

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**2+1 BOYUTLU KÜBİK SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN
GRUP-DEĞİŞMEZ ÇÖZÜMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Cihangir ÖZEMİR**

**Anabilim Dalı : MATEMATİK
Programı : MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ**

MAYIS 2005

**2+1 BOYUTLU KÜBİK SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN
GRUP-DEĞİŞMEZ ÇÖZÜMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Cihangir ÖZEMİR
509021003**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 9 Mayıs 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 31 Mayıs 2005**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Faruk GÜNGÖR (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri Prof. Dr. Saadet ERBAY (Işık Ü.)
Doç. Dr. Emanullah HIZEL (İTÜ)**

MAYIS 2005

ÖNSÖZ

İTÜ Matematik Bölümü bünyesine katılmamda beni teşvik eden ve destek veren, bu çalışmanın yönlendirilmesinde engin bilgisiyle bana rehberlik eden değerli hocam Prof. Dr. Faruk Güngör'e teşekkürlerimi sunarım.

Matematik gibi güzel bir paydada bulduğumuz çalışma arkadaşlarım Nurettin Cenk Turgay, Özgür Aykanat, Özgür Martin, Tonguç Çağın, Özlem Laleoğlu, Nayif Çiçekli ve Ayşe Özdemir'e, sevgili hocamız Yrd.Doç.Dr. Fatma Özdemir'e, çalışma süresince hep yanımda olan Elçin Gültekin'e, hiç esirgemediği desteğinden ve bilim insanlarının yetişmesi için yaptıklarından dolayı ağabeyim Mücahit Özel'e ve Bilimsel Eğitim Merkezi çalışanlarına sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs, 2005

Cihangir Özemir

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	iv
TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LIE GRUBU ANALİZİ	3
2.1. Bir Diferansiyel Denklem Sisteminin Simetri Grubunun Bulunması	3
2.2. Simetri İndirgemesi	8
3. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TEKİLLİK ANALİZİ	11
3.1. Sabit Bir Nokta Etrafında Dönen Katı Cisim Problemi	11
3.2. İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Painlevé Sınıflandırması	12
3.3. Adi Diferansiyel Denklemler İçin Painlevé Testi	13
4. DENKLEMİN LIE GRUBU ANALİZİ	16
4.1. Denklemın Simetri Grubu ve Lie Cebiri	16
4.2. Grup Değişmez Çözümler	18
5. İNDİRGENMİŞ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ	24
5.1. $L_{2,1}$ Alt Cebiri İçin Çözümler	24
5.2. $L_{2,2}$ Alt Cebiri İçin Çözümler	26
5.3. $L_{2,3}$ Alt Cebiri İçin Çözümler	29
5.4. $L_{2,4}$ Alt Cebiri İçin Çözümler	31
5.5. $L_{2,5}$ Alt Cebiri İçin Çözümler	31
5.6. $L_{2,6}$ Alt Cebiri İçin Çözümler	34
5.7. $L_{2,7}$ Alt Cebiri İçin Çözümler	40
5.8. $L_{2,10}$ Alt Cebiri İçin Çözümler	41
5.9. $L_{2,11}$ Alt Cebiri İçin Çözümler	42
5.10. $L_{2,12}$ Alt Cebiri İçin Çözümler	42
SONUÇLAR	44
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ	49

KISALTMALAR

- KSD** : Kübik Schrödinger Denklemi
ODE : Ordinary Differential Equation
PDE : Partial Differential Equation
CSE : Cubic Schrödinger Equation
KDD : Kısmi Diferansiyel Denklem
ADD : Adi Diferansiyel Denklem
ARS : Ablowitz, Ramani, Segur

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 4.1:	İndirgemedede kullanılan iki boyutlu alt cebirler	19
Tablo 4.2:	Üç boyutlu alt cebirler ve çözümler	23
Tablo 5.1:	Farklı alt cebirler için (5.5) katsayı terimleri	25

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 5.1:	(5.14) denklemi için $\dot{W}^2 = P(W)$ grafikleri	27
Şekil 5.2:	(5.19) denklemi için $\dot{W}^2 = P(W)$ grafikleri	29
Şekil 5.3:	(5.37) denklemi için $\dot{W}^2 = P(W)$ grafikleri	36
Şekil 5.4:	(5.45) denklemi için $\dot{W}^2 = P(W)$ grafikleri	39

2+1 BOYUTLU KÜBİK SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN GRUP-DEĞİŞMEZ ÇÖZÜMLERİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında diferansiyel denklemlerin Lie grubu analizi yardımıyla 2+1 boyutlu kübik Schrödinger denklemi (KSD) için grup-değişmez çözümler aranmıştır.

Diferansiyel denklemlerin simetri grupları yardımıyla incelenmesi, özellikle doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemler ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin araştırılması için etkin bir araçtır. Bu yöntemde önce, ele alınan denklemi değişmez bırakan grup dönüşümleri bulunmaktadır. Ardından bu dönüşümler kullanılarak adi diferansiyel denklemlerin mertebesinin düşürülmesi, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin ise değişken sayısının azaltılması hatta adi diferansiyel denklemlere indirgenmesi mümkün olmaktadır.

KSDnin simetri cebiri bilinmektedir. Çalışmada bu cebirin açık olmayan tüm iki ve üç boyutlu alt cebirlerine ait simetri grupları altında değişmez kalan çözümler araştırılmıştır. Bu alt cebirlerin simetri indirgemesinde kullanılmasıyla, denklemin adi diferansiyel denklemlere ve cebirsel denklemlere indirgemeleri elde edilmiştir. Elde edilen adi diferansiyel denklemlerden Painlevé özelliğine sahip olanların tam çözümleri, trigonometrik fonksiyonlar, eliptik fonksiyonlar ve Painlevé transandan fonksiyonları türünden bulunmuştur. Mümkün olduğu hallerde bu denklemlerin sabit sayı çözümleri verilmiştir. Cebirsel denklemler sayesinde bulunan çözümler ise bir tablo halinde özetlenmiştir. İntegre edilebilir bir denklem olmayan KSDnin indirgemelerinin bazılarının integre edilebilir olduğu, çözümlerin bir kısmının silindirik sınır koşullarıyla uyumlu olduğu gözlenmiştir.

GROUP-INVARIANT SOLUTIONS of 2+1 DIMENSIONAL CUBIC SCHRÖDINGER EQUATION

SUMMARY

In this thesis work, group invariant solutions for 2+1 dimensional cubic Schrödinger equation are investigated with the help of Lie group analysis of differential equations.

Analysis of differential equations through their symmetry groups is an effective tool especially for the investigation of solutions of nonlinear ODEs and PDEs. As the first step of analysis, the group of transformations leaving the equation studied invariant are found. Making use of this symmetry group, reducing the order of ODEs, lowering the number of independent variables of PDEs or even reducing PDEs to ODEs is possible.

The symmetry algebra of CSE is already known. All the solutions invariant under symmetry groups corresponding to non-trivial two and three-dimensional subalgebras of this algebra are investigated in the work. By the use of these subalgebras in symmetry reduction, reduction of the equation to ODEs or algebraic equations are obtained. Exact solutions in terms of trigonometric functions, elliptic functions and Painlevé transcendent functions are found for the reduced equations which have the Painlevé property. Constant solutions for these equations are given whenever it is possible. Solutions found through algebraic equations are summarized in a table. It is observed that, although CSE is not an integrable equation, some of its reductions are integrable and some of the solutions are suitable with cylindrical boundary conditions.

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı 2+1 boyutlu kübik Schrödinger denklemi (KSD) için grup değişmez çözümler bulmaktır. 2+1 boyutlu KSD; $\psi(x, y, t)$ kompleks değerli bir fonksiyon, $a_0 \in \mathbb{R}$ ve Δ, \mathbb{R}^2 'de Laplace operatörü olmak üzere,

$$i\psi_t + \Delta\psi = a_0|\psi|^2\psi \quad (1.1)$$

denklemdir. Benzer bir problem [1]'de ele alınmış ve vektör değerli KSD için $N = 2, 3$ dalga durumuna ve $n = 2$ uzay değişkeni durumunda benzer bir analiz yapılmıştır. Burada, $N = 1$ tek dalga fonksiyonu için elde edilen sonuçlar [1]'deki sonuçları tamamlayacaktır.

KSD ile fiziğin pek çok dalında karşılaşmaktadır. $\psi(x, y, t)$ fonksiyonu denklemin doğduğu probleme göre çeşitli anlamlar ifade edebilmektedir. Örneğin KSD, Kerr non-lineerliğine sahip ortamda oluşturulan lazer ışını için en basit modeldir[2]. Bu model için ψ fonksiyonu elektrik alan zarfını temsil eder. Denklemin sonlu zaman değerleri için tekilliğe sahip çözümlerinin olduğu [3] ve küçük pertürbasyonlara duyarlılığı [4] bilinmektedir.

1+1 boyutlu KSD ters saçınım yöntemiyle integrallenebilmektedir. (1.1) için bu yöntem sonuç vermemektedir. Bu nedenle, diferansiyel denklemlerin Lie grubu analizi yöntemiyle denklemin çözümleri üretilmeye çalışılacaktır.

3+1 boyutlu kübik-kuintik Schrödinger denklemi, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ ve Δ, \mathbb{R}^3 'te Laplace operatörü olmak üzere,

$$i\psi_t + \Delta\psi = a_0\psi + a_1|\psi|^2\psi + a_2|\psi|^4\psi \quad (1.2)$$

denkleminde verilir. Gagnon ve Winternitz tarafından, bu denklemin simetri grubunun bulunmasını, indirgenmiş denklemlerin elde edilmesini ve çözümlerinin yazılmasını içeren kapsamlı bir çalışma yapılmıştır [5-7].

2+1 boyutta, (1.1) denkleminin daha genel bir hali olan, sönüm terimini içeren

$$i\psi_t + c\Delta\psi = b\psi + a|\psi|^2\psi, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

denklemini için simetri indirgenmesiyle bazı özel çözümler elde edilmiştir [8]. Ancak adı geçen çalışmada indirgenmiş denklemlerin çözümleri tam integraller olmayıp yalnızca trigonometrik fonksiyonlar türündendir.

Gagnon tarafından (1.1) denkleminin Lie cebirinin bazı iki boyutlu alt cebirleri için indirgenmiş denklemler yazılmış ancak tam çözümler elde edilmemiştir [9].

Bu tezde, yukarıdaki literatürün motivasyonu ile, (1.1) denkleminin grup değişmez çözümlerinin araştırıldığı kapsamlı bir çalışma yapılmıştır. Çözümde kullanılan Lie grubu analizi ile ilgili literatürde kaynaklar mevcuttur [10-12]. Denklemi değişmez bırakan G Lie grubu bilinmektedir [13]. G simetri grubunun Lie cebirinin çeşitli iki ve üç boyutlu alt cebirleri kullanılarak, (1.1) kısmi diferansiyel denkleminin adi diferansiyel denklemlere ya da cebirsel denklemlere indirgenmeleri elde edilmiştir. Mümkün olduğu hallerde, doğrusal olmayan bu indirgenmiş denklemler adi diferansiyel denklemlerin Painlevé sınıflandırmasındaki standart denklemlere dönüştürülerek tam çözümleri yazılmıştır.

İkinci bölümde, diferansiyel denklemlerin simetri grubu için bazı temel kavram ve tanımlar verimiştir. Tezin esasını simetri indirgenmesi oluşturmaktadır. Bütünlük açısından, simetri grubunun uzatma işlemi ile nasıl bulunacağı kısaca tartışılmıştır.

Üçüncü bölümde, bir diferansiyel denklemin integre edilebilirliği ile yakından ilişkili olan tekillik yapısının araştırılması anlatılmıştır. Bu bölümde bahsedilen adi diferansiyel denklemlerin Painlevé sınıflandırması, indirgenmiş denklemlerin integre edilmesinde rehber olacaktır.

Dördüncü bölümde, [13]'te yapılan çalışmada elde edilen simetri cebirinin 12 adet iki boyutlu alt cebiri kullanılarak, (1.1) denkleminin adi diferansiyel denklemlere indirgenmeleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, önceki bölümde elde edilen ikinci ve üçüncü mertebeden doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemlerin çözümleri tartışılmıştır. Painlevé özelliğine sahip olanların integralleri, trigonometrik fonksiyonlar, eliptik fonksiyonlar ve Painlevé transandanları türünden yazılmıştır.

2. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LIE GRUBU ANALİZİ

2.1 Bir Diferansiyel Denklem Sisteminin Simetri Grubunun Bulunması

Öncelikle, soyut grup kavramıyla manifold kavramının ilginç birlikteliği olan "Lie Grubu" tanımlanacaktır.

Tanım 2.1. Bir G grubu için,

$$m : G \times G \longrightarrow G, \quad m(g, h) = g \cdot h, \quad g, h \in G$$

grup işlemi ve

$$i : G \longrightarrow G, \quad i(g) = g^{-1}, \quad g \in G$$

ters eşlemesi r -boyutlu manifoldlar arasında düzgün tasvirler ise, G bir manifoldun yapısını taşır ve **r -parametrelili Lie grubu** olarak adlandırılır.

Teori, uygulama alanını birim elemana yakın grup elemanları için bulabilmektedir. Grup özelliklerinin birim eleman civarındaki grup elemanları için sağlanmasını yeterli görmekle, "yerel Lie grubu" tanımlanır.

Tanım 2.2. **r -parametrelili yerel Lie grubu**, orijini içeren $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$ kümeleri üzerinde, aşağıdaki özellikleri gerçekleyen düzgün tasvirler olan

$$m : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}^r$$

grup işlemi ve

$$i : V_0 \longrightarrow V$$

ters eşlemesi ile tanımlanır.

(a) Birleşme. $x, y, z, m(x, y), m(y, z) \in V \Rightarrow m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$.

(b) Birim eleman. $\forall x \in V, m(0, x) = x = m(x, 0)$.

(c) Ters eleman. $\forall x \in V_0, \exists i(x) : m(x, i(x)) = 0 = m(i(x), x)$.

