

**PARÇACIKLI VİSKOZ AKIŞKANLA DOLU
LİFLİ VİSKOELASTİK KALIN TÜPLERDE
DALGA YAYILIMINA LİF DOĞRULTULARININ ETKİSİ**

Rahmiye ERGÜN, Ali ERCENGİZ

İTÜ, Fen-Edebiyat Fakültesi, Mühendislik Bilimleri Bölümü, Maslak, İstanbul

ABSTRACT

In this work, propagation of harmonic waves in initially stressed cylindrical viscoelastic fiber incompressible thick walled tubes filled with a Newtonian fluid is studied. The fluid is assumed to be incompressible and have dusty particles in it. It is considered that the tube is initially subjected to a mean pressure P_i and the axial stretch λ and thus has the radial inflation and the axial stretch. The governing differential equations of the viscoelastic material are obtained utilizing the theory of small deformations superimposed on large initial static deformations. The field equations for the axially symmetric motion are solved by assuming harmonic wave solutions for the variables. A closed form solution can be obtained for equations governing the fluid body, but equations for the solid body are solved numerically by the finite difference method to obtain the effects of the thickness of the tube on the wave characteristics. Dispersion relation for the considered tube is obtained using the long wave approximation and the wave velocities and the transmission coefficients are computed. The importance of the directions of fibers in wave propagation is emphasized.

ÖZET

Bu çalışmada içerisinde akışkan bulunan öngerilmeli, viskoelastik, sıkışmaz, lifli ve kalın duvarlı tüplerde harmonik dalga yayılımı problemi incelenmiştir. Akışkanın sıkışmaz, Newton akışkanı olduğu ve içerisinde parçacıklar bulundurduğu düşünülmüştür. Tüpün λ aksenal germe ve sabit P_i iç basıncının etkisinde ve böylece radyal genişleme ve aksenal uzama ile ön şekildeğişimine uğramış olduğu kabul edilmiştir. Lifli viskoelastik ortama ait yönetici denklemler, “Büyük başlangıç şekil değistirmelerinin üzerine küçük yer değistirmelerin süperpozisyonu” teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Dalga yayılımına ait yönetici diferansiyel denklemlerin harmonik dalga çözümleri aksenal simetrik hareket durumu için ele alınmıştır. Akışkana ait diferansiyel denklemlere kapalı bir çözüm vermek mümkün olabilmiş, fakat katı fazı yöneten diferansiyel denklemlere, dalga karakteristiklerine tüp kalınlığının etkisini de elde etmek için sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözüm aranmıştır. Ele alınan tüp için, uzun dalga yaklaşımında, dispersiyon bağıntısı elde edilmiş, dalga hızları ve taşıma katsayıları hesaplanmıştır. Tüp malzemesine ait liflerin doğrultularının dalga yayılımında oldukça etkili olduğu gözlenmiştir.

Parçacıklı akışkana ilişkin denklemler

Çalışmada sıkışmaz ve Newtonyen olarak göz önüne alınan akışkanın (kanın) parçacıklar içerdiği ve bir P_i büyük statik ön basıncının etkisinde kaldığı varsayılmıştır. Bunun yanı sıra akışkanın hareketi sırasında küçük hız ve basınç artımlarının bu başlangıç alanına eklendiği düşünülmüştür. Sıfır başlangıç hızıyla, kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği durumda ve eksenel simetrik hareket için silindirik koordinatlarda alan denklemleri aşağıdaki şekilde bulunur [1]:

$$(1-\varphi)\rho_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (1-\varphi) \left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \hat{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} - \frac{\hat{u}}{r^2} \right) \right] + \frac{Nm}{\tau} (\hat{u}_s - \hat{u}), \quad (1)$$

$$(1-\varphi)\rho_0 \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} = (1-\varphi) \left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \hat{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right) \right] + \frac{Nm}{\tau} (\hat{w}_s - \hat{w}), \quad (2)$$

$$Nm \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial t} = \varphi \left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \hat{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} - \frac{\hat{u}}{r^2} \right) \right] + \frac{Nm}{\tau} (\hat{u} - \hat{u}_s), \quad (3)$$

$$Nm \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial t} = \varphi \left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \hat{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right) \right] + \frac{Nm}{\tau} (\hat{w} - \hat{w}_s). \quad (4)$$

Burada (\hat{u}, \hat{w}) ve (\hat{u}_s, \hat{w}_s) , sırasıyla akışkan ve parçacıkların radyal ve eksenel doğrultudaki hız bileşenleridir. \hat{p} basıncı, $\hat{\mu}$ viskoziteyi, φ karışımın her bir birim hacminde bulunan parçacıkların oluşturduğu hacmi, ρ_0 akışkanın yoğunluğunu, m bir parçacığın kütesini, N birim hacimdeki parçacıkların sayısını göstermektedir. τ gevşeme zamanıdır ve $\tau = m/K$, $K = 6\pi\hat{\mu}a$ olup a parçacıkların yarıçapıdır. Akışkanın sıkışmazlık koşulu

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\hat{u}}{r} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

ile verilmektedir. Sınır koşullarında kullanılacak olan gerilme bileşenleri

$$\hat{i}_{rr} = -\hat{p} + 2\hat{\mu} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r}, \quad \hat{i}_{rz} = \hat{\mu} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} \right) \quad (6)$$

ile verilir.

