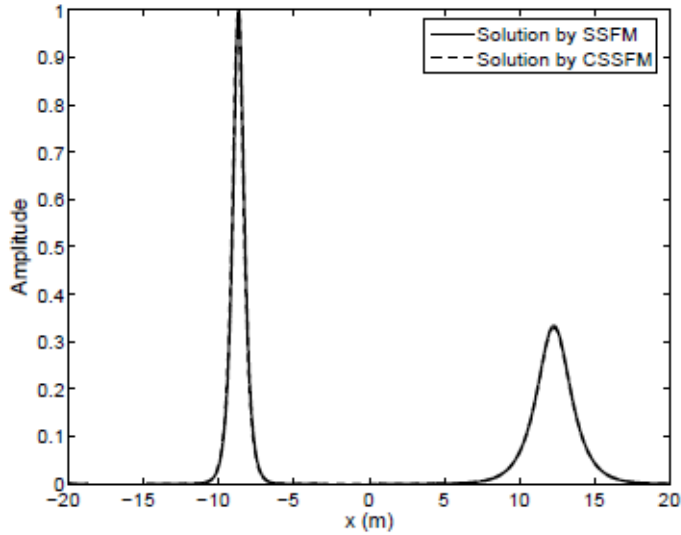
Çizelge 1. Schrödinger denkleminin bir tekil dalga çözümü için klasik Fourier tayfı ve önerilen sıkıştırılabilir Fourier tayfı yönteminin performans kıyaslaması.

N	M	Zaman Basamak	Klasik Tayf Yöntemi	Önerilen Yöntem	Normal Rms
		Sayısı	Zamanı(s)	Zamanı(s)	Fark
1024	64	$10^5$	308.75	73.04	0.0209
1024	128	$10^5$	256.40	96.73	0.0025
1024	128	$10^6$	2735.00	527.44	0.0025
1024	256	$10^5$	302.81	182.43	0.0012
2048	256	$10^5$	613.63	541.15	0.0023

Yukarıda sunulan şekiller yöntemin kesinliğinde belirgin bir azalma olmadığını göstermektedir. Çeşitli parametreler için bir tekil dalga benzetim zamanları ise saniye cinsinden Çizelge 1’de sunulmaktadır. Hesaplama zamanları çift 1.8 GHz çekirdekli, 1GB RAM i olan Dell Vostro 1700 model bir bilgisayarda ölçülmüştür. Çizelgedeki her satır için 50 benzetim yapılarak ortalama zaman hesaplanmıştır. Çizelgeden de görülebileceği üzere, az sayıdaki zaman basamağı için önerilen yöntem klasik yöntemle nazaran küçük bir gelişme sağlamaktadır. Bunun nedeni  $l_1$  enküçüklemesi için harcanan zamandır. Ancak zaman basamağı sayısı arttıkça önerilen yöntemin klasik yöntemle nazaran kesinliğinde belirgin bir azalma olmaksızın çok daha kısa sürede benzetim yapabildiği görülebilir. Böylelikle önerilen yöntemle tayf benzetimlerinin performansı geliştirilebilir.



Şekil 3. Klasik Fourier tayfı yöntemi ile önerilen sıkıştırılabilir Fourier tayfı yönteminin iki tekil dalga çözümü için kıyaslanması,  $N=2048$ ,  $M=256$ .



Şekil 4. Klasik Fourier tayfı yöntemi ile önerilen sıkıştırılabilir Fourier tayfı yönteminin iki dalga çözümü için kıyaslanması,  $N=2048$ ,  $M=128$ .

Şekil 3'te,  $N=2048$  bileşenli klasik Fourier tayfı yöntemi ve  $M=256$  bileşenli sıkıştırılabilir Fourier tayfı yöntemi eğrisel Schrödinger denkleminin iki tekil dalga çözümü için kıyaslanmıştır. Bu benzetim için ilk şart (3-7)'yle tanımlanmıştır. Şekilden görülebileceği üzere bu iki yöntemin kesinliği arasında belirgin bir fark yoktur. İki yöntemle elde edilen sonuçlar arasındaki normalleştirilmiş ortalama karekök fark 0.0032 olarak hesaplanmıştır. Şekil 4'te ise aynı kıyaslama  $N=2048$  bileşenli klasik Fourier tayfı yöntemi ve  $M=256$  sıkıştırılabilir Fourier tayfı yöntemi için yapılmış olup normalleştirilmiş ortalama karekök fark 0.0068 olarak hesaplanmıştır.

