LOTKA – VOLTERRA SİSTEMLERİNİN ÇATALLANMA ANALİZİ VE NORMAL FORMLARI

İ. Kuşbeyzi[1] [2], A. Hacınlıyan[2] [3], O.Ö. Aybar[1] [2]

[1]Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü
[2]Yeditepe Üniversitesi, Bilişim Sistemleri ve Teknolojileri Bölümü
[3]Yeditepe Üniversitesi, Fizik Bölümü
ikusbeyzi@yeditepe.edu.tr
ahacinliyan@yeditepe.edu.tr oaybar@yeditepe.edu.tr

ABSTRACT

The predator prey problem involves a model for the relationship between populations of different species that share the same environment in which some of the species prey on the others. The prey is assumed to exhibit linear growth given by a positive parameter. Predator species consume preys with a nonlinear interaction given by another set of parameters that determine the rate of competition between predators. The natural death rate of the predator is assumed to be linear and given by a negative parameter. The qualitative structure and attractors of the system as parameters are varied lead to bifurcation and its analysis has great importance in understanding the nature of the system. A form including a cubic interaction that is shown to introduce additional stability in a simple way suggested by Nutku is studied. The numerical analysis[3] of bifurcation and stability is examined using the MatLab package MATCONT [2].

ÖZET

Avcı av problemi aynı ortamı paylaşan ve bir türün diğerini avladığı farklı türlerin nüfusları arasındaki ilişkiyi ifade eden bir model sunar. Avın pozitif bir parametre ile lineer büyüme sağladığı varsayılmıştır. Avcı türler ise bir diğer parametre kümesi ile avcılar arasındaki rekabet oranını simgeleyen bir lineer olmayan etkileşim ile avları tüketirler. Ayrıca avcıların doğal ölüm oranı negatif bir parametre ile verilmiştir. Parametreler değiştirildiğinde sistemin niteliksel yapısında ve çekicilerinde değişiklikler oluyor ise bu değişikliklere dallanma denir ve analizleri dinamik sistemi anlamada önemli yer tutmaktadır. Nutku tarafından önerilmiş olan ek kararlılık için daha kolay bir yol olan kübik etkileşme incelenmiştir. Dallanma ve kararlılığın nümerik analizi[3] MatLab paketi MATCONT[2] kullanılarak yapılmıştır.

1. GİRİŞ

Son yıllarda lineer olmayan sistemlerde kararlılık analizi için yoğun olarak incelenen bir problem sınıfı aynı ortamı paylaşan iki yada daha çok canlının etkileşmesini modelleyen, avcı av sistemi denilen modellerdir. Canlılardan bazıları diğerlerini avlar, ayrıca canlıların doğum ve ölüm oranları da parametrelerle verilir. Bu şekilde ilk ortaya atılan model Lotka Volterra modelidir. Bu model daha karmaşık modellerin başlangıç noktası olarak önemli ise de kararlılık problemleri[4] nedeniyle gerçekçi bir fiziksel model değildir. Kararlılığın kaybolması, sistemin kaotik davranışa geçişi ve yapısal kararlılık gösteren limit çevrimlerinin incelenmesi bu nedenle önemlidir ve bu inceleme de dallanma analizi ile gerçekleştirilir.

2. LOTKA VOLTERRA MODELİ

Avcı av sistemlerini modelleyen ilk denklem sistemi 1925'te Amerikalı biyofizikçi Alfred Lotka (1880 – 1949) tarafından kimyasal bileşiklerin salınımsal davranış gösterdiği kimyasal tepkimeleri ifade etmek; 1926'da bağımsız olarak İtalyan matematikçi Vito Volterra (1860 – 1940) tarafından I. Dünya Savaşı sırasında Adriyatik Denizindeki avcı balıklar ile avcı balıklar tarafından yenilen av balıklarının nüfusundaki çevrimsel değişiklikleri incelemek için geliştirilmiştir. Avusturya ve İtalya arasındaki savaş, ticari avlanmayı duraksamaya uğrattığından savaştan önceki yıllara oranla avcı balıkların nüfusu artmış, av balıkların nüfusu da azalarak savaş avcı balıklara fayda sağlamıştır. Savaştan sonraki nüfusları da ifade eden klasik Lotka Volterra modeli şu diferansiyel denklem sistemi ile verilmiştir:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

Bu denklemlerin denge noktası civarındaki lineerleştirilmesi sonucunda elde edilen özdeğer şeması aşağıdadır.