Tüp malzemesi için denklemler

Tüp malzemesi sıkışmaz, viskoelastik, kalın duvarlı ve lifli yapıda varsayılmıştır. Silindirik tüp bir statik P_i iç basıncı ve sabit λ germesi etkisinde kaldığında cisimde t_{kl}^0 başlangıç gerilme alanı oluşacaktır. Ele alınan tüp için, Σ şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu C Green şekil değiştirme tansörünün yanı sıra malzemenin lifli yapısını gösteren lifler doğrultusunda birim vektörler olan \mathbf{a}_{01} ve \mathbf{a}_{02} nin de fonksiyonu olacaktır. Σ fonksiyonu,

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{a}_{0i} \otimes \mathbf{a}_{0i}, \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

olmak üzere

$$I_1(\mathbf{C}) = \text{tr } \mathbf{C}, \quad I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}) = \mathbf{C} : \mathbf{A}_1, \quad I_6(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{02}) = \mathbf{C} : \mathbf{A}_2 \quad (8)$$

invariantlarının fonksiyonu olarak

$$\Sigma(\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \Sigma_{izo}(I_1) + \Sigma_{anizo}(I_4, I_6) \quad (9)$$

şeklinde alınabilir [2]. Burada

$$\mathbf{a}_{01}^T = [0 \quad \cos \hat{\beta} \quad \sin \hat{\beta}], \quad \mathbf{a}_{02}^T = [0 \quad \cos \hat{\beta} \quad -\sin \hat{\beta}] \quad (10)$$

olarak alınmıştır ve $\hat{\beta}$ liflerin doğrultusunun tüp eksenine dik olan doğrultu ile yaptığı açıdır. Ön şekildeğiştirme yapmış cisim bünye bağıntısı [3] ten yararlanarak

$$t_{kl}^0 = \bar{P}^0 \delta_{kl} + 2 \left(c_{kl}^{-10} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1^0} + d_{1w}^0 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4^0} + d_{2w}^0 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6^0} \right) \quad (11)$$

şeklinde elde edilir. Burada \bar{P}^0 hidrostatik basınç terimi, c_{kl}^{-10} başlangıç statik şekildeğişimi durumundaki Finger şekil değiştirme tansörü ve I_1^0 , c_{kl}^{-10} tansörünün tanımı (8) ile verilen birinci invariantsıdır. I_4^0 ve I_6^0 ifadeleri ise ifadeleri (8) ile verilen invariantslardır. Ayrıca \mathbf{d}_1^0 ve \mathbf{d}_2^0 tansörleri de $\mathbf{d}_1^0 = \mathbf{F}\mathbf{A}_1\mathbf{F}^T$, $\mathbf{d}_2^0 = \mathbf{F}\mathbf{A}_2\mathbf{F}^T$ şeklinde tanımlanmıştır. Burada \mathbf{F} şekil değiştirme gradyanı tansörüdür. Bu çalışmada, izotrop şekil değiştirme için, biyolojik yumuşak dokular için Demiray [4] tarafından önerilen, anizotrop şekil değiştirme için ise Holzapfel ve diğerleri [2] tarafından önerilen ve bünyesinde kolajen liflerin bulunduğu durumu yansıtmakta olan şekil değiştirme enerjisi fonksiyonları kullanılmıştır:

$$\Sigma_{izo}(I_1) = \frac{\beta}{2\alpha} \{ \exp[\alpha(I_1 - 3)] - 1 \}, \quad \Sigma_{anizo}(I_4, I_6) = \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \{ \exp[k_2(I_i - 1)^2] - 1 \}. \quad (12)$$

Burada α , β , k_1 ve k_2 malzeme sabitleridir. Kütle kuvvetlerinin sıfır olduğu durum için denge denklemlerinin ve damarın iç ve dış yüzeyinde sağlanması gereken sınır koşullarının kullanılmasıyla sıfır olmayan gerilme bileşenleri ve P_i iç basıncı silindirik koordinatlarda

$$\begin{aligned} t_{rr}^0 &= \frac{\beta}{\lambda^2} \int_{x_j}^x \left(\zeta + \frac{\lambda}{\zeta} \right) F_1(\zeta) d\zeta + 4k_1 \cos^2 \hat{\beta} \int_{x_j}^x \frac{1}{\zeta (\lambda - \zeta^2)} \left(\frac{1}{\zeta^2} \cos^2 \hat{\beta} + \lambda^2 \sin^2 \hat{\beta} - 1 \right) F_2(\zeta) d\zeta, \\ t_{\theta\theta}^0 &= t_{rr}^0 + \frac{\beta}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{x^2} - x^2 \right) F_1(x) + 4k_1 \cos^2 \hat{\beta} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x^2} \cos^2 \hat{\beta} + \lambda^2 \sin^2 \hat{\beta} - 1 \right) F_2(x), \\ t_{zz}^0 &= t_{rr}^0 + \frac{\beta}{\lambda^2} (\lambda^4 - x^2) F_1(x) + 4\lambda^2 k_1 \sin^2 \hat{\beta} \left(\frac{1}{x^2} \cos^2 \hat{\beta} + \lambda^2 \sin^2 \hat{\beta} - 1 \right) F_2(x), \\ P_i &= \frac{\beta}{\lambda^2} \int_{x_i}^{x_d} \left(\zeta + \frac{\lambda}{\zeta} \right) F_1(\zeta) d\zeta + 4k_1 \cos^2 \hat{\beta} \int_{x_i}^{x_d} \frac{1}{\zeta (\lambda - \zeta^2)} \left(\frac{1}{\zeta^2} \cos^2 \hat{\beta} + \lambda^2 \sin^2 \hat{\beta} - 1 \right) F_2(\zeta) d\zeta, \\ \bar{P}^0 &= t_{rr}^0 - \frac{\beta}{\lambda^2} x^2 F_1(x), \quad x \equiv \frac{R}{r} \end{aligned} \quad (13)$$