Tanım 2.3. M bir düzgün manifold olsun. M üzerinde etkiyen bir **yerel dönüşüm grubu**; bir yerel G Lie grubu, birim elamanı içeren ve grup etkisinin tanım kümesi olan bir

$$\{e\} \times M \subset \mathcal{U} \subset G \times M$$

\mathcal{U} açık kümesi ve $\Psi : \mathcal{U} \longrightarrow M$ düzgün tasviriyle tanımlanır. $\Psi(g, x) = g \cdot x$ olarak gösterilirse, bu tasvir aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır.

$$(a) \quad g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x, \quad g, h \in G, \quad x \in M,$$

$$(b) \quad e \cdot x = x \quad \forall x \in M,$$

$$(c) \quad g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x, \quad g \in G, \quad x \in M.$$

Tanım 2.4. Diferansiyel denklemin simetri grubu. Δ bir diferansiyel denklem sistemi, M bu sistemin bağımlı ve bağımsız değişkenler uzayı, G ise M 'nin açık bir alt kümesi üzerine etkiyen yerel dönüşüm grubu olsun. $u = f(x)$, Δ sisteminin bir çözüm olmak üzere, $g \in G$ için $g \cdot f$ tanımlı olsun. $\tilde{u} = g \cdot f(x)$ de Δ 'nın bir çözümü ise, G , Δ 'nın bir simetri grubudur.

$$\begin{aligned} E^i(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) &= 0 \\ x \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^q, i &= 1, \dots, m, p, q, m, n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{2.1}$$

diferansiyel denklem sistemini ele alalım [14]. Burada $u^{(n)}$, u 'nun her u_α bileşeninin n mertebesindeki tüm türevlerini göstermektedir.

Bu diferansiyel denklem sisteminin,

$$\tilde{x} = \Lambda_g(x, u), \quad \tilde{u} = \Omega_g(x, u) \tag{2.2}$$

yapısında, sistemin bir $u = f(x)$ çözümünü bir $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ çözümüne dönüştürecek nokta dönüşümleri araştırılacaktır. Bu dönüşümlere "nokta dönüşümleri" denmesinin sebebi, yeni (\tilde{x}, \tilde{u}) bağımlı ve bağımsız değişkenlerinin yalnızca

$$M \subset X \times U, \quad X \sim \mathbb{R}^p, \quad U \sim \mathbb{R}^q$$

uzayındaki (x, u) noktalarına bağlı olmasıdır. (\tilde{x}, \tilde{u}) değişkenlerinin u_x, u_{xx} gibi türevlere ya da $D^{-1}u$ integraline bağlı olması durumu burada dikkate alınmayacaktır.

Denklem (2.2)'deki g indisi sonlu yada sonsuz sayıdaki grup parametrelerini temsil etmektedir. (2.2) dönüşümü yerel bir Lie Grubu oluşturmaktadır. "Yerel grup" kavramıyla kastedilen, yukarıdaki tanımlarda da belirtildiği üzere, dönüşümlerin,

$X \times U$ uzayının orijinine yeterince yakın (x, u) noktaları ve grubun birim elemanına yakın grup parametresi g için tanımlı ve tersinir olmasıdır.

(2.2) denkleminde $\tilde{u}_{\tilde{x}}$ gibi bağımlı değişkenin türevleri hesaplanarak (2.1)'de yerine konursa Λ ve Ω fonksiyonları için bir diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Ancak, elde edilen diferansiyel denklem sisteminin çözümü, (2.1) sisteminin çözümüne eşdeğer zorluktadır. Lie'nin etkin yaklaşımı bu noktada devreye girmektedir: (2.2) dönüşümü yerine,

$$\tilde{x}_i = x_i + \varepsilon \xi_i(x, u), \quad \tilde{u}_\alpha = u_\alpha + \varepsilon \phi_\alpha(x, u) \quad (2.3)$$

dönüşümü dikkate alınp, (2.1) de yerine konduktan sonra ε^p , $p \geq 2$ terimleri ihmal edilirse, ξ_i ve ϕ_α için doğrusal bir kısmi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. "Belirleyici denklem" adı verilen ve esas probleme kıyasla çözümü kolay olan bu diferansiyel denklem sisteminden ξ_i ve ϕ_α çözüldükten sonra, denklemin simetri grubunun sonsuz küçük üretici,

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^p \xi_i(x, u) \partial_{x_i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \partial_{u_\alpha} \quad (2.4)$$

şeklindeki vektör alanı ile yazılır. \hat{X} vektör alanı ξ_i ve ϕ_α 'dan gelen keyfi sabitler içermektedir. Bu sabitler sayesinde \hat{X} ,

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^p \Xi_i(x, u) \partial_{x_i} + \sum_{\alpha=1}^q \Phi_\alpha(x, u) \partial_{u_\alpha} \quad (2.5)$$

vektör alanlarının doğrusal bileşimi şeklinde yazılabilir. \hat{Y} vektör alanları, denklemin G simetri grubunun Lie cebiri L için bir baz oluşturacaktır.

Tanım 2.5. Lie Cebiri. \mathfrak{g} bir vektör alanı olsun. 'Lie parantezi'

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

ikili işlemine göre $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathfrak{g}$ ve $\forall c, c' \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, \mathfrak{g} bir Lie cebiridir.

(a) Bilineer. $[c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}', \mathbf{w}] = c[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}', \mathbf{w}]$, $[\mathbf{v}, c\mathbf{w} + c'\mathbf{w}'] = c[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}, \mathbf{w}']$,

(b) Anti-simetrik. $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}]$,

(c) Jacobi özdeşliği. $[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] = 0$.

\hat{Y} baz vektörleri için, Lie parantezi işlemine göre bir tablo oluşturulur. Buradan L cebirinin alt cebirleri teşhis edilebilir. Her \hat{Y} vektör alanı, vektör alanının integral eğrisinin bulunmasıyla,

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_i}{d\varepsilon} &= \Xi_i(\tilde{x}, \tilde{u}) & \tilde{x}_i|_{\varepsilon=0} &= x_i \\ \frac{d\tilde{u}_\alpha}{d\varepsilon} &= \Phi_\alpha(\tilde{x}, \tilde{u}) & \tilde{u}_\alpha|_{\varepsilon=0} &= u_\alpha\end{aligned}\quad (2.6)$$

simetri grubunun bir parametrelili bir altgrubunu üretir. Genel grup dönüşümü, bir parametrelili grup dönüşümlerinin bileşkesinin alınmasıyla bulunur.

Bir diferansiyel denklem sisteminin simetri grubunun bilinmesinin getirilerinden biri, bilinen çözümlerden yeni çözümlerin üretilebilmesidir. Bilinen $u = f(x)$ çözümüne grup dönüşümünün uygulanmasıyla, $\tilde{u} = g \cdot f(x) = \tilde{f}(\tilde{x})$ çözüm ailesi elde edilebilir.

Simetri cebirininin yani G grup dönüşümünü üreten (2.4) vektör alanının bulunması algoritmik bir işlemle yapılmaktadır. Bunun için, "vektör alanının uzatımı" tanımlanacaktır.

G simetri grubu, M manifoldu üzerine etkir:

$$G : \{x, u\} \in M \longrightarrow \{\tilde{x}, \tilde{u}\} \in M \quad (2.7)$$

Fonksiyonları, fonksiyonlara dönüştürür:

$$u = f(x) \longrightarrow \tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = g \cdot f(x) \quad (2.8)$$

G 'nin n . uzatımı, bir f fonksiyonunun n . mertebeye kadar olan türevlerinin dönüşümünün kuralını belirler:

$$\text{pr}^{(n)}G : \{x, f(x), f^{(1)}(x), \dots, f^{(n)}(x)\} \longrightarrow \{\tilde{x}, \tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{f}^{(1)}(\tilde{x}), \dots, \tilde{f}^{(n)}(\tilde{x})\}. \quad (2.9)$$

\hat{X} vektör alanı x ve u 'nun değişkeni olan fonksiyonlara etkir. \hat{X} 'nin n . uzatımı, x, u, u_x, \dots, u_{nx} 'e bağlı olan fonksiyonlara etkir. $\text{pr}^{(n)}\hat{X}$ integre edilirse, $\text{pr}^{(n)}G$ elde edilir.

\hat{X} vektör alanının n . uzatımı,

$$\text{pr}^{(n)}\hat{X} = \hat{X} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{k=1}^n \sum_J \phi_\alpha^J \frac{\partial}{\partial u_\alpha^k} \quad (2.10)$$

Burada J çoklu-indis kümesidir:

$$J \equiv J(k) = (j_1, \dots, j_k), \quad 1 \leq j_k \leq p, \quad k = j_1 + \dots + j_k$$

ϕ_α^J katsayıları ξ, ϕ ve k . mertebeye kadar türevlerine bağlı fonksiyonlardır. Bunlar için formüller [10]'da bulunabilir. Burada, daha kullanışlı olduğundan, tekrarlama bağıntılarına değinilecektir:

Birinci uzatım formülü aşağıdaki gibidir:

$$\text{pr}^{(1)} \hat{X} = \hat{X} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{i=1}^p \phi_\alpha^i(x, u, u_x) \frac{\partial}{\partial u_{x_i}^\alpha}, \quad (2.11a)$$

$$\phi_\alpha^i = D_{x_i} \phi_\alpha - \sum_{j=1}^p (D_{x_i} \xi^j) u_{\alpha, x_j}. \quad (2.11b)$$

Burada D_{x_i} tam türev operatörüdür:

$$D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^q \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{j=1}^p \frac{\partial u_{\alpha, x_j}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha, x_j}} + \dots \quad (2.12)$$

n . uzatım bilinirken, $(n+1)$. uzatım aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\text{pr}^{(n+1)} \hat{X} = \text{pr}^{(n)} \hat{X} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{i_1, \dots, i_{n+1}=1}^p \phi_\alpha^{i_1 \dots i_{n+1}} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha, x_{i_1} \dots x_{i_{n+1}}}}, \quad (2.13a)$$

$$\phi_\alpha^{i_1 \dots i_{n+1}} = D_{x_{i_{n+1}}} \phi_\alpha^{x_1, \dots, x_{i_n}} - \sum_{j=1}^p (D_{x_{i_{n+1}}} \xi^j) u_{\alpha, x_{i_1} \dots x_{i_n} x_j}. \quad (2.13b)$$

Teorem 1.1. Diferansiyel denklemin değişmezliği. $M \subset X \times U$ üzerinde tanımlı

$$E^i(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

diferansiyel denklem sistemini alalım. G, M 'ye etkiyen bir yerel grup dönüşümü olmak üzere, G 'nin her X sonsuz küçük üretici için,

$$\text{pr}^{(n)} X (E^i) |_{E^k=0} = 0 \quad i, k = 1, \dots, m$$

koşulu sağlanıyorsa, G , sistemin bir simetri grubudur.

(2.1) sisteminin simetri cebirinin belirlenmesi için uygulanacak algoritma şimdi basitçe verilebilir. Simetri grubunun sonsuz küçük üreticinin n . uzatımı sistem üzerine uygulandığında, çözüm kümesi üzerinde özdeş olarak sıfırı vermelidir:

$$\text{pr}^{(n)} \hat{X} (E^i) |_{E^k=0} = 0 \quad i, k = 1, \dots, m \quad (2.14)$$

(2.14) denkleminde, sadece x, u 'ya bağımlı olan ξ_i ve ϕ_α belirlenecektir. (2.14) denkleminin $x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{nx}$ terimlerini de içerecektir. Bu denklem türevlere göre bir çok değişkenli polinom olarak ele alınıp türev çarpımlarından oluşan her doğrusal bağımsız terimin katsayısı sıfıra eşitlenir. Bu şekilde, "belirleyici denklem" denen, n . ya da daha düşük mertebeden kısmi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (2.1) doğrusal olmayan bir sistem olsa bile, belirleyici denklem sistemi, doğrusal bir denklem takımındadır. Algoritma özetlenirse:

(i) (2.4) vektör alanının n . uzatımı (2.10) hesaplanır. Bu işlem ele alınan diferansiyel denklemden bağımsız olup yalnızca denklemin bağımsız ve bağımlı değişken sayısına bağlıdır.

(ii) (2.1) sisteminin her bir denkleminde en yüksek mertebeden türev terimi çekilir.

(iii) (2.14) hesaplanarak (ii)'de çekilen terimler yerine yazılır.

(iv) Kalan doğrusal bağımsız türev terimleri belirlenir ve katsayıları sıfıra eşitlenir. Belirleyici denklemler elde edilmiş olur.

(v) Belirleyici denklemler çözülerek, $\xi_i(x, u)$ ve $\phi_\alpha(x, u)$ bulunur.

Belirleyici denklem takımında denklem sayısı genellikle bilinmeyen sayısından fazladır. Bu sistemin çözümü sonucunda aşağıdaki durumlardan birine ulaşılır:

(a) Açık çözüm: $\xi_i = \phi_\alpha = 0$. Bu durumda (2.1) sisteminin simetri grubu yoktur ve yöntem uygulanamaz.

(b) Belirleyici denklemler, $N < \infty$ sayıda integrasyon sabitine bağlı olarak çözülür. Bu durumda denklemin simetri cebirinin boyutu N 'dir.

(c) Genel çözüm keyfi fonksiyonları içerir. Bu durumda simetri grubu sonsuz boyutludur. Bütün doğrusal kısmi diferansiyel denklemlerde ve üç boyutlu integrallenebilir doğrusal olmayan denklemlerde bu sonuca ulaşılır.

2.2 Simetri İndirgemesi

Diferansiyel denklemin simetri grubunun bilinmesinin en önemli uygulaması, simetri indirgemesidir. Simetri indirgemesi yoluyla kısmi türevli diferansiyel denklemlerin değişken sayısının azaltılması hatta adi diferansiyel denklemlere veya

cebirsel denklemlere dönüştürülmesi mümkündür. Bu yöntemde denklemin G simetri grubunun bir G_0 alt grubu alınır ve G_0 altında değişmez kalan çözümler aranır. Alt grubun sonsuz küçük üreteçlerinin değişmezleri olan bu çözümlerden denklemin bağımlı değişkeni çekilerek denklemde yerine yazıldığında değişken sayısı düşürülmüş olur.

Simetri indirgemesi yöntemi, aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır.

(i) (2.1) sistemini değişmez bırakan (2.2) yerel grup dönüşümü G bulunur. Yerel grup dönüşümüne karşılık gelen (2.4) vektör alanının Lie cebiri L elde edilir.

(ii) G grubunun etkisi altında L 'nin alt cebirleri denklik sınıflarına ayrılır. L 'nin her farklı L_0 alt cebirine karşılık gelen $G_0 \subset G$ alt grubu denklemin doğrusal bağımsız indirgemelerini verecektir.