Çeşitli parametreler için iki tekil dalga benzetim zamanları ise saniye cinsinden Çizelge 2'de sunulmaktadır. Hesaplama zamanları yine çift 1.8 GHz çekirdekli, 1GB RAM i olan Dell Vostro 1700 model bir bilgisayarda ölçülmüştür. Çizelgedeki her satır için Çizelge 1'de yapıldığı gibi 50 benzetim yapılarak ortalama zaman hesaplanmıştır. Çizelgeden de görülebileceği üzere bir tekil dalga çözümü için elde edilen sonuçların iki tekil dalga çözümü için de geçerli olduğu ve az sayıda zaman basamağı için önerilen yöntemin klasik yöntemle nazaran küçük bir gelişme sağladığı anlaşılabilir.

Bunun nedeni yine  $l_1$  enküçüklemesi için harcanan zamandır. Ancak benzer şekilde zaman basamağı sayısı arttıkça önerilen yöntemin klasik yöntemle nazaran kesinliğinde belirgin bir azalma olmaksızın çok daha kısa sürede benzetim yapabildiği görülebilir. Böylelikle tayf benzetim performansı önerilen yöntemle geliştirilebilir.

Çizelge 2. Schrödinger denkleminin iki tekil dalga çözümü için klasik Fourier tayfı ve önerilen sıkıştırılabilir Fourier tayfı yönteminin performans kıyaslaması.

N	M	Zaman Basamak	Klasik Tayf Yöntemi	Önerilen Yöntem	Normal Rms
		Sayısı	Zamanı(s)	Zamanı(s)	Fark
1024	64	$10^5$	328.01	59.54	0.0160
1024	128	$10^5$	257.04	107.00	0.0052
1024	128	$10^6$	2607.40	501.90	0.0052
1024	256	$10^5$	297.00	242.70	0.0034
2048	256	$10^5$	614.39	532.88	0.0031

## SONUÇLAR

Bu çalışmada hesaplamalı akışkanlar mekaniği çalışmaları için sıkıştırılabilir Fourier tayfı yöntemi önerilmiştir. Bu amaçla eğrisel Schrödinger denklemi ele alınmış ve bu denklemin bir ve iki tekil dalga çözümleri kullanılmıştır. Bu çözümlerin seyrek olması göz önünde bulundurularak klasik Fourier tayfı yöntemine nazaran daha az sayıda bileşen ve sıkıştırılabilir algılama yöntemini kullanan sıkıştırılabilir Fourier tayfı yönteminin, kesinlikte belirgin bir azalma olmaksızın, hesaplama zamanını azaltarak benzetim performansını geliştirebileceği ortaya konmuştur. Özellikle daha fazla sayıda zaman basamağı kullanıldığında önerilen yöntemin çok daha avantajlı olacağı gösterilmiştir. Önerilen yöntem hesaplamalı mekaniğinin başka dallarında kullanılabileceği gibi aynı zamanda sonlu farklar vb. gibi başka hesaplama şemalarında da kullanılabilir.

## KAYNAKLAR

- [1] V. E. Zakharov, Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *Soviet Physics JETP*, 2, 190-194, 1984.
- [2] R. Hirota, Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation, *The Journal of Mathematical Physics*, 14, 805-809, 1973.
- [3] C. Bayındır, *Implementation of a Computational Model for Random Directional Seas and Underwater Acoustics*, M.S. Thesis, University of Delaware, 2009.
- [4] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni and T. A. Zang, *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*, Springer-Verlag, 2006.
- [5] E. A. Karjadi, M. Badiy and J. T. Kirby, Impact of surface gravity waves on high-frequency acoustic propagation in shallow water, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 127, 1787-1787, 2010.
- [6] E. A. Karjadi, M. Badiy, J. T. Kirby and C. Bayındır, The effects of surface gravity waves on high-frequency acoustic propagation in shallow water, *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 37, 112-121, 2012.
- [7] C. Bayındır, Sönümlü-değiştirilmiş Korteweg de-Vries (KdV) denkleminin analitik ve hesaplamalı çözüm karşılaştırması, *XIX. Ulusal Mekanik Kongresi*, KTÜ, Trabzon, 2015.
- [8] L. N. Trefethen, *Spectral Methods in MATLAB*, SIAM, 2000.
- [9] R. H. Hardin and F. D. Tappert, Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equation, *SIAM Review Chronicles*, 15, 423-423, 1973.

- [10] Y. L., Bogomolov and A. D. Yunakovsky, Split-Step Fourier method for nonlinear Schrödinger equation: *Proceedings of the International Conference Day on Diffraction*, 34-42, 2006.
- [11] T. R. Taha and M. J. Ablowitz, Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical Nonlinear Schrödinger Equation, *Journal of Computational Physics*, 22, 203-230, 1984.
- [12] E. J. Candes, J. Romberg and T. Tao, Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information, *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006.
- [13] C. Bayındır, Okyanus dalgalarının sıkıştırılabilir Fourier tayfı yöntemiyle hızlı modellenmesi, *XIX. Ulusal Mekanik Kongresi*, KTÜ, Trabzon, 2015.