şeklinde elde edilir. Burada R ve r , maddesel noktanın şekildeğişiminden önce ve sonraki radyal koordinatlarıdır. (i) ve (d) indisleri ilgili büyüklüğün tüpün iç ve dış yüzeyinde aldığı değerleri göstermektedir. Burada invariantslar

$$I_1^0 = \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{1}{x^2} + \lambda^2, \quad I_4^0 = I_6^0 = \bar{I} = \frac{1}{x^2} \cos^2 \hat{\beta} + \lambda^2 \sin^2 \hat{\beta} \quad (14)$$

olmak üzere

$$F_1(x) = \exp[\alpha(I_1^0 - 3)], \quad F_2(x) = \exp[k_2(\bar{I} - 1)^2] \quad (15)$$

şeklinindedir. Verilmiş olan bu başlangıç alanının üzerine küçük artımsal şekil değiştirmeler süperpoze edildiğinde alan denklemleri kütle kuvvetlerinin sıfır olduğu durum için [5]

$$\bar{T}_{.k}^{kl} = \rho \frac{\partial^2 u^l}{\partial t^2} \quad (16)$$

olarak verilmektedir. Burada ρ ile tüp malzemesinin yoğunluğu, \bar{T}^{kl} ile artımsal Piola-Kirchhoff tansörü bileşenleri ve u^l ile de artımsal yer değiştirme vektörü bileşenleri gösterilmektedir. Artımsal Piola-Kirchhoff tansörü

$$\bar{T}^{kl} = t^{0km} u_{.m}^l + \bar{t}_{kl} \quad (17)$$

ile verilmektedir. Burada \bar{t}_{kl} artımsal Cauchy gerilme tansörü olup ele alınan durum için

$$\begin{aligned} \bar{t}_{kl} = & \bar{p} \delta_{kl} - 2\bar{P}^0 \bar{e}_{kl} + [2\alpha\beta c_{kl}^{-1^0} c_{mn}^{-1^0} \bar{e}_{mn} + 2\mu \bar{a}_{kl}] \exp[\alpha(I_1^0 - 3)] \\ & + [4k_1 + 8k_1 k_2 (I_4^0 - 1)^2] \exp[k_2 (I_4^0 - 1)^2] d_{1r}^0 d_{1s}^0 \bar{e}_{rs} \\ & + [4k_1 + 8k_1 k_2 (I_6^0 - 1)^2] \exp[k_2 (I_6^0 - 1)^2] d_{2r}^0 d_{2s}^0 \bar{e}_{rs} \end{aligned} \quad (18)$$

şeklinde hesaplanır. Burada \bar{a}_{kl} artımsal şekil değiştirme hızı tansörü bileşenlerini ve \bar{p} artımsal hidrostatik basıncı göstermektedir. \bar{e}_{kl} sonsuz küçük birim şekil değiştirme tansörüdür. Tüp malzemesinin sıkışmazlık koşulu da

$$u^k_{.k} = 0 \quad (19)$$

denklemleri ile ifade edilebilir. Artımsal alanı tamamen belirleyebilmek için (16-17) denklemleri

$$\bar{T}_{kl} n_k = \bar{t}_l - \bar{e}_{(n)} t_l^0, \quad S \text{ üzerinde, } e_{(n)} = e_{ij} n_i n_j \quad (20)$$

sınır koşulları ile sağlanmalıdır. Burada \mathbf{n} , katı cismin S yüzeyi üzerindeki birim dış normal vektördür, t_l^0 ise başlangıç konumunda \mathbf{n} vektörü doğrultusundaki alan elemanına etkileyen gerilme vektörü olup $t_l^0 = t_{kl}^0 n_k$ ile verilmiştir. \bar{t}_l ise \mathbf{n} vektörü doğrultusundaki alan elemanına etkileyen artımsal gerilme vektörüdür. \bar{t}_{kl} artımsal gerilme tansörü

$$\bar{t}_{kl} = t_{km}^0 u_{l,m} + t_{ml}^0 u_{k,m} + \bar{t}_{kl} \quad (21)$$

ile verilir. Eksenel simetrik artımsal hareket göz önüne alındığında $u_1 = u(r, z, t)$, $u_2 = 0$, $u_3 = w(r, z, t)$ olur. Burada u ve w sırasıyla radyal ve eksenel doğrultulardaki yer değiştirme bileşenlerini göstermektedir. Bu durumda (18) den silindirik koordinatlarda Cauchy artımsal gerilme tansörü bileşenleri ile (17) den artımsal Piola-Kirchhoff tansörünün bileşenleri elde

edilerek (16) ile verilen yönetici diferansiyel denklemlerde kullanıldığında ve (19) sıkışmazlık koşulunun da göz önüne alınmasıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \bar{\beta}_1(r) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \bar{\beta}_2(r) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \bar{\beta}_3(r) \frac{u}{r^2} + \bar{\beta}_4(r) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \bar{\alpha}_{10} \frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial t} + \bar{\alpha}_{10} \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} \\ + \left(2 \frac{d\bar{\alpha}_{10}}{dr} + \frac{\bar{\alpha}_{10}}{r} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial t} - \frac{\bar{\alpha}_{10}}{r^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \bar{\beta}_5(r) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \bar{\beta}_6(r) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \bar{\beta}_7(r) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \bar{\beta}_8(r) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \bar{\alpha}_{10} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial t} + \bar{\alpha}_{10} \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial t} \\ + \left(\frac{d\bar{\alpha}_{10}}{dr} + \frac{\bar{\alpha}_{10}}{r} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} + \frac{d\bar{\alpha}_{10}}{dr} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