(iii) $L_0 \subset L$ alt cebiri ve bu alt cebire karşılık gelen $G_0 \subset G$ alt grubu alınır. G_0 alt grubu $M \sim X \times U$ bağımlı ve bağımsız değişkenler uzayına etkir. G_0 grubunun değişmezleri; yani X_i, L_0 alt cebirinin baz vektörleri olmak üzere

$$X_i F(x, u) = 0, \quad i = 1, \dots, n_0 \quad (2.15)$$

birinci mertebeden doğrusal denklem sisteminin

$$\varphi^j = \varphi^j(x, u), \quad j = 1, \dots, N \quad (2.16)$$

fonksiyonel bağımsız çözümleri bulunur. Değişmez sayısı N ; d , G_0 'ın M 'deki orbitlerinin yani M 'nin minimal G_0 -değişmez alt kümelerinin boyutu olmak üzere orbitlerin eş boyutuna eşittir

$$N = p + q - d.$$

(2.16) sisteminin çözümü sonunda aşağıdaki durumlarla karşılaşılabilir.

(A) $\varphi^j(x, u)$ değişmez fonksiyonları arasından q tane $\hat{\varphi}^j(x, u)$ bağımlı değişkenlere tersinir bir tasvir tanımlar. Bu değişmezler, (2.1) sisteminin yeni bağımlı değişkenleri olacaktır. Tasvirin tersinir olması için Jakobiyen matrisinin determinanı sıfırdan farklı olmalıdır

$$J \equiv \left(\frac{\partial(\hat{\varphi}^1, \dots, \hat{\varphi}^q)}{\partial(u_1, \dots, u^q)} \right), \quad \det J \neq 0. \quad (2.17)$$

Kalan $k = N - q$ sayıda değişmez (2.16) sisteminden yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu olarak seçilebilir. Bunlar da

$$\zeta_1(x), \dots, \zeta_k(x), \quad k < p \quad (2.18)$$

olarak adlandırılır ve (2.1) için yeni bağımsız değişkenler olarak seçilir.

$$\hat{\varphi}^j = F_j(\zeta_1, \dots, \zeta_k) \quad (2.19)$$

(2.17) koşulu (2.19)'dan bağımlı değişkenleri için çözümlerini mümkün kılar.

$$u_j(x) = U_j(x, F_j(\zeta)) \quad (2.20)$$

(2.1) denkleminde (2.20) yerine yazılırsa yalnızca F_j ($j = 1, \dots, q$) fonksiyonlarını ve ζ_a ($a = 1, \dots, k$) değişkenlerini içeren bir denklem takımına ulaşılır. (2.1) G -değişmez olduğundan ve (2.15) tüm G_0 -değişmezleri tanımladığından, (2.20)'deki x terimleri yok olmalıdır. $k < p$ olduğundan, bağımsız değişkenlerin sayısı azaltılmıştır. İndirgenmiş denklem $F_j(\zeta)$ için çözülürse, (2.20)'den esas sistemin çözümü elde edilebilir.

(B) (2.17) koşulu sağlanır ancak (2.18)'de verilen yeni bağımsız değişkenler, bağımlı değişken u 'nun fonksiyonu olarak elde edilir. Yukarıda belirtilen işlemlerin aynısı tekrarlanır ancak (2.20) denklemini (2.1) de yerine

$$u_j(x) = U_j(x, F_j(\zeta)), \quad \zeta = \zeta(x, u) \quad (2.21)$$

şeklinde konur. (2.21), u_j bileşenleri cinsinden bir kapalı fonksiyondur. u_j 'lerin çözülüp, esas denklemde yerine yazılması mümkün olabilir.

(C) Jakobiyen matrisinin sıfır olması koşulu (2.17) sağlanmaz. J 'nin rankı

$$1 \leq r(J) = q' < q \quad (2.22)$$

olsun. $\varphi^j(x, u)$ değişmezlerinden q' sayıda seçilir. Bu değişmezler için Jakobiyenin sıfırdan farklı olması koşulu sağlandığından, yukarıdaki gibi devam edilip (2.20)

$$u_j(x) = U_j(x, F_j(\zeta)); \quad j = 1, \dots, q' \quad (2.23)$$

şeklinde yazılır. Kalan $u_{q'+1, \dots, q}$ değişkenleri x_1, \dots, x_p 'ye bağlıdır. Bunlar (2.1)'de yerine yazılırsa, bağımlı değişkenlerinin bir kısmının ($F_j(\zeta)$) daha az sayıda değişkene bağlı olduğu bir denklem takımı elde edilir. Bu durum, indirgenmiş denklem üzerinde bazı uygunluk koşulları getirir. İndirgenmiş denklemin çözümü, sistemin "kısmen değişmez çözümler"ini vermektedir.

(iv) İndirgenmiş denklemler çözülür. Esas denklem integre edilemeyen bir denklem olsa bile, indirgenmiş denklem integrallenebilir olabilir. İndirgenmiş denklem doğrusal bir denkleme dönüştürülebilir veya ters spektral dönüşüm yöntemiyle çözülebilir. İndirgenmiş denklemin simetri grubu da araştırılabilir. Denklemin çözümlerinin tekillik yapısını araştıran Painlevé analizi de faydalı bir yöntemdir.

3. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TEKİLLİK ANALİZİ

3.1 Sabit Bir Nokta Etrafında Dönen Katı Cisim Problemi

Katı bir cismin sabit bir nokta etrafında hareketi aşağıdaki denklem takımı tarafından belirlenir:

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} &= (B - C)\omega_2\omega_3 + Mg(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2), & \frac{d\gamma_1}{dt} &= \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \\ B \frac{d\omega_2}{dt} &= (C - A)\omega_1\omega_3 + Mg(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3), & \frac{d\gamma_2}{dt} &= \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \\ C \frac{d\omega_3}{dt} &= (A - B)\omega_1\omega_2 + Mg(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1), & \frac{d\gamma_3}{dt} &= \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Burada $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ cismin açısal hız vektörünün bileşenleri, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ konum vektörünün doğrultu kosinüsleridir. (x_0, y_0, z_0) cismin kütle merkezinin koordinatlarıdır. Görüldüğü gibi denklem $A, B, C > 0$ ve $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ parametrelerini içermektedir. Kovalevskaya'nın bu denklem sisteminin çözümüyle ilgilenmesinden önce sabitlerin aşağıdaki durumları için çözümler biliniyordu:

- (i) $A = B = C$
- (ii) Euler ve Poincaré; $x_0 = y_0 = z_0$
- (iii) Lagrange ve Poisson; $A = B, x_0 = y_0$

Her üç durum için de çözüm eliptik fonksiyonlar türünden yazılmıştı. Dolayısıyla çözümler meromorftu [15]. Weierstrass'ın önerisiyle problemle uğraşmaya başlayan Kovalevskaya, hangi şartlar altında sistemin meromorfik çözümünün olabileceğini araştırdı. Çözümlerin Laurent serisinin yalnızca kutup türünden tekilliklere sahip olmasına izin veren

$$\omega_l = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{l,j} t^{m_l+j}, \quad \gamma_l = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{l,j} t^{n_l+j} \quad l = 1, 2, 3; \quad \omega_{l,j}, \gamma_{l,j} \in \mathbb{C} \quad (3.2)$$

açılımlarını (3.1) denklem sisteminde yazan Kovalevskaya, elde ettiği cebirsel denklem sisteminin çözümünün, sabitlerin (i)-(iii) ve bunlara ek olarak

$$A = B = 2C, \quad y_0 = z_0 = 0 \quad (3.3)$$

koşulunu sağladığı durumlarda var olduğu sonucuna ulaştı . Bunun ardından, sabitlerin (3.3) durumu için (3.1)'in çözümünü hipereliptik fonksiyonlar türünden elde ederek çözümün meromorfik yapısını göstermiş oldu [16].

3.2 İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Painlevé Sınıflandırması

Gauss hipergeometrik fonksiyonu, Kummer konfluent hipergeometrik fonksiyonu, Bessel fonksiyonu gibi geniş bir sınıf özel fonksiyonlar, polinom katsayılı doğrusal denklemlerin çözümü olarak ortaya çıkar. Değişken sayısının ya da denklemin mertebesinin artırılmasıyla bu fonksiyonlar sınıfının genişletilmesi mümkündür. 19. yüzyılda yeni bir tür özel fonksiyon olan eliptik fonksiyonlar ve bunlarla ilişkili θ fonksiyonlarının bulunduğu burada anımsanmalıdır. Özel fonksiyonlar sınıfının genişletilmesi, 19. yüzyıl matematikçilerinin ilgisini çeken problemlerden olmuştur. Kovalevskaya da, 4 yıl kadar süre alan yukarıdaki çalışmasının ilk adımında problemine iki değişkenli θ fonksiyonu şeklinde çözüm önerisinde bulunmuştu. Hipergeometrik fonksiyon gibi, doğrusal bir denklemin çözümü olan özel fonksiyonların aksine, eliptik fonksiyonlar, örneğin Weierstrass \wp fonksiyonu, birinci mertebeden

$$\dot{w}^2(z) = 4w^3(z) - g_2w(z) - g_3$$

denklemini sağlar. Jacobi'nin üç eliptik fonksiyonu da birinci mertebeden bir denklem sistemini sağlar. Klasik özel fonksiyonların aksine, bu fonksiyonları temsil eden diferansiyel denklemler doğrusal değildir. Painlevé de, eliptik fonksiyonlar gibi, "uygun" doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü olan yeni özel fonksiyonlar bulmayı amaçladı. Eliptik fonksiyonların tüm hareketli tekillikleri kutup türünden olduğundan, Painlevé, aradığı "uygun" diferansiyel denklemin çözümlerinin de aynı özelliği sağlaması önerisinde bulundu. Kovalevskaya'nın problemine getirdiği çözüm önerisiyle Painlevé'nin sunduğu şartın aynı olduğu görülmektedir. Painlevé, α -yöntemi denen bir yöntemle

$$\frac{d^2w}{dz^2} = F\left(z, w, \frac{dw}{dz}\right)$$

şeklinde, F 'nin z 'ye göre analitik, w 'ye göre rasyonel, $\frac{dw}{dz}$ 'ye göre cebirsel bir fonksiyon olduğu, hareketli tekillikleri kutup türünden olan ikinci mertebeden denklemleri araştırdı [17-19]. Öğrencisi Gambier tarafından bitirilen çalışma sonucunda, 50 denklik sınıfı bulundu. Bu denklemlerin tam bir listesi [20]'de mevcuttur. 50 denklemden 44 tanesi integre edilebilir olup bazılarının çözümleri eliptik fonksiyonlar türündendir. Kalan 6 tanesi indirgenemez (daha basit bir denkleme ya da daha basit denklemlerin bir kombinasyonuna dönüştürülemez) olup yeni transandan fonksiyonlar tanımlar. Bu indirgenemez denklemler tarafından temsil edilen fonksiyonlar, Painlevé Transandanları olarak adlandırılır.

3.3 Adi Diferansiyel Denklemler İçin Painlevé Testi

Bir adi diferansiyel denklemin Painlevé özelliği, şu şekilde tanımlanır [21].

1. Bir adi diferansiyel denklem için kritik nokta, çözümünde bulunan dallanma ya da esaslı türden tekil noktadır.
2. Kritik noktanın karmaşık düzlemdeki yeri, denklemin integrasyon sabitine bağlı ise, hareketli kritik nokta adını alır.
3. Denklemin hareketli kritik noktası olmayan bir çözüm ailesi, P -özelliğine sahiptir. Burada P "Painlevé" yerine kullanılmıştır.
4. Bütün çözümleri P -özelliğine sahipse denklem P -tipidir.

Görüldüğü gibi denklemin Painlevé özelliğine sahip olması için, çözümlerinin hareketli tekillikleri en fazla kutup cinsinden olabilir. Painlevé özelliğine sahip bir denklemin çözümlerinin esaslı ya da dallanma türünden tekil noktaları yoktur.

Doğrusal olmayan bir sistemin integrallenebilirliği, denklemin tekillik yapısıyla yakından ilişkilidir [22]. Çözümlerde hareketli tekilliklerin dallanma noktaları türünden olması, sistemin integre edilemezliğine bir işarettir [22]. Ablowitz, Ramani, Segur bir denklemin integre edilebilirliği için Painlevé özelliğini gerek koşul olarak veren aşağıdaki iddiayı ortaya attılar :

ARS Sanısı: Ters saçılım dönüşümü yöntemiyle integrallenebilen doğrusal olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklemin simetri indirgemesiyle elde edilen her doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem, Painlevé özelliğine sahiptir [23].

Tahminin pek çok denklem sınıfı için doğruluğu gösterilmiştir.

$$\frac{d^n w}{dz^n} = F \left(z, w, \frac{dw}{dz}, \dots, \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} \right) \quad (3.4)$$

şeklinde, n . mertebeden adi diferansiyel denklemin Painlevé analizi için uygulanabilecek algoritmik yöntem Ablowitz, Ramani, Segur tarafından geliştirilmiştir [23]. Burada F , z cinsinden analitik, diğer değişkenlerine göre rasyonel bir fonksiyondur.

(A) Baskın davranışın bulunması

(3.4) denkleminin

$$w \sim a_0(z - z_0)^p, \quad p \in Z^- \quad (3.5)$$

yapısında bir çözümü aranır. (3.5) denklemi (3.4)'te yerine yazılırsa p 'nin belli değerleri için denklemdaki iki ya da daha fazla terimin dengelendiği ve kalan terimlerin $z \rightarrow z_0$ için ihmal edilebileceği görülür. p 'nin her seçimi için dengelenen terimler, *başterim* olarak adlandırılır. Genellikle bu aşamada a_0 terimi hesaplanabilir. Mümkün p 'lerden hiçbiri tamsayı değilse, denklem P -tipi değildir. p 'lerin tümü tamsayı ise, (3.5), çözümün hareketli bir kutup noktası civarındaki Laurent serisinin ilk terimini temsil edebilir. Bu durumda (3.4)'ün bir çözümü

$$w(z) = (z - z_0)^p \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j, \quad 0 < |z - z_0| < R \quad (3.6)$$

yapısındadır. Burada z_0 keyfi sabit olup hareketli kutup noktasını temsil etmektedir. a_j katsayılarından $n-1$ tanesi de keyfi olarak ortaya çıkarsa, (3.6)'nın, (3.4) denkleminin z_0 civarındaki genel çözümü olduğu anlaşılır. Keyfi katsayılı $(z - z_0)$ terimlerinin kuvveti *rezonans* olarak adlandırılır.