Denge noktası	Özdeğerler	
(0,0)	$\{a,-c\}$	Kararsız eyer noktası
$(c/d,a/b)$	$\{-i\sqrt{ac},i\sqrt{ac}\}$	Odak noktası

İlk denge noktası olan orijindeki özdeğerler $\{a,-c\}$ rezonans koşulunu sağlamaz ve bu nokta kararsız bir eyer noktasıdır. İkinci denge noktası ise sanal köklere sahip olup rezonans koşulu sağlandığından sistem rezonans içeren bir normal forma açılabilir. İkinci denge noktasını orijine öteleyerek elde edilmiş sistem:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{bc}{d}y - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{ad}{b}x + dxy$$

ve bu sistemin kompleks dönüşüm yapılarak elde edilmiş yeni sistem aşağıdaki gibidir:

$$\frac{du}{dt} = -i\sqrt{ac}u - b\frac{u^2}{2} - \frac{ib\sqrt{c}u^2}{2\sqrt{a}} + \frac{bv^2}{2} + \frac{ib\sqrt{c}v^2}{2\sqrt{a}}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{bu^2}{2} - \frac{ib\sqrt{c}u^2}{2\sqrt{a}} + i\sqrt{ac}v - \frac{bv^2}{2} + \frac{ib\sqrt{c}v^2}{2\sqrt{a}}$$

Hopf çatallanması doğuran sistemin özdeğerleri normal form açılışında üçüncü mertebeden itibaren her tek mertebede sistemi rezonant yaparlar. İkinci mertebede normal form aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = i\tilde{u}$$

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = -i\tilde{v}$$

Üçüncü mertebede normal form ise şu şekildedir:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = i\tilde{u} - \frac{ib^2}{3}\tilde{u}^2\tilde{v}$$

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = -i\tilde{v} + \frac{ib^2}{3}\tilde{u}\tilde{v}^2$$

Bu denklemlerden $\tilde{u}\tilde{v} = sabit$ ilk entegrali bulunur ve her iki parametrenin de salınımsal bir çözümü olduğu, bu çözümün tüm rezonans mertebelerine genelleştirilebileceği gösterilebilir. Lotka Volterra modeli avcı av nüfuslarının bir çevrimini sunması[5] nedeni ile popüler bir modeldir. Bununla birlikte kararlı bir denge noktasına sahip olmaması gibi göz ardı edilemez bir probleme sahiptir. Nüfus değerleri sönmeden sonsuz bir çevrime girerler. Gerçek hayattaki avcı av sistemleri ise nötr kararlı döngülerinin sürekli bir ailesinin aksine bir veya sonlu sayıda kapalı yörüngeye sahiptir. Bu sebepten dolayı Lotka Volterra modeli kararlı hale ulaşan gerçekçi avcı av ilişkilerini göstermekte başarılı olamaz ve daha gerçekçi modelleri göstermek için ek bilgiye ve bazı genelleştirmelere ihtiyaç duyar.

3. KUADRATİK KENDİ KENDİNE ETKİLEŞİMLİ LOTKA VOLTERRA MODELİ

En basit polinom genelleştirmesi[1] [6] ile sistem

$$\frac{dx}{dt} = a(x - x^2) - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -c(y + y^2) + dxy$$

haline gelir.

Kuadratik kendi kendine etkileşimli bu genelleştirme ile iki yeni denge noktası ortaya çıkar.