denklemleri elde edilir. Burada kullanılmış olan $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_8$ ve $\bar{\alpha}_{10}$ katsayıları ise başlangıç şekildeğişimine bağlı olan katsayılardır. Bu denklemler (20) ile verilen ve ele alınan durum için

$$\begin{aligned} \bar{T}_{rr} |_{r=r_i} = (\hat{t}_{rr} - t_{rr}^0 \frac{\partial u}{\partial r}) |_{r=r_i}, \quad \bar{T}_{rz} |_{r=r_i} = \hat{t}_{rz} |_{r=r_i}, \quad \bar{T}_{rr} |_{r=r_e} = 0, \quad \bar{T}_{rz} |_{r=r_e} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{r=r_i} = \hat{u} \Big|_{r=r_i}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{r=r_i} = \hat{w} \Big|_{r=r_i} \end{aligned} \quad (23)$$

şeklinde yazılan sınır koşullarını sağlamalıdır.

Alan denklemlerinin çözümü

Alan denklemlerine harmonik dalga çözümü aranacağı için

$$(\hat{u}, \hat{w}, \hat{p}) = [\hat{U}(r), \hat{W}(r), \hat{P}(r)] \exp[i(\omega t - kz)] \quad (24)$$

$$(\hat{u}_s, \hat{w}_s) = [\hat{U}_s(r), \hat{W}_s(r)] \exp[i(\omega t - kz)] \quad (25)$$

$$(u, w, \bar{p}) = [\bar{U}(r), \bar{W}(r), \bar{P}(r)] \exp[i(\omega t - kz)] \quad (26)$$

olarak alınmıştır. Burada ω açısal frekansı, k dalga sayısını, $\hat{U}(r), \hat{W}(r), \hat{P}(r), \hat{U}_s(r), \hat{W}_s(r), \bar{U}(r), \bar{W}(r)$ ve $\bar{P}(r)$ ise dalga genliklerini göstermektedir. (24) ve (25) in (1-4) te kullanılmasıyla $\hat{U}, \hat{W}, \hat{P}, \hat{U}_s, \hat{W}_s$ için

$$\hat{U}(r) = \frac{k}{\hat{\mu}(k^2 + s^2)} I_1(kr) A_0 + \frac{ik}{s} J_1(sr) B_0, \quad \hat{W}(r) = -\frac{ik}{\hat{\mu}(k^2 + s^2)} I_0(kr) A_0 + J_0(sr) B_0, \quad (27)$$

$$\hat{U}_s = l^2 \hat{U}, \quad \hat{W}_s = l^2 \hat{W}, \quad \hat{P}(r) = I_0(kr) A_0 \quad (28)$$

sonuçları elde edilir. Bu ifadelerdeki $J_n(sr)$ ve $I_n(kr)$ fonksiyonları sırasıyla, n . mertebeden birinci tür Bessel ve modifiye Bessel fonksiyonları olup

$$f = \frac{Nm}{\rho_0}, \quad v = \frac{\hat{\mu}}{\rho_0}, \quad l^2 = \frac{f + \varphi(1-\varphi)i\omega\tau}{f[1+(1-\varphi)i\omega\tau]}, \quad s^2 = -k^2 - \frac{i\omega[(1+i\omega\tau)(1-\varphi)+f]}{v i\omega\tau(1-\varphi)+1} \quad (29)$$

şeklindedir (A_0 ve B_0 integral sabitleridir). (26) ifadesi (22) denklemlerinde kullanıldığında

$$\frac{dP}{d\xi} + \bar{\beta}_1 \frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{\bar{\beta}_2}{\xi} \frac{dU}{d\xi} + \left[\frac{\bar{\beta}_3}{\xi^2} + (\Omega^2 - \bar{\beta}_4\eta^2) \frac{1}{\bar{x}^2} \right] U = 0, \quad (30)$$

$$-i\eta P \frac{1}{\bar{x}} + \bar{\beta}_3 \frac{d^2W}{d\xi^2} + \frac{\bar{\beta}_6}{\xi} \frac{dW}{d\xi} - i\eta \frac{1}{\bar{x}\xi} \bar{\beta}_7 U + \frac{1}{\bar{x}^2} (\Omega^2 - \bar{\beta}_8\eta^2) W = 0, \quad (31)$$

$$\frac{dU}{d\xi} + \frac{U}{\xi} - i\eta \frac{1}{\bar{x}} W = 0 \quad (32)$$

kısmi türevli diferansiyel denklem takımına ulaşılır. Burada $\bar{\beta}_i$ ($i=1, \dots, 8$) katsayıları

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_1 &= \beta_1 + i\Omega\alpha_{10}, & \bar{\beta}_2 &= \beta_2 + 2i\Omega\xi \frac{d\alpha_{10}}{d\xi} + i\Omega\alpha_{10}, & \bar{\beta}_3 &= \beta_3 - i\Omega\alpha_{10}, \\ \bar{\beta}_4 &= \beta_4 + i\Omega\alpha_{10}, & \bar{\beta}_5 &= \beta_5 + i\Omega\alpha_{10}, & \bar{\beta}_6 &= \beta_6 + i\Omega\xi \frac{d\alpha_{10}}{d\xi} + i\Omega\alpha_{10}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\bar{\beta}_7 = \beta_7 + i\Omega\xi \frac{d\alpha_{10}}{d\xi}, \quad \bar{\beta}_8 = \beta_8 + i\Omega\alpha_{10}.$$