(B) Rezonansların bulunması

(A) adımıdaki her (p, a_0) çifti için (3.4)'te

$$w(z) = a_0(z - z_0)^p + \beta(z - z_0)^{p+r} \quad (3.7)$$

yazılır. β 'yi içeren terimler toparlanırsa

$$Q(r)\beta(z - z_0)^q = 0, \quad q \geq p + r - n \quad (3.8)$$

elde edilir. $Q(r)$ 'nin kökleri rezonansları belirler. Her (p, a_0) çifti için, $Q(r)$ 'nin $-1, 0$ dışında tüm kökleri pozitif reel sayılar ise, çözümün cebirsel dallanma noktası yoktur. Logaritmik dallanma noktaları için sonraki adıma geçilir.

(C) İntegrasyon sabitlerinin bulunması-Uygunluk koşulları

Bir (p, a_0) çifti için $r_1 \leq \dots \leq r_s$, $Q(r)$ 'nin kökleri olsun ($s \leq n - 1$). (3.4)'te

$$w = \sum_{j=0}^{r_s} a_j (z - z_0)^{p+j} \quad (3.9)$$

yazılıp $(z - z_0)^{p+j-n}$ teriminin katsayısı sıfıra eşitlenirse

$$Q(j)a_j = R_j(z_0, a_0, a_1, \dots, a_{j-1}), \quad 0 \leq j \leq r_s \quad (3.10)$$

bulunur. (3.10) *uygunluk koşulu* olarak adlandırılır. Laurent serisinin katsayıları bu uygunluk koşulundan hesaplanır. $j = r_k$, $k = 1, \dots, s$ rezonans düzeylerinde $Q(r_k) = 0$ olduğundan her rezonans düzeyi için

$$R_{r_k} = 0, \quad l = 1, \dots, s \quad (3.11)$$

koşulu sağlanmalıdır.

Bu aşamada iki durumla karşılaşılır:

(i) (3.11) sağlanıyorsa, (3.10)'dan Laurent serisinin terimleri hesaplanabilir ve bu işlemlerin yapıldığı (p, a_0) çifti için çözümün Painlevé özelliğine sahip olduğu gösterilmiş olur. Her (p, a_0) çifti için (A)-(C) tekrarlandığında (3.11) sağlanıyorsa, denklemin P -tipi olduğu gösterilmiş olur.

Ayrıca, eğer $s = n - 1$ ise, rezonans düzeylerine karşılık gelen a_{r_k} , $k = 1, \dots, s$ katsayıları (3.10) denklemine göre keyfi sabitler olacağından, Laurent serisi z_0 ile birlikte toplam n keyfi sabit içerir ve (3.4) denkleminin genel çözümü olur.

(ii) Bir (p, a_0) çifti için $j = r_k$ rezonans düzeyinde (3.11) sağlanmıyorsa, denklemin (3.6) yapısında bir çözümünün olamayacağı anlaşılır. (3.11) eşitliğinin sağlanması için (3.6) açılımına logaritmik terimler ilave etmek gerekir ki bu da serinin logaritmik dallanma noktalarına sahip olacağına işaretidir. Bu şekilde elde edilen serinin asimptotik davranışı gösterilirse denklemin P -tipi olmadığı kanıtlanmış olur.

4. DENKLEMİN LIE GRUBU ANALİZİ

4.1 Denklemin Simetri Grubu ve Lie Cebiri

G simetri grubu, $\psi(t, x, y)$ denklemin bir çözümü iken $\bar{\psi}(t, x, y)$ 'yi de bir çözüm yapan

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= T_g(t, x, y, \psi, \bar{\psi}), & \tilde{x} &= X_g(t, x, y, \psi, \bar{\psi}), \\ \tilde{y} &= Y_g(t, x, y, \psi, \bar{\psi}), & \tilde{\psi} &= \Psi_g(t, x, y, \psi, \bar{\psi})\end{aligned}\quad (4.1)$$

yerel Lie dönüşüm grubudur. Burada $\bar{\psi}$, ψ 'nin kompleks eşleniği olup g grup parametresidir. G simetri grubunun L Lie cebiri

$$\hat{X} = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_y + \varphi\partial_\psi + \bar{\varphi}\partial_{\bar{\psi}}. \quad (4.2)$$

şeklindeki vektör alanı tarafından belirlenir. $\tau, \xi, \eta, \phi, \bar{\phi}$ katsayıları, $t, x, y, \psi, \bar{\psi}$ 'nin fonksiyonları ve E incelenen denklem olmak üzere

$$\text{pr}^{(2)}\hat{X}(E)\Big|_{E=0} = 0 \quad (4.3)$$

diferansiyel denklemin değişmezliği koşulundan elde edilir. Burada $\text{pr}^{(2)}\hat{X}$, \hat{X} vektör alanının ikinci uzatımıdır. Bu koşul \hat{X} 'nin bileşenleri için bir belirleyici denklem takımı sunar.

(1.1) denklemini reel denklem sistemi olarak yazabilmek için ψ 'nin faz ve modülü tanımlanır.

$$\psi = Re^{i\phi}, \quad 0 \leq R < \infty, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (4.4)$$

R ve ϕ cinsinden denklem tekrar yazılırsa, R ve ϕ , t, x, y 'nin keyfi fonksiyonları olmak üzere

$$\begin{aligned}-R\phi_t + \Delta R - R|\nabla\phi|^2 &= a_0R^3 \\ R_t + R\Delta\phi + 2\nabla R \cdot \nabla\phi &= 0\end{aligned}\quad (4.5)$$

elde edilir.

Dokuz-boyutlu Schrödinger cebiri $\mathfrak{sch}(2)$, sıfırdan farklı

$$\begin{aligned}
[P_1, B_1] &= M/2, & [P_2, B_2] &= E/2, \\
[J, B_2] &= -B_1, & [J, P_2] &= -P_1, \\
[J, B_1] &= B_2, & [J, P_1] &= P_2, \\
[T, B_j] &= P_j, & [D, B_j] &= B_j, \quad j = 1, 2 \\
[D, P_j] &= -P_j, & [C, P_j] &= -B_j, \quad j = 1, 2 \\
[T, D] &= 2T, & [T, C] &= D, \quad [D, C] = 2C
\end{aligned} \tag{4.6}$$

komütatör bağıntılarına sahiptir.

$\{T, P_1, P_2, B_1, B_2, J, E, D\}$ alt cebiri genişletilmiş Galilei grubunu (öteleme, düzgün Galilei dönüşümü, sabit faz değişimi), C rölativistik olmayan konform dönüşümleri üretir.

Standart Schrödinger cebiri için uygun bir baz

$$T = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x, \quad P_2 = \partial_y, \quad E = \partial_\phi, \tag{4.7a}$$

$$B_1 = t\partial_x + \frac{x}{2}\partial_\phi, \quad B_2 = t\partial_y + \frac{y}{2}\partial_\phi, \quad J = -y\partial_x + x\partial_y, \tag{4.7b}$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - R\partial_R, \tag{4.7c}$$

$$C = t^2\partial_t + xt\partial_x + yt\partial_y - tR\partial_R + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\partial_\phi \tag{4.7d}$$

vektör alanlarıyla verilir. (4.7d) konform dönüşümleri daha büyük boyutlu kübik Schrödinger denklemlerine genelleştirilemez. Daha büyük uzay boyutunda, doğrusal olmayan Schrödinger denklemi

$$i\psi_t + \Delta\psi = |\psi|^{4/n}\psi$$

konform dönüşüm altında değişmezdir.

Genişletilmiş Galilei grubuna karşılık gelen dönüşümler global olup aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= e^\lambda(t - t_0), \\
\tilde{x} &= e^{\lambda/2}\{\cos\alpha[(x - x_0) + v_1(t - t_0) + \sin\alpha[(y - y_0) + v_2(t - t_0)]]\}, \\
\tilde{y} &= e^{\lambda/2}\{-\sin\alpha[(x - x_0) + v_1(t - t_0) + \cos\alpha[(y - y_0) + v_2(t - t_0)]]\}, \\
\tilde{R} &= e^{-\lambda/2}R, \quad \tilde{\phi} = \phi + \frac{1}{2}[v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0)] + \frac{1}{4}(v_1^2 + v_2^2) + (t - t_0) + \delta.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

C tarafından üretilen konform dönüşümler yerel olup, $1 - pt \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \frac{t}{1 - pt}, & \tilde{x} &= \frac{x}{1 - pt}, & \tilde{y} &= \frac{y}{1 - pt}, \\ \tilde{R} &= (1 - pt)R, & \tilde{\phi} &= \phi + \frac{p(x^2 + y^2)}{4(1 - pt)},\end{aligned}\quad (4.9)$$

şeklinde verilir. Bu dönüşümlerde $t_0, x_0, y_0, v_1, v_2, \alpha, \lambda, \delta, p$ grup parametreleridir. KSD aynı zamanda uzay ve zaman koordinatlarının yansması altında değişmezdir:

$$\begin{aligned}T_d : & \quad t \rightarrow -t, \quad x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y, \quad \psi \rightarrow \bar{\psi}, \\ R_x : & \quad t \rightarrow t, \quad x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow y, \quad \psi \rightarrow \psi, \\ R_y : & \quad t \rightarrow t, \quad x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad \psi \rightarrow \psi.\end{aligned}\quad (4.10)$$

T, R_x, R_y elemanları sonlu ayrık bir G_D grubu oluşturur. Schrödinger grubunun dönüşümlerini elde etmek üzere (4.9) ve (4.10) dönüşümlerinin bileşkesi alınabilir.

(1.1) denkleminin simetri indirgemelerini gerçekleştirmek için $L = \mathfrak{sch}(2)$ genişletilmiş Schrödinger cebirinin düşük boyutlu alt cebirlerinin Schrödinger grubunun etkisi altında denklik sınıflarına ayrılması gereklidir. (1.1) denklemini cebirsel bir denkleme, adi diferansiyel denkleme, ya da iki değişkenli kısmi türevli bir diferansiyel denkleme dönüştürmek için sırasıyla 3,2 ve 1 boyutlu tüm $L_0 \subset L$ alt cebirleri bilinmelidir. $\mathfrak{sch}(2)$ 'nin açık olmayan alt cebir sınıflarının tam bir sınıflandırması [24]'te verilmiştir.

4.2 Grup Değişmez Çözümler

Bu bölümde (1.1) denkleminin iki boyutlu alt cebirler altında değişmez kalan çözümleri incelenecektir. İki boyutlu alt cebirler kullanılarak simetri indirgemesi yapıldığında ADD sistemine ulaşılmaktadır. Her bir alt cebir için indirgenmiş denklemler elde edilecek ve mümkün ise sistemin çözümü yapılacaktır. Tablo 4.1'de ADD sistemine indirgeme sağlayan tüm alt cebirler verilmiştir.

$L_{2,1}$ Alt Cebiri :

Alt cebirin baz vektörleri Tablo 4.1'den görülebileceği gibi

$$\begin{aligned}X_1 &= J + aE = -y\partial_x + x\partial_y + a\partial_\phi \\ X_2 &= C + T + bE = xt\partial_x + yt\partial_y + (t^2 + 1)\partial_t\end{aligned}$$

Tablo 4.1: İndirgemde kullanılan iki boyutlu alt cebirler. $\varepsilon = \pm 1$; $a, b \in \mathbb{R}$.

No	Tip	Baz
$L_{2,1}$	$2A_1$	$J + aE, C + T + bE$
$L_{2,2}$		$J + aE, T$
$L_{2,3}$		$J + aE, T + \varepsilon E$
$L_{2,4}$		$J + aE, D + bE$
$L_{2,5}$		T, P_1
$L_{2,6}$		$T + \varepsilon E, P_1$
$L_{2,7}$		$T + B_1, P_2$
$L_{2,8}$		P_1, P_2
$L_{2,9}$		B_1, P_2
$L_{2,10}$		$J - \varepsilon(C + T) + aE, B_1 + \varepsilon P_2$
$L_{2,11}$	A_2	$J + aD + bE, T$
$L_{2,12}$		$D + aE, P_1$

olarak alınacaktır. $\{X_1, X_2\}$ alt cebirinin değişmez fonksiyonları

$$X_{1,2}F(x, y, t, \phi, R) = 0$$

sisteminin çözümünden

$$\begin{aligned}\varphi^1(x, y, t) &= \phi - a \arctan \frac{y}{x} - b \arctan t - \frac{t(x^2 + y^2)}{4(1 + t^2)} \\ \varphi^2(x, y, t) &= R\sqrt{1 + t^2} \\ \varphi^3(x, y, t) &= \frac{x^2 + y^2}{1 + t^2}\end{aligned}$$

olarak bulunur. R, ϕ bağımlı değişkenlerini içeren φ^1, φ^2 yeni bağımlı değişkenler olarak seçilir, $\varphi^3 = \xi$ olarak adlandırılıp yeni bağımsız değişken olarak belirlenirse, $\{X_1, X_2\}$ alt cebirinin simetri grubu altında değişmez kalan çözümler için R, ϕ 'nin yapısının

$$\begin{aligned}R &= \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}M(\xi) \\ \phi &= a\theta + b \arctan t + \frac{t\xi}{4} + \Phi(\xi)\end{aligned}$$

şeklinde olacağı bulunur. (4.4) hatırlanırsa, $L_{2,1}$ için çözümün

$$\begin{aligned}\psi(t, x, y) &= \frac{M(\xi)}{\sqrt{1 + t^2}}e^{i(a\theta + b \arctan t + t\xi/4 + \Phi(\xi))}, \\ \xi &= \frac{x^2 + y^2}{1 + t^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}\end{aligned}\tag{4.11}$$

yapısında olacağı görülür. (4.11), (4.5)'te yerine yazılırsa, $M(\xi), \Phi(\xi)$ 'nin çözüleceği aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemine ulaşılır.

$$M^2\dot{\Phi}\xi = C_0, \quad C_0 = \text{sabit}\tag{4.12a}$$

$$\ddot{M} = \left(\frac{b}{4\xi} + \frac{a^2}{4\xi^2} + \frac{1}{16}\right)M - \frac{\dot{M}}{\xi} + \frac{C_0^2}{\xi^3 M^3} + \frac{a_0}{4\xi}M^3\tag{4.12b}$$

L_{2,2} Alt Cebiri :

$L_{2,1}$ alt cebiri için yapılan simetri indirgemesi işlemleri bu alt cebir için de tekrarlanırsa, $L_{2,2}$ alt cebiri altında değişmezlik için çözümün yapısı,

$$\begin{aligned}\psi(t, x, y) &= M(\rho)e^{i(a\theta+\Phi(\rho))}, \\ \rho &= (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}\end{aligned}\tag{4.13}$$