Denge noktası	Özdeğerler	
(0,0)	$\{a,-c\}$	Eyer noktası
(1,0)	$\{-a,-c+d\}$	c>d →Kararlı denge noktası
$(\frac{(a+b)c}{ac+bd},\frac{a(-c+d)}{ac+bd})$	Kompleks eşlenik çift	$\frac{a^2c+abc-ac^2+acd}{2(-ac-bd)}<0$ →Kararlı denge noktası $a+b+d=c$ →Odak noktası
(0,-1)	$\{a+b,c\}$	Kararsız denge noktası

Genellemeyi kaybetmeksizin $y=-y$, $a=-1$, $b=-2$, $c=-1$ $d=-2$ alınabilir.

$$\frac{dx}{dt}=-x+x^2+2xy$$

$$\frac{dy}{dt}=y-y^2-2xy$$

Bu denklemlerin denge noktası civarındaki lineerleştirilmesi sonucunda elde edilen özdeğer şeması aşağıdaki gibidir.

Denge noktası	Özdeğerler	
(0,0)	{-1,1}	Eyer noktası
(0,1)	{-1,1}	Eyer noktası
(1/3,1/3)	$\{\frac{i}{\sqrt{3}},\frac{-i}{\sqrt{3}}\}$	Odak noktası
(1,0)	{-1,1}	Eyer noktası

İlk iki ve son denge noktalarına karşılık gelen özdeğerler {-1,1} olduğundan bu denge noktaları eyer noktası ve kararsızdırlar. Üçüncü denge noktası ise sanal köklere sahiptir ve rezonans koşulu sağlandığından sistem rezonans içeren bir normal forma açılabilir. Üçüncü denge noktasını orijine öteleyerek, ardından da özvektörleri oluşturan kompleks değişkenler kullanılarak elde edilmiş sistem şu şekildedir:

$$\frac{du}{dt}=\frac{iu}{\sqrt{3}}-i\sqrt{3}v^2$$

$$\frac{dv}{dt}=i\sqrt{3}u^2-\frac{iv}{\sqrt{3}}$$

İkinci mertebede rezonans yoktur:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=\frac{i\tilde{u}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{d\tilde{v}}{dt}=-\frac{i\tilde{v}}{\sqrt{3}}$$

Üçüncü mertebede ise

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=\frac{i\tilde{u}}{\sqrt{3}}-2\sqrt{3}\tilde{u}^{2}\tilde{v}$$

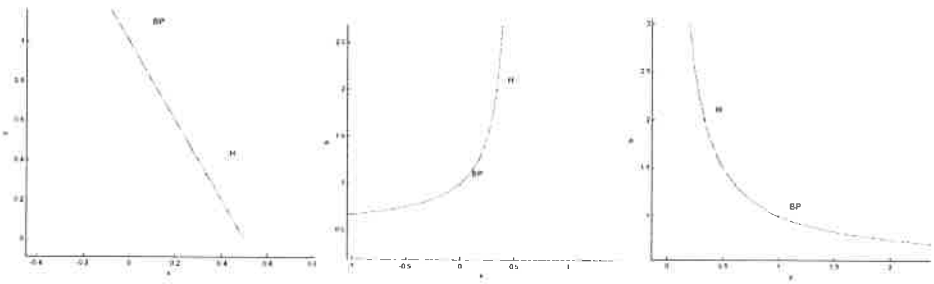
$$\frac{d\tilde{v}}{dt}=-\frac{i\tilde{v}}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}\tilde{u}\tilde{v}^{2}$$

normal form açılımları elde edilir. Beşinci mertebede normal form açılımında üçüncü mertebe terimlerin üzerine $\frac{d\tilde{u}}{dt}$ için $\tilde{u}^{3}\tilde{v}^{2}$, $\frac{d\tilde{v}}{dt}$ için $\tilde{u}^{2}\tilde{v}^{3}$ terimleri ilave olmaktadır. Dikkat edilirse, katsayı değerlerindeki değişiklik dışında bu normal form da bir önceki ile aynıdır.