şeklindedir ve

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \bar{r}U, \quad \bar{W} = \bar{r}W, \quad \bar{P} = \beta P, \quad \eta = k\bar{R}, \quad \bar{\beta}_j = \beta\beta_j, \quad j=1, \dots, 8, \\ \bar{\alpha}_{10} &= \sqrt{\beta\rho} \bar{R}\alpha_{10}, \quad \omega = \frac{c_0}{\bar{R}}\Omega, \quad c_0 = \sqrt{\beta/\rho}, \quad \bar{x} = \bar{R}/\bar{r}, \quad r = \bar{r}\xi \end{aligned} \quad (34)$$

boyutsuz büyüklükleri tanımlanmış olup $\bar{r} = (r_i + r_d)/2$, $\bar{R} = (R_i + R_d)/2$ şeklindedir. Burada R_i ve R_d damarın ön şekildeğişiminden önceki, r_i ve r_d ise ön şekildeğişiminden sonraki, sırasıyla iç ve dış yarıçaplarını göstermektedir. (23) sınır koşulları ise, (26) ifadesini kullanarak

$$\begin{aligned} & \left[P + 2(\alpha_1 - \alpha_3) \frac{U}{\xi} + (\beta_1 + \beta_3 + 2i\Omega\alpha_{10}) \frac{dU}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_i} \\ & - \left[-\frac{\bar{f}(\xi_i)}{\eta} + \frac{2\eta\bar{x}}{(\eta^2 + \gamma^2)\xi_i} \left(\frac{\bar{f}(\xi_i)\xi_i}{\bar{x}} - 1 \right) \right] A + \left[\frac{2i\eta}{\gamma\xi_i} \left(1 - \frac{\bar{g}(\xi_i)\xi_i}{\bar{x}} \right) \right] B = 0, \\ & \left[(\beta_5 + i\Omega\alpha_{10}) \frac{dW}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_i} + \left[\frac{\eta}{\bar{x}} (iP^0 + \Omega\alpha_{10}) U \right]_{\xi=\xi_i} + \frac{2i\eta^2}{\eta^2 + \gamma^2} A + \frac{\gamma^2 - \eta^2}{\gamma} B = 0, \\ & \left[P + 2(\alpha_1 - \alpha_3) \frac{U}{\xi} + (\beta_1 - P^0) \frac{dU}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_d} + 2i\alpha_{10}\Omega \frac{dU}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_d} = 0, \end{aligned}$$

$$\left[(\beta_3 + i\Omega\alpha_{10}) \frac{dW}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_i} + \left[\frac{\eta}{\bar{x}} (iP^0 + \Omega\alpha_{10}) U \right]_{\xi=\xi_d} = 0, \quad (35)$$

$$i \frac{\Omega^2}{\bar{x}^2} U(\xi_i) - \frac{\eta q \bar{\alpha}^2}{(\eta^2 + \gamma^2) \bar{x}} A - \frac{i\eta q \bar{\alpha}^2}{\gamma \bar{x}} B = 0, \quad i \frac{\Omega^2}{\bar{x}^2} W(\xi_i) + \frac{i\bar{f}(\xi_i) q \bar{\alpha}^2}{(\eta^2 + \gamma^2) \bar{x}} A - \frac{\bar{g}(\xi_i) q \bar{\alpha}^2}{\gamma \bar{x}} B = 0$$

olarak bulunur. Burada

$$A = \frac{A_0}{\beta} I_1(\eta \xi_i / \bar{x}), \quad B = \frac{B_0 \hat{\mu}}{\beta R} J_1(\gamma \xi_i / \bar{x}), \quad \bar{f}(\xi) = \frac{\eta I_0(\eta \xi / \bar{x})}{I_1(\eta \xi / \bar{x})}, \quad \bar{g}(\xi) = \frac{\gamma J_0(\gamma \xi / \bar{x})}{J_1(\gamma \xi / \bar{x})} \quad (36)$$

şekindedir ve $\bar{\alpha}_1$ ile $\bar{\alpha}_3$ başlangıç şekildeğişimine bağlı olan katsayılar olmak üzere

$$\gamma = s\bar{R}, \quad q = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{\alpha}^2 = \frac{\omega \bar{R}^2}{\nu}, \quad \bar{P}^0 = \beta P^0, \quad \bar{\alpha}_1 = \beta \alpha_1, \quad \bar{\alpha}_3 = \beta \alpha_3, \quad r_i = \bar{r} \xi_i, \quad r_o = \bar{r} \xi_o \quad (37)$$

tanımlamalarıyla boyutsuzlaştırma yapılmıştır. Burada tanımlanan $\bar{\alpha}$ büyüklüğü Womersley parametresidir. $\phi(\xi) = \int_0^\xi \zeta W(\zeta) d\zeta$ şeklinde bir fonksiyon tanımlandığında (32) den

$$U(\xi) = \frac{i\eta}{\xi \bar{x}} \phi(\xi), \quad W(\xi) = \frac{1}{\xi} \frac{d\phi}{d\xi} \quad (38)$$