şeklinde elde edilir. Burada $M(\rho)$, $\Phi(\rho)$ aşağıdaki sistemi sağlar.

$$M^2\dot{\Phi}\rho = C_0, \quad C_0 = \text{sabit}\tag{4.14a}$$

$$\ddot{M} = \frac{a^2}{\rho^2}M + \frac{C_0^2}{\rho^2}M^{-3} - \frac{\dot{M}}{\rho} + M^3\tag{4.14b}$$

L_{2,3} Alt Cebiri :

$L_{2,3}$ alt cebiri altında değişmez kalan çözüm

$$\begin{aligned}\psi(t, x, y) &= M(\rho)e^{i(a\theta+\varepsilon \ln t+\Phi(\rho))}, \\ \rho &= (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}\end{aligned}\tag{4.15}$$

yapısındadır. $M(\rho)$, $\Phi(\rho)$ aşağıdaki ADD sisteminden bulunur.

$$M^2\dot{\Phi}\rho = C_0, \quad C_0 = \text{sabit}\tag{4.16a}$$

$$\ddot{M} = (\varepsilon + \frac{a^2}{\rho^2})M + \frac{C_0^2}{\rho^2}M^{-3} - \frac{\dot{M}}{\rho} + a_0M^3\tag{4.16b}$$

L_{2,4} Alt Cebiri :

$L_{2,4}$ alt cebiri için simetri indirgemesi sonucu çözüm aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\psi(t, x, y) &= \frac{M(\xi)}{\sqrt{t}}e^{i(a\theta+\frac{b}{2} \ln t+\Phi(\xi))}, \\ \xi &= \frac{x^2 + y^2}{t}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}\end{aligned}\tag{4.17}$$

Burada $M(\xi)$, $\Phi(\xi)$ fonksiyonları

$$M^2(8\dot{\Phi} - 1)\xi = C_0, \quad C_0 = \text{sabit}\tag{4.18a}$$

$$\ddot{M} = (\frac{b}{8\xi} + \frac{a^2}{4\xi^2} - \frac{1}{64})M + \frac{C_0^2}{64\xi^2}M^{-3} + \frac{a_0}{4\xi}M^3 - \frac{\dot{M}}{\xi}\tag{4.18b}$$

sisteminin çözümünden elde edilecektir.

L_{2,5} Alt Cebiri :

$L_{2,5}$ alt cebiri altında değişmezlik, çözümlün

$$\psi(t, x, y) = M(y)e^{i\Phi(y)} \quad (4.19)$$

yapısında olacağını gösterir. Burada $M(y)$, $\Phi(y)$ aşığıdaki sistemi sağlar.

$$M^2\dot{\Phi} = C_0, \quad C_0 = \text{sabit} \quad (4.20a)$$

$$\ddot{M} = C_0^2M^{-3} + a_0M^3 \quad (4.20b)$$

L_{2,6} Alt Cebiri :

$L_{2,6}$ alt cebiri altında değişmez kalan çözümlün yapısı

$$\psi(t, x, y) = M(y)e^{i(\varepsilon t + \Phi(y))} \quad (4.21)$$

olarak bulunur. $M(y)$, $\Phi(y)$ 'nin sağladığı sistem şu şekildedir:

$$M^2\dot{\Phi} = C_0, \quad C_0 = \text{sabit} \quad (4.22a)$$

$$\ddot{M} = \varepsilon M + C_0^2M^{-3} + a_0M^3 \quad (4.22b)$$

L_{2,7} Alt Cebiri :

(1.1) denkleminin çözümlü bu alt cebir için

$$\begin{aligned} \psi(t, x, y) &= M(\xi)e^{i(\frac{\varepsilon t}{2} - \frac{t^3}{6} + \Phi(\xi))}, \\ \xi &= x - \frac{t^2}{2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

şekindedir. $M(\xi)$, $\Phi(\xi)$ aşığıdaki sistemi sağlar:

$$M^2\dot{\Phi} = C_0, \quad C_0 = \text{sabit} \quad (4.24a)$$

$$\ddot{M} = \frac{\varepsilon}{2}M + C_0^2M^{-3} + a_0M^3 \quad (4.24b)$$

L_{2,8} Alt Cebiri :

$L_{2,8}$ alt cebiri altında değişmezlik, çözümlün

$$\psi(t, x, y) = M(t)e^{i\Phi(t)} \quad (4.25)$$

yapısında olacağını gösterir. Bu alt cebir için $M(t)$, $\Phi(t)$ kolaylıkla çözümlüştür:

$$\dot{\Phi} = -aC_0^2t + C_1, \quad C_0, C_1 = \text{sabit} \quad (4.26a)$$

$$M = C_0 \quad (4.26b)$$

L_{2,9} Alt Cebiri :

L_{2,9} alt cebiri için çözüm

$$\psi(t, x, y) = M(t)e^{i(\frac{x^2}{4t} + \Phi(t))} \quad (4.27)$$

yapısındadır. Bu alt cebir için de $M(t)$, $\Phi(t)$ hemen bulunabilmiştir:

$$M = C_0 t^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.28a)$$

$$\Phi = -2aC_0 t^{\frac{1}{2}} + C_1, \quad C_0, C_1 = \text{sabit} \quad (4.28b)$$

L_{2,10} Alt Cebiri :

L_{2,10} alt cebiri altında değişmez kalan çözüm,

$$\begin{aligned} \psi(t, x, y) &= \frac{M(\xi)}{\sqrt{1+t^2}} e^{i\phi(t,x,y)}, \\ \phi(t, x, y) &= \frac{x^2}{4t} - a\varepsilon \arctan t + \frac{\xi^2(t^2 - 1)}{4t} + \Phi(\xi), \\ \xi &= \frac{\varepsilon x - yt}{1+t^2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

yapısında olup $M(\xi)$ ve $\Phi(\xi)$ 'nin bulunacağı denklem sistemi

$$M^2 \dot{\Phi} = C_0, \quad C_0 = \text{sabit} \quad (4.30a)$$

$$\ddot{M} = (\xi^2 - a\varepsilon)M + C_0^2 M^{-3} + a_0 M^3 \quad (4.30b)$$

olarak verilir.

L_{2,11} Alt Cebiri (Abelyen olmayan) :

L_{2,11} alt cebiri altında değişmezlik için çözümün yapısı

$$\begin{aligned} \psi(t, x, y) &= \frac{M(\xi)}{\rho} e^{i(\frac{b}{a} \ln \rho + \Phi(\xi))}, \\ \xi &= \rho \exp(-a\theta), \\ \rho &= (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (4.31)$$

şeklindedir. $M(\xi)$, $\Phi(\xi)$ tarafından sağlanan denklem aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} (1+a^2)\xi^2 M \ddot{\Phi} + 2(1+a^2)\xi^2 \dot{M} \dot{\Phi} \\ + (a^2-1)\xi M \dot{\Phi} + (2b/a)(\xi \dot{M} - M) &= 0 \\ (1-b^2/a^2)M + (a^2-1)\xi \dot{M} + (a^2+1)\xi^2 \ddot{M} \\ - (2b/a)\xi M \dot{\Phi} - (a^2+1)\xi^2 M \dot{\Phi}^2 &= a_0 M^3 \end{aligned} \quad (4.32)$$

$L_{2,12}$ Alt Cebiri (Abelyen olmayan) :

$L_{2,12}$ alt cebiri altında değişmez kalan çözüm,

$$\begin{aligned}\psi(t, x, y) &= \frac{M(\xi)}{\sqrt{t}} e^{i(\frac{a}{2} \ln t + \Phi(\xi))} \\ \xi &= \frac{y}{\sqrt{t}}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}\end{aligned}\tag{4.33}$$

yapısındadır. $M(\xi)$, $\Phi(\xi)$ aşığıdaki sistemi sağlar.

$$\dot{\Phi} = \frac{C_0 + \xi + \xi \dot{X}}{4\dot{X}}, \quad \dot{X} = M^2, \quad C_0 = \text{sabit}\tag{4.34a}$$

$$2X\ddot{X} - \dot{X}^2 + \left(\frac{\xi^2}{4} - 2a\right)\dot{X}^2 - \frac{1}{4}X^2 - 4a\dot{X}^3 - \frac{C_0}{2}X - \frac{C_0^2}{4} = 0\tag{4.34b}$$

Üç Boyutlu Alt Cebirlerin Grup Değişmez Çözümleri

Üç boyutlu alt cebirlerden bir kısmı açık çözüm verirken bir kısmı da ϕ 'nin yapısı hakkında bilgi vermemektedir. Bunlar dışındaki alt cebirler ve üretilen çözümler Tablo 4.2'de verilmiştir.

Tablo 4.2: Üç boyutlu alt cebirler ve çözümler

No	Baz	ψ
$L_{3,1}$	$T + \varepsilon E, P_1, P_2$	$\psi = (\varepsilon/a_0)^{1/2} \exp[i(\varepsilon t + \phi_0)]$
$L_{3,2}$	$J + aE, D + bE, T$	$\psi = [a(x^2 + y^2)]^{-1/2} \exp[i(a_0 \tan^{-1}(y/x) + \phi_0)]$
$L_{3,3}$	$D + aE, T, P_1$	$\psi = (\sqrt{2}/y) \exp(i\phi_0)$
$L_{3,4}$	$J + \varepsilon T + aE, P_1, P_2$	$\psi = (a/\varepsilon)^{1/2} \exp[i(at/\varepsilon + \phi_0)]$

5. İNDİRGENMİŞ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Bütün indirgenmiş denklemler birleştirilmiş bir şekilde yazılabilir:

$$\ddot{M} = B_1(\xi)\dot{M} + A_1(\xi)M + A_3(\xi)M^3 + B_0(\xi)M^{-3}. \quad (5.1)$$

Burada

$$M = \sqrt{H}, \quad H > 0 \quad (5.2)$$

dönüşümüyle bağımlı değişken H olur ve (5.1) denklemi

$$\ddot{H} = \frac{1}{2H}\dot{H}^2 + B_1\dot{H} + 2A_1H + 2A_3H^2 + \frac{2B_0}{H} \quad (5.3)$$

haline gelir. (5.3)'ü basitleştirmek için

$$H = \lambda(\xi)W(\eta), \quad \eta = \eta(\xi) \quad (5.4)$$

dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\begin{aligned} \ddot{W} = & \frac{1}{2W}\dot{W}^2 + \left(\frac{B_1}{\dot{\eta}} - \frac{\ddot{\eta}}{\dot{\eta}^2} - \frac{1}{\dot{\eta}} \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right) \dot{W} + \left(\frac{2A_1}{\dot{\eta}^2} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \frac{B_1}{\dot{\eta}^2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2\lambda^2\dot{\eta}^2} - \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda\dot{\eta}^2} \right) W \\ & + \frac{2\lambda A_3}{\dot{\eta}^2} W^2 + \frac{2B_0}{\lambda^2\dot{\eta}^2} W^{-1} \end{aligned} \quad (5.5)$$

(5.5) denklemi, katsayıların belli değerleri için Painlevé'nin sınıflandırmasındaki kanonik denklemlerden birine dönüştürülebilir ve bu sayede doğrusal denklemler, eliptik fonksiyonlar ya da Painlevé transandanları türünden integre edilebilir. Aksi halde Painlevé özelliğine sahip olmadığı sonucuna varılacak ve çözülemeyecektir.

5.1 $L_{2,1}$ Alt Cebiri İçin Çözümler

(4.12b) denklemi için A_1, A_3, B_0, B_1 Tablo 5.1'ten alınıp (5.5) denklemine yazılırsa

$$\begin{aligned} \ddot{W} = & \frac{1}{2W}\dot{W}^2 - \frac{1}{\dot{\eta}} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{\ddot{\eta}}{\dot{\eta}} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right) \dot{W} + \frac{a_0\lambda}{2\xi\dot{\eta}^2} W^2 + \frac{2C_0^2}{(\xi\lambda\dot{\eta})^2} W^{-1} \\ & + \frac{1}{\dot{\eta}^2} \left(\frac{b}{2\xi} + \frac{a^2}{2\xi^2} + \frac{1}{8} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda\xi} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2\lambda^2} - \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right) W \end{aligned} \quad (5.6)$$

Tablo 5.1: Farklı alt cebirler için (5.5) katsayı terimleri

N0	A_1	A_3	B_0	B_1
$L_{2,1}$	$b/(4\xi) + a^2/(4\xi^2) + 1/16$	$a_0/(4\xi)$	C_0^2/ξ^2	$-1/\xi$
$L_{2,2}$	a^2/ρ^2	a_0	C_0^2/ρ^2	$-1/\rho$
$L_{2,3}$	$\varepsilon + a^2/\rho^2$	a_0	C_0^2/ρ^2	$-1/\rho$
$L_{2,4}$	$b/(8\xi) + a^2/(4\xi^2) - 1/64$	$a_0/(4\xi)$	$C_0^2/(64\xi^2)$	$-1/\xi$
$L_{2,5}$	0	a_0	C_0^2	0
$L_{2,6}$	ε	a_0	C_0^2	0
$L_{2,7}$	$\frac{\xi}{2}$	a_0	C_0^2	0
$L_{2,10}$	$\xi^2 - a\varepsilon$	a_0	C_0^2	0

elde edilir. Bu denklem, Painlevé'nin sınıflandırmasındaki kanonik denklemlerden PXXXIII ya da PXXXIV'e dönüştürülebilir.

$$\text{PXXXIII : } \ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + 4W^2 + \gamma W - \frac{1}{2}W^{-1} \quad (5.7)$$

$$\text{PXXXIV : } \ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + 4\gamma W^2 - \eta W - \frac{1}{2}W^{-1} \quad (5.8)$$

(5.6) denklemi ile (5.7) ve (5.8) denklemlerinde \dot{W} ve W^2 'nin katsayıları karşılaştırılırsa, λ ve η 'nın

$$\lambda = \lambda_0 \xi^{-1/3}, \quad \eta = \eta_0 \xi^{1/3} \quad (5.9)$$

şeklinde seçilmesi gerektiği görülür. λ ve η 'nin bu seçimiyle (5.6) denklemi

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + \frac{9a_0\lambda_0}{2\eta_0^2} W^2 + 18 \left(\frac{C_0}{\lambda_0\eta_0} \right)^2 W^{-1} + \left[\frac{(9a^2 - 1)}{2} \eta^{-2} + \frac{9b}{2\eta_0^3} \eta + \frac{9}{8\eta_0^6} \eta^4 \right] W \quad (5.10)$$

haline gelir. (5.7) ve (5.8)'e bakılırsa, W 'nin katsayısı bir sabit ya da η olmalıdır. (5.10) denklemindeki W 'nin katsayısında, $a^2 = 1/9$ seçimiyle η^{-2} terimini yok etmek mümkündür ancak η^4 terimi ortadan kaldırılamaz. Dolayısıyla (4.12b) denklemi, kanonik denklemlerden birine dönüştürülemez ve Painlevé özelliğine sahip değildir.