Bu durum için yapılan çatallanma analizi aşağıdaki grafiklerde görüldüğü gibidir.

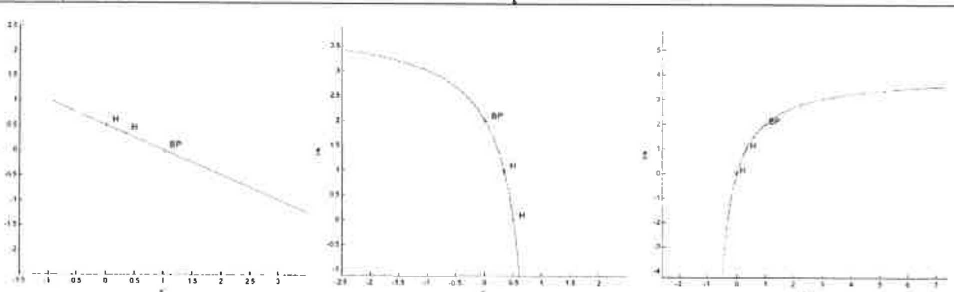
b serbest parametre seçildiğinde:

Nokta	Parametre değeri	Nokta türü	İlk Lyapunov katsayısı
(0.333333,0.333333)	2	Hopf noktası	2.602085e-003
(0,1)	1	Dallanma noktası	



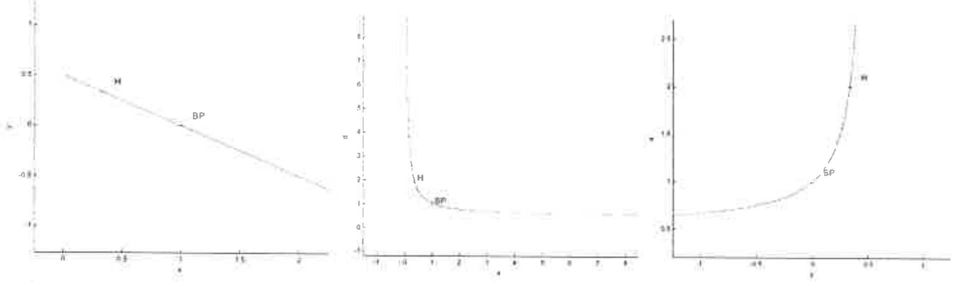
Çatallanma analizinde *c* serbest parametre olarak seçilip diğer parametreler sabit tutularak analiz yapıldığında bir yeni Hopf noktası ortaya çıkar. Bu Hopf noktasının pozitif Lyapunov üsseli verdiği görülür.

Nokta	Parametre değeri	Nokta türü	İlk Lyapunov katsayısı
(0.333333,0.333333)	1	Hopf noktası	-3.469444e-003
(1,0)	2	Dallanma noktası	
(0,0.5)	0	Hopf noktası	2.777778



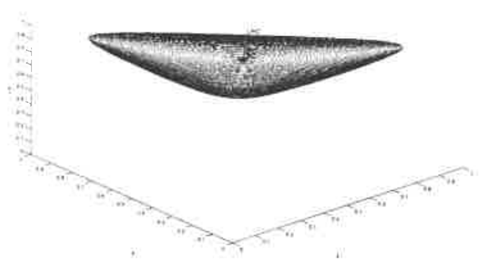
d serbest parametre seçildiğinde:

Nokta	Parametre değeri	Nokta türü	İlk Lyapunov katsayısı
(0.333333,0.333333)	1	Hopf noktası	1.734723e-003
(1,0)	1	Dallanma noktası	



c=1 parametre değerindeki Hopf noktasından kararlı limit çevrimleri ailesi çatallanması aşağıdaki şekilde verilmiştir. Limit noktası çevrim değerleri şu şekildedir:

Periyot	Parametre değeri	Normal form katsayısı
1.088290e+001	1	4.770582e-007
1.088309e+001	1	-1.714848e-007
1.088386e+001	1	-1.422681e-007
1.096150e+001	1	2.714851e-009
1.505690e+001	1	-2.128190e-009



4. KÜBİK KENDİ KENDİNE ETKİLEŞİMLİ LOTKA VOLTERRA MODELİ

Nutku, kuadratik etkileşim yerine kübik etkileşimi içeren yeni bir genelleştirme sunmuştur. Bu daha önce işlenmemiş bir etkileşimdir. Bu sistemin ilginç yanı hem av hem de avcının etkileşim terimi kaldırıldığında sistemin kritik çatallanma yerine periyot çiftleme çatallanmasına gitmesidir.

$$\frac{dx}{dt} = a(x - x^3) - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -c(y + y^3) + dxy$$

Denge noktası	Özdeğerler	
(0,0)	$\{a,-c\}$	Eyer noktası
(0,-i)	$\{a+bi,2c\}$	Kararsız denge noktası
(0,i)	$\{a-bi,2c\}$	Kararsız denge noktası
(1, 0)	$\{-2a, -c-d\}$	Kararlı denge noktası
(-1, 0)	$\{-2a, -c+d\}$	$d<c$ → Kararlı denge noktası

Bu denge noktaları incelendiğinde, kararlı denge noktaları dolayında parametrelerin pozitif değerleri için rezonans içeren bir normal form oluşmayacağı, ayrıca baskın terimler alınınca sistemin

$$\frac{dx}{dt}=-ax^3,\frac{dy}{dt}=-cy^3$$

durumuna geldiği, $V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ şeklinde bir Lyapunov fonksiyonu kullanılarak, $\frac{dV}{dt}=-(ax^4+cy^4)$ sonucu nedeniyle $a>0$ ve $c>0$ için kararlı ve yapısal kararlı olduğu görülebilir.

SONUÇLAR

Bu çalışmada kuadratik kendi kendine etkileşimli iki boyutlu Lotka Volterra sistemlerinin kalıtsal kararlılık göstermediği işlenmiştir. Nutku tarafından önerildiği üzere kararlılığı arttırmanın bir yolu kendi kendine etkileşimi kuadratikten kübiğe çevirmektir. Bu en azından lineerleştirilmiş durumda kararlılığı arttırır. Bu denge noktaları etrafında sistemin davranışını incelemek için normal form yöntemi veya nümerik benzetişim kullanılabilir.
Yazarlar bu problemi önerdiği için Profesör Yavuz Nutku'ya teşekkürü bir borç bilir.

KAYNAKLAR

[1] Broer, H.W., Naudot, V., Roussarie, R., Saleh, K. "Bifurcations of a Predator – Prey Model With Nonmonotonic Response Function" C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341, 601 – 604, 2005.

[2] Dhooge, A., Govaerts, W., Kuznetsov, Yu.A., Mestrom, W., Riet, A.M., and Sautois, B., "MATCONT and CL MATCONT: Continuation toolboxes in matlab" Ghent and Utrecht Universities Preprint,2006.

[3] Ghosh, D., and Chowdhury, A.R., "On the Bifurcation Pattern and Normal Form in a Modified Predator; Prey Nonlinear System" Journal of Computational and Nonlinear Dynamics 2 267-273, 2007.

[4] Gleria, I.M., Figueiredo, A., Rocha Filho, T. M., "Stability Properties of a General Class of Nonlinear Dynamical Systems" J.Phys. A: Math. Gen. 34 3561-3575, 2001.

[5] Pankovic, V., Banjac, D., Glavatovic, R., Predojevic, M., "A Simple Solution of the Lotka – Volterra Equations", http://arxiv.org/abs/q-bio/0607042v1, 2006.

[6] Zhu, H., Campbell, S. A. and Wolkowicz, G. S. K. "Bifurcation Analysis of A Predator-Prey System With Nonmonotonic Functional Response", SIAM J.APPL. MATH. V.63 2, 636-682, 2002.