olarak ifade edilebilirler. Bunların (30-31) ve (35) te yerlerine yazılmasıyla bulunan denklem sisteminin analitik çözümünü elde etmek genellikle mümkün değildir. Dalga karakteristiklerine tüp kalınlığının etkisini de elde edebilmek için denklemlerin çözümü sonlu farklar yöntemi ile sayısal olarak aranacaktır [1]. Sonlu farklar yöntemini uygulayabilmek için tüp kalınlığı $\bar{h} = r_o - r_i$, n eşit aralığa bölünür. Böylece, ξ_j tüp kalınlığını gösteren uzunluk üzerindeki düğüm noktalarını göstermek üzere

$$\xi_j = \xi_0 + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad \xi_0 = \xi_i = 1 - \frac{nh}{2}, \quad \xi_n = \xi_o, \quad h = \frac{\bar{h}}{n\bar{r}} \quad (39)$$

yazılabilir. Bir ξ_j noktasında fonksiyonun değeri j alt indisi ile gösterildiğinde ve uygun sonlu fark ifadeleri kullanıldığında (30-31) ve (35) denklemlerinden

$$h(P_{j+1} - P_j) + \bar{\beta}_{1j} \frac{i\eta}{\bar{x} \xi_j} \phi_{j+2} + \frac{i\eta}{\bar{x}} z_{1j} \phi_{j+1} + \frac{i\eta}{\bar{x}} \left[z_{2j} + h^2 (\Omega^2 - \bar{\beta}_{4j} \eta^2) \frac{1}{\bar{x}^2 \xi_j} \right] \phi_j = 0,$$

$$-i\eta P_j \frac{h^3}{\bar{x}} + \bar{\beta}_{3j} \frac{1}{\xi_j} \phi_{j+3} + z_{3j} \phi_{j+2} + \left[z_{4j} + \frac{h^2}{\bar{x}^2} (\Omega^2 - \bar{\beta}_{8j} \eta^2) \frac{1}{\xi_j} \right] \phi_{j+1}$$

$$+ \left[z_{5j} - \frac{h^2}{\bar{x}^2} (\Omega^2 - \bar{\beta}_{8j} \eta^2) \frac{1}{\xi_j} \right] \phi_j = 0,$$

$$P_n + \left(\bar{\beta}_{1n} - P_n^0 + i\gamma_2 F_1(x_n) \right) \frac{i\eta}{\xi_n h \bar{x}} \phi_{n+1} + \left[- \left(\bar{\beta}_{1n} - P_n^0 + i\gamma_2 F_1(x_n) \right) \left(\frac{1}{\xi_n} + \frac{1}{h} \right) + 2 \frac{\alpha_{1n} - \alpha_{3n}}{\xi_n} \right] \frac{i\eta}{\xi_n \bar{x}} \phi_n = 0$$

$$\begin{aligned}
P_0 + \left(\bar{\beta}_{10} + \bar{\beta}_{30} \right) \frac{i\eta}{\xi_0 \bar{x} h} \phi_1 + \left[\frac{2(\alpha_{10} - \alpha_{30})}{\xi_0} - \left(\bar{\beta}_{10} + \bar{\beta}_{30} \right) \left(\frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{h} \right) \right] \frac{i\eta}{\xi_0} \phi_0 \\
- \left[-\frac{\bar{f}(\xi_0)}{\eta} + \frac{2\eta \bar{x}}{(\eta^2 + \gamma^2) \xi_0} \left(\frac{\bar{f}(\xi_0) \xi_0}{\bar{x}} - 1 \right) \right] A + \left[\frac{2i\eta}{\gamma \xi_0} \left(1 - \frac{\bar{g}(\xi_0) \xi_0}{\bar{x}} \right) \right] B = 0, \\
\frac{1}{\xi_0} \bar{\beta}_{50} \phi_2 - \frac{\bar{\beta}_{50}}{\xi_0} \left(\frac{h}{\xi_0} + 2 \right) \phi_1 + \frac{1}{\xi_0} \left[\frac{\bar{\beta}_{50}}{\xi_0} h + \bar{\beta}_{50} + \frac{\eta^2}{\bar{x}^2} (iP_0^0 + \gamma_2 F_1(x_0)) i h^2 \right] \phi_0 \\
+ \frac{2i\eta^2 h^2}{\eta^2 + \gamma^2} A + \frac{(\gamma^2 - \eta^2) h^2}{\gamma} B = 0, \\
\frac{1}{\xi_n} \bar{\beta}_{5n} \phi_{n+2} - \frac{\bar{\beta}_{5n}}{\xi_n} \left(\frac{h}{\xi_n} + 2 \right) \phi_{n+1} + \frac{1}{\xi_n} \left[\frac{h}{\xi_n} \bar{\beta}_{5n} + \bar{\beta}_{5n} + \frac{\eta^2 i}{\bar{x}^2} (iP_n^0 + \gamma_2 F_1(x_n)) h^2 \right] \phi_n = 0, \\
\frac{\Omega^2}{\bar{x}^3} \frac{\eta}{\xi_0} \phi_0 + \frac{\eta q \bar{\alpha}^2}{(\eta^2 + \gamma^2) \bar{x}} A + \frac{i\eta q \bar{\alpha}^2}{\gamma \bar{x}} B = 0, \quad i \frac{\Omega^2}{\bar{x}} \frac{1}{\xi_0} \frac{1}{h} (\phi_1 - \phi_0) + \frac{i \bar{f}(\xi_0) q \bar{\alpha}^2}{(\eta^2 + \gamma^2) \bar{x}} A - \frac{\bar{g}(\xi_0) q \bar{\alpha}^2}{\gamma \bar{x}} B = 0
\end{aligned} \tag{40}$$