(4.12b) denklemi $C_0 = 0$ için ele alınırsa, (5.10) denkleminin $C_0 = 0$ durumuna ulaşılır :

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + \frac{9a_0\lambda_0}{2\eta_0^2} W^2 + \left[\frac{(9a^2 - 1)}{2} \eta^{-2} + \frac{9b}{2\eta_0^3} \eta + \frac{9}{8\eta_0^6} \eta^4 \right] W. \quad (5.11)$$

Bu denklem, PXIX veya PXX denkleminde dönüştürülebilir:

$$\text{PXIX : } \ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + 4W^2 + 2W, \quad (5.12)$$

$$\text{PXX : } \ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + 4W^2 + 2\eta W. \quad (5.13)$$

Yukarıda yapıldığı gibi, λ ve η 'nin seçimi, (5.9) denklemindeki gibi olmalıdır ve W 'nin katsayısı, (5.11) denkleminin kanonik formlardan birine dönüşmesine imkan vermez.

Son olarak, (4.12b) denkleminin nokta simetrisi ve sabit çözümü bulunmamaktadır.

5.2 $L_{2,2}$ Alt Cebiri İçin Çözümler

$C_0 \neq 0$ İçin (4.14b) Denklemi

Bu denklem λ ve η 'nin uygun bir seçimiyle birinci mertebeden türevi içermeyen ve ikinci dereceden terimin katsayısı sabit olan standart denkleme dönüştürülebilir. λ ve η 'nin seçimi ve (5.5)'e göre denklemin dönüşmüş hali aşağıdaki gibidir:

$$\lambda = \lambda_0 \rho^{-2/3}, \quad \eta = \eta_0 \rho^{2/3},$$

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + \left(\frac{9a_0\lambda_0}{2\eta_0^2}\right)W^2 + \left(\frac{9a^2-1}{2}\eta^{-2}\right)W + \frac{9}{2}\left(\frac{C_0}{\lambda_0\eta_0}\right)^2W^{-1}.$$

$a^2 = 1/9$ için bu denklem Painlevé özelliğine sahiptir. Bu durumda $\eta_0^2 = 9a_0\lambda_0/8$ seçilir ve bir kez integral alınırsa

$$\dot{W}^2 = 4(W^3 + CW - \delta^2), \quad C = \text{sabit}, \quad \delta^2 = \frac{2C_0^2}{a_0\lambda_0^3} \quad (5.14)$$

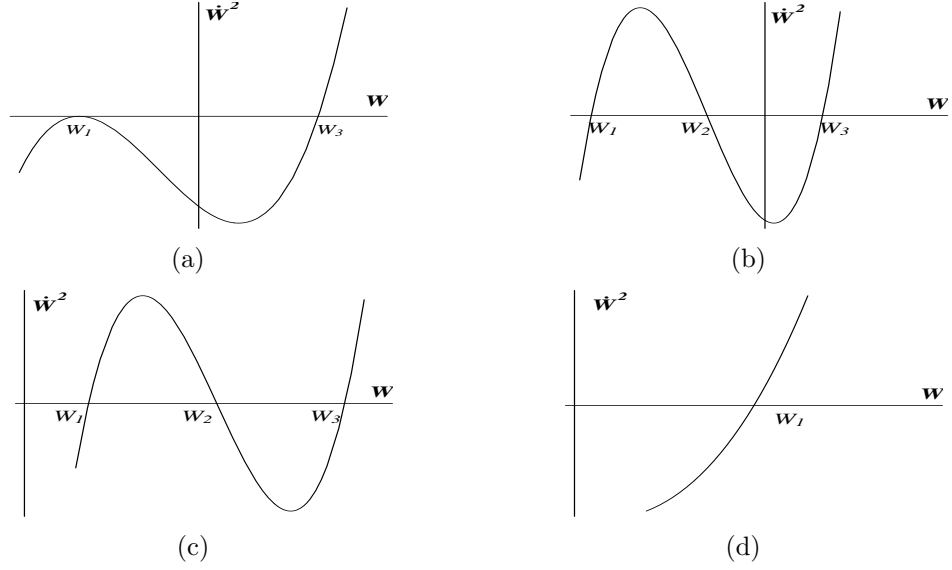
denkleminde ulaşılır. (5.14) denkleminin çözümü Weierstrass $\wp(\xi)$ fonksiyonu ya da Jacobi eliptik fonksiyonları türünden ifade edilebilir [25]. (5.2) eşitsizliğinden dolayı λW pozitif olmalıdır. W_1, W_2, W_3 ; (5.14) eşitliğinin sağ tarafının kökleri olmak üzere ,

$$P(W) = 4(W^3 + CW - \delta^2) = 4(W - W_1)(W - W_2)(W - W_3)$$

yazılırsa, $P(W)$ 'nin köklerine ve işaretine göre (5.14) denkleminin çözümleri aşağıdaki durumlar için incelenecektir:

- (i) $P(W)$ 'nin tek kökü olması durumu. $P(W)$, W^2 terimini içermediğinden bu mümkün değildir.
- (ii) $P(W)$ 'nin iki eşit, bir de bunlardan farklı kökünün olması durumu. $W_1 = W_2 \neq W_3$ için $P(W)$,

$$P(W) = 4(W^3 + CW - \delta^2) = 4(W - W_1)^2(W - W_3)$$



Şekil 5.1: (5.14) denkleminin $\dot{W}^2 = P(W)$ grafikleri

şekline gelir.

Bu durum $C = -3.2^{-\frac{2}{3}}\delta^{\frac{4}{3}}$ için mümkündür ve $W_{1,2,3}$ kökleri $W_{1,2} = -2^{-\frac{1}{3}}\delta^{\frac{2}{3}}$, $W_3 = (2\delta)^{\frac{2}{3}}$ şeklinde bulunur. Köklerin bu değerleri için $\dot{W}^2 = P(W)$ grafiği Şekil 5.1(a)'da verilmiştir. $\dot{W}^2 > 0$ olması gerektiğinden, $W > W_3$ için (5.14)'ün integrali alınır şu çözüme ulaşılır:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{2c_1}{3} \left(\frac{2}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{3} + \sec^2 \tau\right)^{\frac{1}{2}}, & \tau &= c_1 \rho^{\frac{2}{3}} + c_2, & c_1^2 &= \frac{27}{8} (a_0 c_0)^{\frac{2}{3}} \\
 \Phi &= \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \tan \tau\right) - \sqrt{\frac{2}{3}} \tau + \Phi_0, & \psi &= M \exp\left[i\left(\pm \frac{1}{3}\theta + \Phi\right)\right].
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

(iii) $P(W)$ 'nin üç farklı kökünün olması durumu. Bu durumda, $W_{1,2,3}$ kökleri

$$W_1 + W_2 + W_3 = 0, \quad W_1 W_2 + W_1 W_3 + W_2 W_3 = C, \quad W_1 W_2 W_3 = \delta^2$$

sisteminden belirlenir. Köklerin ikisinin aynı işaretli, üçüncüsünün daima pozitif olduğu görülmektedir. Köklerin

$$\text{(A)} \quad W_1 < W_2 < 0 < W_3 \quad \text{(B)} \quad 0 < W_1 < W_2 < W_3, \quad W_2^2 < \frac{\delta^2}{W_1}$$

sıralanmaları için farklı çözümler elde edilmektedir. Şekil 5.1(b), 5.1(c) dikkate alınarak $W > W_3$ için (5.14) integre edilirse (A) ve (B) için, $a_0, \lambda_0 > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 W &= W_2 + (W_3 - W_2) [\text{cn}(\tau, k)]^{-2}, & \tau &= c_1 \rho^{\frac{2}{3}} + c_2, & k^2 &= \frac{W_2 - W_1}{W_3 - W_1}, \\
 M &= \rho^{-1/3} (\lambda_0 W)^{1/2}, & c_1^2 &= \frac{9a_0 \lambda_0}{8} (W_3 - W_1), & & \\
 \Phi &= \frac{\delta}{\sqrt{W_3 - W_1}} \int \frac{d\tau}{W} + \Phi_0, & \psi &= M \exp\left[i\left(\pm \frac{1}{3}\theta + \Phi\right)\right]
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

çözümü elde edilir. $W_1 < W < W_2$ aralığında integral alınır, (A) için $a_0, \lambda_0 < 0$ ve (B) için $a_0, \lambda_0 > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} W &= W_1 + (W_2 - W_1)\text{sn}^2(\tau, k), & \tau &= c_1\rho^{\frac{2}{3}} + c_2, & k^2 &= \frac{W_2 - W_1}{W_3 - W_1} \\ M &= \rho^{-1/3}(\lambda_0 W)^{1/2}, & c_1^2 &= \frac{9a_0\lambda_0}{8}(W_3 - W_1) \\ \Phi &= \frac{\delta}{\sqrt{W_3 - W_1}} \int \frac{d\tau}{W} + \Phi_0, & \psi &= M \exp\left[i\left(\pm\frac{1}{3}\theta + \Phi\right)\right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

çözümüne ulaşılır.

(iv) $P(W)$ 'nin iki karmaşık, bir reel sayı kökünün olması durumu. $W_2 = p + iq$, $W_3 = p - iq$, $W_1 \in \mathbb{R}$ olsun. p, q ve W_1

$$2p + W_1 = 0, \quad \frac{\delta^2}{W_1} + 2pW_1 = C, \quad p^2 + q^2 = \frac{\delta^2}{W_1}$$

denklemlerinden bulunur. $W_1 > 0$ olduğundan, Şekil 5.1(d)'ye göre $W > W_1$ için alınan integral $a_0, \lambda_0 > 0$ için aşağıdaki çözümü verir:

$$\begin{aligned} W &= \frac{A + W_1 + (W_1 - A)\text{cn}(\tau, k)}{1 + \text{cn}(\tau, k)}, & \tau &= c_1\rho^{\frac{2}{3}} + c_2, \\ M &= \rho^{-1/3}(\lambda_0 W)^{1/2}, & k^2 &= \frac{A + p - W_1}{2A}, \\ \Phi &= \frac{\delta}{2\sqrt{A}} \int \frac{d\tau}{W} + \Phi_0, & c_1^2 &= \frac{3Aa_0\lambda_0}{2}, \\ \Psi &= M \exp\left[i\left(\pm\frac{1}{3}\theta + \Phi\right)\right], & A^2 &= (p - W_1)^2 + q^2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

$C_0 = 0$ İçin (4.14b) Denklemi

λ ve η 'nin uygun bir seçimiyle (4.14b) denklemi P -tipi bir denkleme dönüştürülebilir.

$$\lambda = \lambda_0\rho^{-2/3}, \quad \eta = \eta_0\rho^{2/3}$$

seçilirse, $C_0 = 0$ için bu denklem

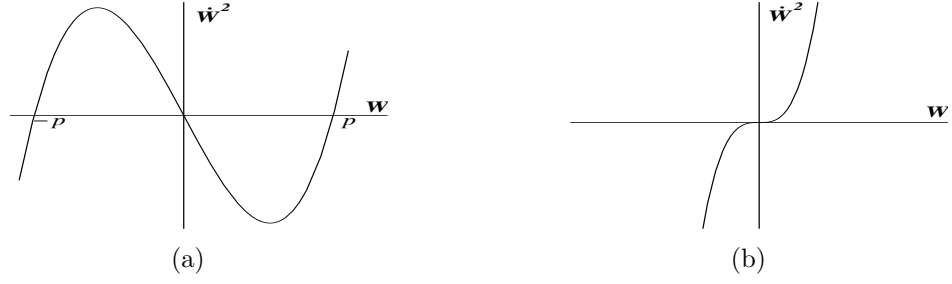
$$\ddot{W} = \frac{1}{2W}\dot{W}^2 + \left(\frac{9a_0\lambda_0}{2\eta_0^2}\right)W^2 + \left(\frac{9a^2 - 1}{2}\eta^{-2}\right)W$$

haline gelir. Elde edilen denklem yalnızca $a^2 = 1/9$ durumunda Painlevé özelliğine sahiptir ve $\eta_0^2 = 9a_0\lambda_0/8$ seçimiyle PXVIII denklemine dönüşür:

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W}\dot{W}^2 + 4W^2$$

İlk integral,

$$\dot{W}^2 = 4W(C + W^2), \quad C = \text{sabit} \quad (5.19)$$



Şekil 5.2: (5.19) denklemleri için $\dot{W}^2 = P(W)$ grafikleri

şeklinde verilir. C integral sabitine sabitine bağlı olarak, (1.1) denklemleri için aşağıdaki çözümler elde edilmiştir:

(i) $C = 0$.

$$\psi = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{a_0} \right)^{1/2} (\rho^{2/3} - \rho_0)^{-1} \exp(i\Phi_0). \quad (5.20)$$

(ii) $C = -p^2 < 0$. (5.19) denklemleri

$$\dot{W}^2 = 4W(W - p)(W + p)$$

şeklinde yazılır. Şekil 5.2(a) dikkate alınarak $W > p$ ve $-p < W < 0$ için integral alındığında, $c_1^2 = 9a_0\lambda_0(-C)^{1/2}/4$, $k^2 = 1/2$ olmak üzere

$$\psi = \frac{2c_1}{3} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{1/2} \rho^{-1/3} [\text{cn}(c_1\rho^{2/3} + c_2, k)]^{-1} \exp(i\Phi_0), \quad a_0, \lambda_0 > 0 \quad (5.21a)$$

$$\psi = \frac{2c_1}{3} \left(\frac{-1}{a_0} \right)^{1/2} \rho^{-1/3} \text{cn}(c_1\rho^{2/3} + c_2, k) \exp(i\Phi_0), \quad a_0, \lambda_0 < 0 \quad (5.21b)$$

çözümleri elde edilir.