denklemlerine ulaşılır. Burada

$$\begin{aligned}
z_{1j} &= \left[-2\bar{\beta}_{1j} \xi_j + h(\bar{\beta}_{2j} - 2\bar{\beta}_{1j}) \right] \frac{1}{\xi_j^2}, \quad z_{2j} = \left[\bar{\beta}_{1j} \xi_j^2 - h(\bar{\beta}_{2j} - 2\bar{\beta}_{1j}) \xi_j + h^2(2\bar{\beta}_{1j} - \bar{\beta}_{2j} + \bar{\beta}_{3j}) \right] \frac{1}{\xi_j^3}, \\
z_{3j} &= -3\bar{\beta}_{5j} \frac{1}{\xi_j} + h(\bar{\beta}_{6j} - 2\bar{\beta}_{5j}) \frac{1}{\xi_j^2}, \quad z_{4j} = 3\bar{\beta}_{5j} \frac{1}{\xi_j} - 2h(\bar{\beta}_{6j} - 2\bar{\beta}_{5j}) \frac{1}{\xi_j^2} + h^2(2\bar{\beta}_{5j} - \bar{\beta}_{6j}) \frac{1}{\xi_j^3}, \\
z_{5j} &= -\bar{\beta}_{3j} \frac{1}{\xi_j} + h(\bar{\beta}_{6j} - 2\bar{\beta}_{5j}) \frac{1}{\xi_j^2} - h^2(2\bar{\beta}_{5j} - \bar{\beta}_{6j}) \frac{1}{\xi_j^3} + \frac{\eta^2 h^3}{\bar{x}^2 \xi_j^2} \bar{\beta}_{7j},
\end{aligned} \tag{41}$$

$$P_j^0 = P^0(x_j), \quad x_j = \left[\lambda(\bar{r}^2 \xi_j^2 - r_i^2) + R_i^2 \right]^{1/2} / \bar{r} \xi_j$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_1 &= \beta_1 + i\gamma_2 F_1, \quad \bar{\beta}_2 = \beta_2 + 2i\gamma_2 \xi \frac{dF_1}{d\xi} + i\gamma_2 F_1, \quad \bar{\beta}_3 = \beta_3 - i\gamma_2 F_1, \quad \bar{\beta}_4 = \beta_4 + i\gamma_2 F_1, \\
\bar{\beta}_5 &= \beta_5 + i\gamma_2 F_1, \quad \bar{\beta}_6 = \beta_6 + i\gamma_2 \xi \frac{dF_1}{d\xi} + i\gamma_2 F_1, \quad \bar{\beta}_7 = \beta_7 + i\gamma_2 \xi \frac{dF_1}{d\xi}, \quad \bar{\beta}_8 = \beta_8 + i\gamma_2 F_1, \\
\beta_{ij} &= \beta_i(x_j), \quad \bar{\beta}_{ij} = \bar{\beta}_i(x_j), \quad \alpha_{ij} = \alpha_i(x_j), \quad \Omega \alpha_{10} = \gamma_2 F_1(\xi), \quad (\gamma_2 = \omega \mu / \beta)
\end{aligned} \tag{42}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu denklemlerde yer alan ve sayısal incelemede önem kazanan $\bar{\alpha}$ ve γ_2 parametreleri arasında

$$\gamma_2 = \bar{\alpha}^2 \gamma_3, \quad \gamma_3 = \frac{\nu \mu}{R^2 \beta} \tag{43}$$

ilişkisi vardır. P_j, ϕ_j ($j=0,1,\dots,n$), A ve B bilinmeyenlerine göre sıfır olmayan çözüme sahip olması için (40) homojen denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Bu gereklilik dalga hareketine ait dispersiyon bağıntısını verir.

Uzun dalga yaklaşımı ve viskoz akışkanla dolu kalın tüp durumu:

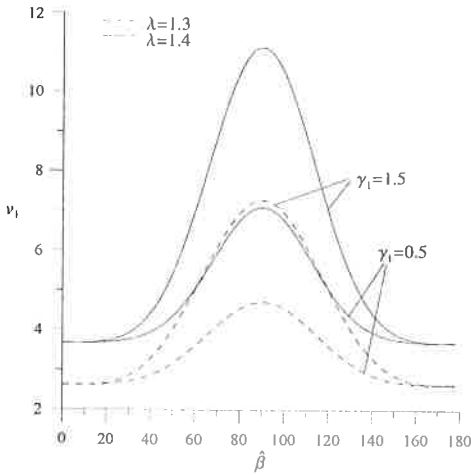
Uzun dalga yaklaşımında denklemler sonlu farklar yöntemiyle incelenmiştir. Yöntemi uygularken tüp kalınlığına ait alt aralık sayısı $n=4$ olarak alınmıştır. Başlangıç şekil değişiminin de var olduğu düşünülmüş ve ayrıca

$$\begin{aligned} R_1 &= 0.31 \text{cm}, \quad R_2 = 0.38 \text{cm}, \quad \alpha = 1.948, \quad \eta = 0.01 \\ k_2 &= 0.7112, \quad \varphi = 0.01, \quad \omega\tau = 1, \quad q = 1 \end{aligned} \quad (44)$$