(iii) $C = p^2 > 0$. (5.19) denkleminin, Şekil 5.2(b) dikkate alınarak integre edilmesiyle, $a_0, \lambda_0 > 0$ için aşağıdaki çözüm elde edilir:

$$\psi = \frac{2c_1}{3} \left(\frac{2}{a_0} \right)^{1/2} \rho^{-1/3} \text{tn}(c_1\rho^{2/3} + c_2, k) \text{dn}(c_1\rho^{2/3} + c_2, k) \exp(i\Phi_0) \quad (5.22)$$

$$c_1^2 = \frac{9a_0\lambda_0 C^{1/2}}{8} \quad k^2 = 1/2.$$

5.3 $L_{2,3}$ Alt Cebiri İçin Çözümler

$M^2 = \frac{\varepsilon}{a_0}$ bu denklemin sabit sayı çözümüdür. (1.1)'in çözümü, $\psi = M \exp(i\phi_0)$ olarak yazılır.

(i) $C_0 \neq 0$ için (4.16b) denklemi. $\lambda = \lambda_0 \rho^{-2/3}$ ve $\eta = \eta_0 \rho^{2/3}$ seçilirse (4.16b) şu denkleme dönüşür:

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + \frac{9a_0 \lambda_0}{2\eta_0^2} W^2 + \left[\frac{9a^2 - 1}{2} \eta^{-2} + \frac{9\varepsilon}{2\eta_0^3} \eta \right] W + \frac{9}{2} \left(\frac{C_0}{\lambda_0 \eta_0} \right)^2 W^{-1}.$$

$\eta_0 = -\varepsilon \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}$ ve $a^2 = 1/9$, seçilirse, bu denklem PXXXIV ile bir sabit farkıyla aynı olan

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + 4\gamma W^2 - \eta W + 2\delta^2 W^{-1} \quad (5.23)$$

denkleme dönüşür. Burada γ, δ sabitler olup

$$\gamma = 3^{2/3} 2^{-7/3} a_0 \lambda_0, \quad \delta^2 = 3^{2/3} 2^{-4/3} (C_0 / \lambda_0)^2$$

şeklinde verilir. (5.23) denkleminde

$$2\gamma W = \dot{V} + V^2 + \frac{\eta}{2}$$

yazılırsa, V 'nin

$$\ddot{V} = 2V^3 + \eta V + k, \quad k = -\frac{1}{2} \pm 4a_0 \delta i \quad (5.24)$$

denklemini sağladığı görülür. (5.24), ikinci Painlevé transandanıdır. $V = P_{II} \left[-\varepsilon \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} \rho^{2/3} \right]$ sonucuna ulaşılır. W karmaşık sayı değerli olduğundan, $\lambda_0, \lambda_0 W$ çarpımını reel yapacak şekilde seçilmesi gereken bir karmaşık sabit sayıdır.

(ii) $C_0 = 0$ için (4.16b) denklemi. Bu durum $C_0 = 0$ olmak üzere (i) ile aynıdır. Yine $\lambda = \lambda_0 \rho^{-2/3}$ ve $\eta = \eta_0 \rho^{2/3}$ seçilerek

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + \frac{9a_0 \lambda_0}{2\eta_0^2} W^2 + \left[\frac{9a^2 - 1}{2} \eta^{-2} + \frac{9\varepsilon}{2\eta_0^3} \eta \right] W$$

denklemini elde edilir. $a^2 = \frac{1}{9}$, $\eta_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \varepsilon$ ve $\lambda_0 = \left(\frac{2}{9}\right)^{5/3} \frac{1}{a_0}$ için PXX denkleminde ulaşılır:

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + 4W^2 + 2\eta W.$$

$U^2 = W$ dönüşümüyle yine Painlevé transandanı P_{II} elde edilir:

$$\ddot{U} = 2U^3 + \eta U.$$

Sonuç olarak, çözüm aşağıdaki şekildedir:

$$\psi = \lambda_0^{1/2} P_{II}(\eta_0 \rho^{2/3}) \exp(i\Phi_0). \quad (5.25)$$

5.4 $L_{2,4}$ Alt Cebiri İçin Çözümler

(4.18b) denkleminin (5.5)'e göre dönüşmüş hali

$$\begin{aligned} \ddot{W} = & \frac{1}{2W} \dot{W}^2 - \frac{1}{\dot{\eta}} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{\dot{\eta}}{\dot{\eta}} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right) \dot{W} + \frac{a_0 \lambda}{2\xi \dot{\eta}^2} W^2 + \frac{C_0^2}{32 (\xi \lambda \dot{\eta})^2} W^{-1} \\ & + \frac{1}{\dot{\eta}^2} \left(\frac{b}{4\xi} + \frac{a^2}{2\xi^2} - \frac{1}{32} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda \xi} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2\lambda^2} - \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right) W \end{aligned} \quad (5.26)$$

şekindedir. $L_{2,1}$ alt cebirinde olduğu gibi, bu denklem de PXXXIII veya PXXXIV'e dönüşebilir. (5.26) denklemi ile (5.7) ve (5.8) denklemlerinde \dot{W} ve W^2 'nin katsayıları karşılaştırılırsa, λ ve η 'nin

$$\lambda = \lambda_0 \xi^{-1/3}, \quad \eta = \eta_0 \xi^{1/3}$$

şeklinde seçilmesi gerektiği görülür. λ ve η 'nin bu seçimi için (5.26) denklemi

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + \frac{9a_0 \lambda_0}{2\eta_0^2} W^2 + \frac{9}{32} \left(\frac{C_0}{\lambda_0 \eta_0} \right)^2 W^{-1} + \left[\frac{(9a^2 - 1)}{2} \eta^{-2} + \frac{9b}{4\eta_0^3} \eta - \frac{9}{32\eta_0^6} \eta^4 \right] W \quad (5.27)$$

haline gelir. (5.7) ve (5.8)'e bakılırsa, W 'nin katsayısı bir sabit ya da η olmalıdır. (5.10) denklemindeki W 'nin katsayısında, $a^2 = 1/9$ seçimiyle η^{-2} terimini yok etmek mümkündür ancak η^4 terimi ortadan kaldırılamaz. Dolayısıyla (4.18b) denklemi, kanonik denklemlerden birine dönüştürülemez ve Painlevé özelliğine sahip değildir.

(4.18b) denklemi $C_0 = 0$ için ele alınırsa, $L_{2,1}$ alt cebirinde olduğu gibi, kanonik denklemlerden birine dönüştürülemeyecektir. Son olarak, (4.18b) denkleminin nokta simetrisi ve sabit çözümleri yoktur.

5.5 $L_{2,5}$ Alt Cebiri İçin Çözümler

$M = C_0^{1/3} (-a_0)^{-1/6}$ bu denklemin sabit sayı çözümüdür. (1.1)'in çözümü, $\psi = M \exp[i(\phi_0 - (a_0 C_0)^{1/3} y)]$ olarak yazılır.

$C_0 \neq 0$ için (4.20b) denklemi

Bu denklem λ ve η 'nin uygun bir seçimiyle birinci mertebeden türevi içermeyen ve ikinci dereceden terimin katsayısı sabit olan standart denkleme dönüştürülebilir. λ ve η 'nin seçimi ve (5.5)'ya göre denklemin dönüşmüş hali aşağıdaki gibidir.

$$\lambda = \lambda_0, \quad \eta = \eta_0 y,$$

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W}\dot{W}^2 + \left(\frac{2a_0\lambda_0}{\eta_0^2}\right)W^2 + 2\left(\frac{C_0}{\lambda_0\eta_0}\right)^2W^{-1}.$$

Burada $\eta_0^2 = a_0\lambda_0/2$ seçilir ve bir kez integral alınırsa

$$\dot{W}^2 = 4(W^3 + CW - \delta^2), \quad C = \text{sabit}, \quad \delta^2 = \frac{2C_0^2}{a_0\lambda_0^3} \quad (5.28)$$

denklemi elde edilir ki, bu denklemin çözümü Weierstrass $\wp(\xi)$ fonksiyonu ya da Jacobi eliptik fonksiyonları türünden yazılabilir. (5.2)'den dolayı λW 'nin pozitif olması gerekmektedir. W_1, W_2, W_3 ; (5.28) denkleminin sağ tarafının kökleri olmak üzere ,

$$P(W) = 4(W^3 + CW - \delta^2) = 4(W - W_1)(W - W_2)(W - W_3)$$

yazılırsa, $P(W)$ 'nin köklerine ve işaretine göre (5.28) denkleminin çözümleri aşağıdaki durumlar için incelenecektir:

(i) $P(W)$ 'nin tek kökü olması durumu. $P(W)$, W^2 terimini içermediğinden bu mümkün değildir.

(ii) $P(W)$ 'nin iki eşit, bir de bunlardan farklı kökünün olması durumu. $W_1 = W_2 \neq W_3$ için $P(W)$,

$$P(W) = 4(W^3 + CW - \delta^2) = 4(W - W_1)^2(W - W_3)$$

şekline gelir. Bu durum $C = -3.2^{-\frac{2}{3}}\delta^{\frac{4}{3}}$ için mümkündür ve $W_{1,2,3}$ kökleri $W_{1,2} = -2^{-\frac{1}{3}}\delta^{\frac{2}{3}}$, $W_3 = (2\delta)^{\frac{2}{3}}$ şeklinde bulunur. Köklerin bu değerleri için $\dot{W}^2 = P(W)$ grafiği Şekil 5.1(a)'da verilmiştir. $\dot{W}^2 > 0$ olması gerektiğinden, $W > W_3$ için (5.28)'in integrali alınırsa şu çözüme ulaşılır:

$$M = c_1\left(\frac{2}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{3} + \sec^2 \tau\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau = c_1 y + c_2, \quad c_1^2 = 3.2^{-4/3}a_0\lambda_0\delta^{-2/3}, \quad (5.29)$$

$$\Phi = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan \tau\right) - \sqrt{\frac{2}{3}}\tau + \Phi_0, \quad \psi = M \exp(i\Phi).$$

(iii) $P(W)$ 'nin üç farklı kökünün olması durumu. Bu durumda, $W_{1,2,3}$ kökleri

$$W_1 + W_2 + W_3 = 0, \quad W_1W_2 + W_1W_3 + W_2W_3 = C, \quad W_1W_2W_3 = \delta^2$$

sisteminden belirlenir. Köklerin ikisinin aynı işaretli, üçüncüsünün daima pozitif olduğu görülmektedir. Köklerin

$$(A) \quad W_1 < W_2 < 0 < W_3 \quad (B) \quad 0 < W_1 < W_2 < W_3, \quad W_2^2 < \frac{\delta^2}{W_1}$$

sıralanmaları için farklı çözümler elde edilmektedir. Şekil 5.1(b),5.1(c) dikkate alınarak $W > W_3$ için (5.28) integrale edilirse (A) ve (B) için, $a_0, \lambda_0 > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} W &= W_2 + (W_3 - W_2)[\text{cn}(\tau, k)]^{-2}, & \tau &= c_1 y + c_2, & k^2 &= \frac{W_2 - W_1}{W_3 - W_1}, \\ M &= (\lambda_0 W)^{1/2}, & c_1^2 &= \frac{a_0 \lambda_0}{2}(W_3 - W_1), & & (5.30) \\ \Phi &= \frac{\delta}{\sqrt{W_3 - W_1}} \int \frac{d\tau}{W} + \Phi_0, & \psi &= M \exp(i\Phi) \end{aligned}$$

çözümü elde edilir. $W_1 < W < W_2$ aralığında integral alınır, (A) için $a_0, \lambda_0 < 0$ ve (B) için $a_0, \lambda_0 > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} W &= W_1 + (W_2 - W_1)\text{sn}^2(\tau, k), & \tau &= c_1 y + c_2, & k^2 &= \frac{W_2 - W_1}{W_3 - W_1}, \\ M &= (\lambda_0 W)^{1/2}, & c_1^2 &= \frac{a_0 \lambda_0}{2}(W_3 - W_1), & & (5.31) \\ \Phi &= \frac{\delta}{\sqrt{W_3 - W_1}} \int \frac{d\tau}{W} + \Phi_0, & \psi &= M \exp(i\Phi) \end{aligned}$$

çözümüne ulaşılır.

(iv) $P(W)$ 'nin iki karmaşık, bir reel sayı kökünün olması durumu. $W_2 = p + iq$, $W_3 = p - iq$, $W_1 \in \mathbb{R}$ olsun. p, q ve W_1

$$2p + W_1 = 0, \quad \frac{\delta^2}{W_1} + 2pW_1 = C, \quad p^2 + q^2 = \frac{\delta^2}{W_1}.$$

denklemlerinden bulunur. $W_1 > 0$ olduğundan, $W > W_1$ için alınan integral $a_0, \lambda_0 > 0$ için aşağıdaki çözümü verir:

$$\begin{aligned} W &= \frac{A + W_1 + (W_1 - A)\text{cn}(\tau, k)}{1 + \text{cn}(\tau, k)}, & \tau &= c_1 y + c_2, \\ M &= (\lambda_0 W)^{1/2}, & k^2 &= \frac{A + p - W_1}{2A} \\ \Phi &= \frac{\delta}{2\sqrt{A}} \int \frac{d\tau}{W} + \Phi_0, & c_1^2 &= \frac{3Aa_0\lambda_0}{2} \\ \Psi &= M \exp(i\Phi), & A^2 &= (p - W_1)^2 + q^2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

$C_0 = 0$ için (4.20b) Denklemi

λ ve η 'nin uygun bir seçimiyle (4.20b) denklemi P -tipi bir denkleme dönüştürülebilir.

$$\lambda = \lambda_0, \quad \eta = \eta_0 y,$$

seçilirse, $C_0 = 0$ için bu denklem

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + \left(\frac{2a_0\lambda_0}{\eta_0^2} \right) W^2$$

haline gelir. Elde edilen denklem $\eta_0^2 = a_0\lambda_0/2$ seçimiyle PXVIII denklemine dönüşür:

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W}\dot{W}^2 + 4W^2.$$

İlk integral,

$$\dot{W}^2 = 4W(C + W^2), \quad C = \text{sabit} \quad (5.33)$$

şeklinde verilir. C integral sabitine sabitine bağlı olarak, (1.1) denklemi için aşağıdaki çözümler elde edilmiştir:

(i) $C = 0$.

$$\psi = \left(\frac{2}{a_0}\right)^{1/2}(y - y_0)^{-1} \exp(i\Phi_0) \quad (5.34)$$

(ii) $C = -p^2 < 0$. (5.33) denklemi

$$\dot{W}^2 = 4W(W - p)(W + p)$$

şeklinde yazılır. Şekil 5.2(a) dikkate alınarak $W > p$ ve $-p < W < 0$ için integral alındığında, $c_1^2 = a_0\lambda_0(-C)^{1/2}$, $k^2 = 1/2$ olmak üzere

$$\psi = c_1\left(\frac{1}{a_0}\right)^{1/2} [\text{cn}(c_1y + c_2, k)]^{-1} \exp(i\Phi_0), \quad a_0, \lambda_0 > 0 \quad (5.35a)$$

$$\psi = c_1\left(\frac{-1}{a_0}\right)^{1/2} \text{cn}(c_1y + c_2, k) \exp(i\Phi_0), \quad a_0, \lambda_0 < 0 \quad (5.35b)$$

çözümleri elde edilir.