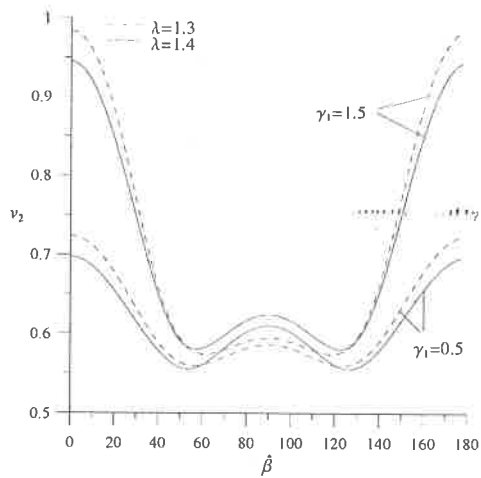
şeklindeki sayısal değerler ([1],[2],[7] ve [8]) ile şekil değişiminden sonra tüpün iç yarıçapı olarak $r_i = 0.32 \text{cm}$ değeri kullanılmıştır. Bu kabuller altında (40) denklem sistemi ($j=0, \dots, 3$ alınarak) P_j ($j=0, \dots, 4$), ϕ_j ($j=0, \dots, 6$), A ve B bilinmeyenleri için 14 adet cebirsel bağıntı verir. Bu denklem sisteminin katsayılarının determinantı sıfıra eşitlenerek Ω/η kompleks faz hızının kuvvetleri cinsinden dispersiyon bağıntısı bulunmuş, Atabek ve Lew [6] tarafından önerilen ve

$$v = (X^2 + Y^2)/X, \quad \chi = \exp[-2\pi Y/X] \quad (45)$$

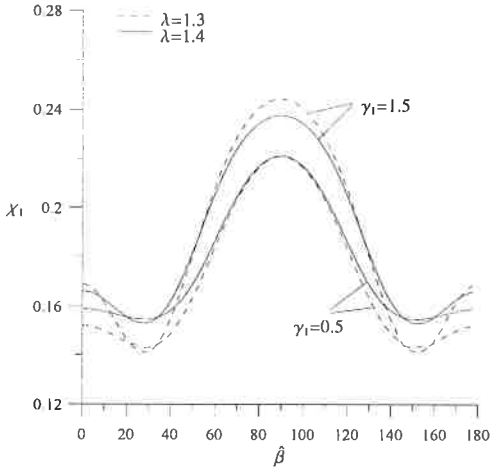
ile verilen tanıma göre dalga hızları ve taşıma katsayıları hesaplanmıştır. Dalga yayılım hızları ve taşıma katsayıları, liflerin etkinliğini gösteren $\gamma_1 = k_1/\beta$ büyüklüğü, viskoelastisiteyle ilgili γ_3 büyüklüğü, germe (λ), parçacık konsantrasyonu (f) ve Womersley parametresinin ($\bar{\alpha}$) belirli, liflerin doğrultularına ilişkin açının ($\hat{\beta}$) ise farklı değerlerine göre hesaplanmış ve grafikler ile gösterilmiştir (Şekil 1-4). Tüp malzemesine ait liflerin doğrultularının dalga yayılımının incelenmesinde oldukça önemli olduğu gözlenmiştir.



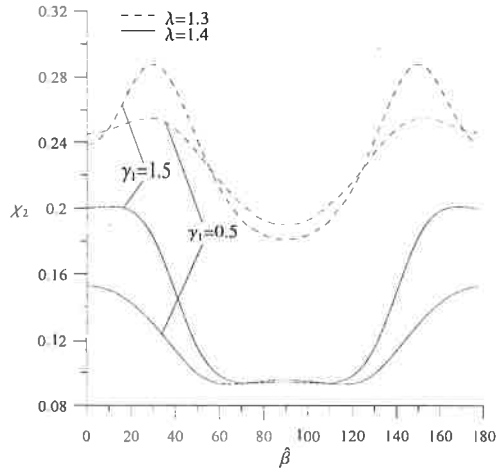
Şekil 1: $\bar{\alpha} = 5$, $\gamma_3 = 0.01$, $f = 0.3$, $\omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1 'in farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1 'in $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi



Şekil 2: $\bar{\alpha} = 5$, $\gamma_3 = 0.01$, $f = 0.3$, $\omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1 'in farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2 'nin $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi



Şekil 3: $\bar{\alpha}=5$, $\gamma_3=0.01$, $f=0.3$, $\omega\tau=1$ iken λ ve γ_1 'in farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1 'in $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi



Şekil 4: $\bar{\alpha}=5$, $\gamma_3=0.01$, $f=0.3$, $\omega\tau=1$ iken λ ve γ_1 'in farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2 'nin $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi

Kaynaklar

- [1] Ercengiz, A., "Oscillating two-phase flow in a prestressed thick elastic tube", Acta Mech. 179, 169-185, 2005.
- [2] Holzapfel, G. A., Gasser, T. C., Ogden, R. W., "A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models", J. of Elasticity 61, 1-48, 2000.
- [3] Demiray, H., "A viscoelastic model for arterial wall materials", Int. J. of Eng. Sci. 32, 1567-1578, 1994.
- [4] Demiray, H., "A note on the elasticity of soft biological tissues", J. Biomech. 5, 309-311, 1972.
- [5] Eringen, A. C., Şuhubi, E. S., "Elastodynamics", Pergamon Press, New York, Vol I, 246-259, 1974.
- [6] Atabek, H. B., Lew, H. S., "Wave propagation through a viscous incompressible fluid contained in an initially stressed elastic tube", Biophys. J. 6, 481-503, 1966.
- [7] Simon, B. R., Kobayashi, A. S., Strandness, D. E., Wiederhielm, C. A., "Re-evaluation of arterial constitutive laws", Circ. Res. 30, 491-500, 1972.
- [8] Demiray, H., "Large deformation analysis of some basic problems in biophysics", Bull. of Math. Biology 38, 701-712, 1976.