(iii) $C = p^2 > 0$. (5.33) denkleminin, Şekil 5.2(b) dikkate alınarak integre edilmesiyle, $a_0, \lambda_0 > 0$ için aşağıdaki çözüm elde edilir:

$$\begin{aligned} \psi &= c_1\left(\frac{2}{a_0}\right)^{1/2} \text{tn}(c_1y + c_2, k) \text{dn}(c_1y + c_2, k) \exp(i\Phi_0), \\ c_1^2 &= \frac{a_0\lambda_0 C^{1/2}}{2}, \quad k^2 = 1/2. \end{aligned} \quad (5.36)$$

5.6 $L_{2,6}$ Alt Cebiri İçin Çözümler

Önce $M = M_0$ sabit çözümü aranır, $a_0M_0^6 + \varepsilon M_0^4 + C_0^2 = 0$ cebirsel denkleme ulaşılır. (1.1)'in çözümü, $\psi = M_0 \exp[i(\varepsilon t + C_0M_0^{-2}y + \phi_0)]$ şeklinde yazılabilir.

$C_0 \neq 0$ için (4.22b) denklemi

λ and η 'nın uygun seçimiyle bu denklemin Painlevé özelliğine sahip ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlere dönüştürülmesi mümkün olmaktadır.

λ, η dönüşümü ve (4.22b) denkleminin (5.3)'e göre dönüşmüş hali aşağıdaki gibidir:

$$\lambda = \lambda_0, \quad \eta = \eta_0 y, \quad \lambda_0 > 0$$

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + \left(\frac{2a_0\lambda_0}{\eta_0^2}\right)W^2 + \frac{2\varepsilon}{\eta_0^2}W + 2\left(\frac{C_0}{a_0\lambda_0}\right)^2W^{-1}.$$

Bu adımda $\eta_0^2 = a_0\lambda_0/2$ seçilir ve bir kez integral alınırsa

$$\dot{W}^2 = 4(W^3 + \alpha W^2 + CW - \delta^2),$$

$$C = \text{sabit}, \quad \delta^2 = \frac{2C_0^2}{a_0\lambda_0^3}, \quad \alpha = \frac{2\varepsilon}{a_0\lambda_0} \quad (5.37)$$

denklemini elde edilir. W_1, W_2, W_3 ; (5.37) denkleminin sağ tarafının kökleri olmak üzere,

$$P(W) = 4(W^3 + \alpha W^2 + CW - \delta^2) = 4(W - W_1)(W - W_2)(W - W_3)$$

yazılırsa, $P(W)$ 'nin köklerine ve işaretine göre (5.37) denkleminin çözümleri aşağıdaki durumlar için incelenecektir:

(i) $P(W)$ 'nin tek kökü olması durumu.

$$W_1 = \frac{-\alpha}{3} = \left(\frac{C}{3}\right)^{1/2} = \delta^{2/3}$$

için bu durum mümkündür. Çözüm $\alpha < 0$ koşulundan dolayı $\varepsilon = -1$ için vardır ve aşağıdaki şekilde yazılır:

$$M = \left(\frac{-2}{3a_0} + \frac{\lambda_0}{\tau}\right)^{1/2}, \quad \tau = (c_1 y + c_2)^{1/2}, \quad c_1^2 = 8a_0\lambda_0, \quad (5.38)$$

$$\Phi = -t + \frac{3\delta}{4\alpha}\tau^2 - \frac{9\delta}{2\alpha^2} + \frac{27\delta}{2\alpha^3} \ln(3 + \alpha\tau) + \Phi_0, \quad \psi = M \exp(i\Phi).$$

(ii) $P(W)$ 'nin katlı kökü olması durumu. $W_1 = W_2 \neq W_3$ olmak üzere, $P(W)$

$$P(W) = 4(W^3 + \alpha W^2 + CW - \delta^2) = 4(W - W_1)^2(W - W_3)$$

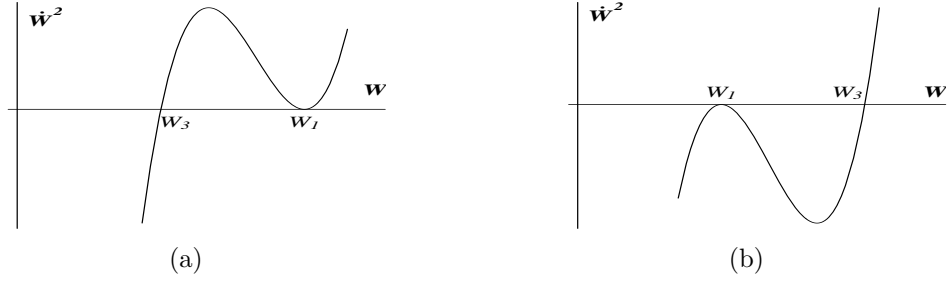
şeklinde yazılırsa, $W_{1,3}$ 'ün

$$-\alpha = W_3 + 2W_1, \quad C = 2W_1W_3 + W_1^2, \quad \delta^2 = W_3W_1^2$$

sisteminden bulunacağı görülür. Köklerin sıralanması aşağıdaki gibidir:

$$(A) \quad W_1 > \delta^{2/3} \quad \Rightarrow \quad 0 < W_3 < W_1, \quad (B) \quad W_1 < \delta^{2/3} \quad \Rightarrow \quad W_1 < W_3.$$

(A),(B) durumlarına karşılık gelen $\dot{W}^2 = P(W)$ grafikleri Şekil 5.3'te verilmiştir.



Şekil 5.3: (5.37) denklemini için $\dot{W}^2 = P(W)$ grafikleri

(A) durumu için $\alpha < 0$ koşulundan dolayı $\varepsilon = -1$ için çözüm vardır. Şekil.5.3(a) dikkate alınarak $W > W_1$ ve $W_3 < W < W_1$ aralıklarında integral alınırsa, sırasıyla

$$W = W_1 + (W_1 - W_3)\operatorname{cosech}^2\tau \quad \text{ve} \quad W = W_1 + (W_3 - W_1)\operatorname{sech}^2\tau$$

bulunur. Ardından çözümler, aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} M &= (\lambda_0 W)^{1/2}, & \tau &= c_1 y + c_2, & c_1^2 &= \frac{a_0 \lambda_0}{2}(W_1 - W_3), \\ \Phi &= \frac{\delta}{\sqrt{W_1 - W_3}} \int \frac{d\tau}{W} + \Phi_0 & \psi &= M \exp[i(-t + \Phi)]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

(B) durumu için, Şekil.5.3(b) dikkate alınarak, $W > W_3$ için integral alınır ve aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\begin{aligned} W &= W_1 + (W_3 - W_1)\sec^2\tau, & \tau &= c_1 y + c_2 \\ M &= (\lambda_0 W)^{1/2}, & c_1^2 &= \frac{a_0 \lambda_0}{2}(W_3 - W_1) \\ \Phi &= \frac{\delta}{\sqrt{W_3 - W_1}} \int \frac{d\tau}{W} + \Phi_0 & \psi &= M \exp[i(\varepsilon t + \Phi)]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

(iii) $P(W)$ 'nin üç farklı kökünün olması durumu. Bu durumda, $W_{1,2,3}$ kökleri

$$W_1 + W_2 + W_3 = 0, \quad W_1 W_2 + W_1 W_3 + W_2 W_3 = C, \quad W_1 W_2 W_3 = \delta^2$$

sisteminden belirlenir. Köklerin ikisinin aynı işaretli, üçüncüsünün daima pozitif olduğu görülmektedir. Köklerin

$$\text{(A)} \quad W_1 < W_2 < 0 < W_3 \quad \text{(B)} \quad 0 < W_1 < W_2 < W_3, \quad W_2^2 < \frac{\delta^2}{W_1}$$

sıralanmaları için farklı çözümler elde edilmektedir. Şekil 5.1(b), 5.1(c) dikkate alınarak $W > W_3$ için (5.28) integre edilirse (A) ve (B) için, $a_0, \lambda_0 > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} W &= W_2 + (W_3 - W_2)[\operatorname{cn}(\tau, k)]^{-2}, & \tau &= c_1 y + c_2, & k^2 &= \frac{W_2 - W_1}{W_3 - W_1}, \\ M &= (\lambda_0 W)^{1/2}, & c_1^2 &= \frac{a_0 \lambda_0}{2}(W_3 - W_1), \\ \Phi &= \frac{\delta}{\sqrt{W_3 - W_1}} \int \frac{d\tau}{W} + \Phi_0, & \psi &= M \exp[i(\varepsilon t + \Phi)] \end{aligned} \quad (5.41)$$

çözümü elde edilir. $W_1 < W < W_2$ aralığında integral alınır, (A) için $a_0, \lambda_0 < 0$ ve (B) için $a_0, \lambda_0 > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} W &= W_1 + (W_2 - W_1)\text{sn}^2(\tau, k), & \tau &= c_1 y + c_2, & k^2 &= \frac{W_2 - W_1}{W_3 - W_1} \\ M &= (\lambda_0 W)^{1/2}, & c_1^2 &= \frac{a_0 \lambda_0}{2}(W_3 - W_1) \\ \Phi &= \frac{\delta}{\sqrt{W_3 - W_1}} \int \frac{d\tau}{W} + \Phi_0, & \psi &= M \exp[i(\varepsilon t + \Phi)] \end{aligned} \quad (5.42)$$

çözümü elde edilir.

(iv) $P(W)$ 'nin iki karmaşık, bir reel sayı kökünün olması durumu. $W_2 = p + iq$, $W_3 = p - iq$, $W_1 \in \mathbb{R}$ olsun. p, q ve W_1 ,

$$2p + W_1 = \alpha, \quad \frac{\delta^2}{W_1} + 2pW_1 = C, \quad p^2 + q^2 = \frac{\delta^2}{W_1}$$

sisteminin çözümünden bulunur. $W_1 > 0$ olduğundan, $W > W_1$ için alınan integral $a_0, \lambda_0 > 0$ için aşağıdaki çözümü verir:

$$\begin{aligned} W &= \frac{A + W_1 + (W_1 - A)\text{cn}(\tau, k)}{1 + \text{cn}(\tau, k)}, & \tau &= c_1 y + c_2, \\ M &= (\lambda_0 W)^{1/2}, & k^2 &= \frac{A + p - W_1}{2A}, \\ \Phi &= \frac{\delta}{2\sqrt{A}} \int \frac{d\tau}{W} + \Phi_0, & c_1^2 &= 2Aa_0\lambda_0, \\ \Psi &= M \exp[i(\varepsilon t + \Phi)], & A^2 &= (p - W_1)^2 + q^2. \end{aligned} \quad (5.43)$$

$C_0 = 0$ için (4.22b) denklemi

λ and η 'nin uygun seçimiyle (4.22b) denklemi, P -tipi ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülebilir.

$$\lambda = \lambda_0, \quad \eta = \eta_0 y$$

dönüşümüyle bu denklem

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + \left(\frac{2a_0\lambda_0}{\eta_0^2}\right) W^2 + \frac{2\varepsilon}{\eta_0^2} W \quad (5.44)$$

şekline gelir. $\eta_0^2 = \frac{a_0\lambda_0}{2} = 1$ seçimiyle bu denklem $\varepsilon = 1$ için PXIX denklemi olan

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + 4W^2 + 2\varepsilon W$$

denklemine dönüşür. İlk integral

$$\dot{W}^2 = 4W(C + \varepsilon W + W^2), \quad C = \text{sabit} \quad (5.45)$$

şeklindedir. (5.45) denkleminin çözümleri, $\varepsilon = 1$ ve $\varepsilon = -1$ için ayrı ayrı tartışılacaktır. (5.45) denkleminin sağ tarafı $P(W)$ olarak adlandırılırsa, $P(W)$ 'nin kökleri

$$\varepsilon = 1 \quad \text{için,} \quad W_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4C}}{2}, \quad W_2 = 0, \quad W_3 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4C}}{2}$$

ve

$$\varepsilon = -1 \quad \text{için,} \quad W_4 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C}}{2}, \quad W_5 = 0, \quad W_6 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4C}}{2}$$

olarak bulunur. Köklerin sıralaması, C 'nin aldığı değerlere göre değişmektedir:

$$\begin{aligned} C < 0 &\Rightarrow W_{1,4} < 0 < W_{3,6} \\ 0 < C < \frac{1}{4} &\Rightarrow W_{1,3} < 0 < W_{4,6}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

C 'nin aldığı değerlere ve köklerin sıralanmasına göre $\dot{W}^2 = P(W)$ grafikleri Şekil.5.4'te çizilmiştir. İntegral sabiti C 'ye bağlı olarak, (5.45) denkleminin integralleri alınmış, (1.1) denklemi için çözümler yazılmıştır.

(i) $C = 0$. Şekil 5.4(a) dikkate alınarak $0 < W$ ve $-1 < W < 0$ için integral alınırsa $\varepsilon = 1$ için

$$\psi = \left(\frac{2}{a_0}\right)^{1/2} \text{cosech}(\varepsilon y + c_1) \exp[i(t + \Phi_0)] \quad (5.47a)$$

$$\psi = \left(\frac{-2}{a_0}\right)^{1/2} \text{sech}(\varepsilon y + c_1) \exp[i(t + \Phi_0)] \quad (5.47b)$$

çözümlerine ulaşılır. Şekil 5.4(b)'den, $1 < W$ için integral alınarak, $\varepsilon = -1$ için

$$\psi = \left(\frac{2}{a_0}\right)^{1/2} \text{sec}(\varepsilon y + c_1) \exp[i(-t + \Phi_0)] \quad (5.48)$$

çözümü elde edilir. $\varepsilon = \pm 1$, $c_1 = \text{sabit}$ olarak verilir.

(ii) $C = 1/4$. Şekil 5.4(c) dikkate alınarak $0 < W$ için integral alınırsa $\varepsilon = 1$ için

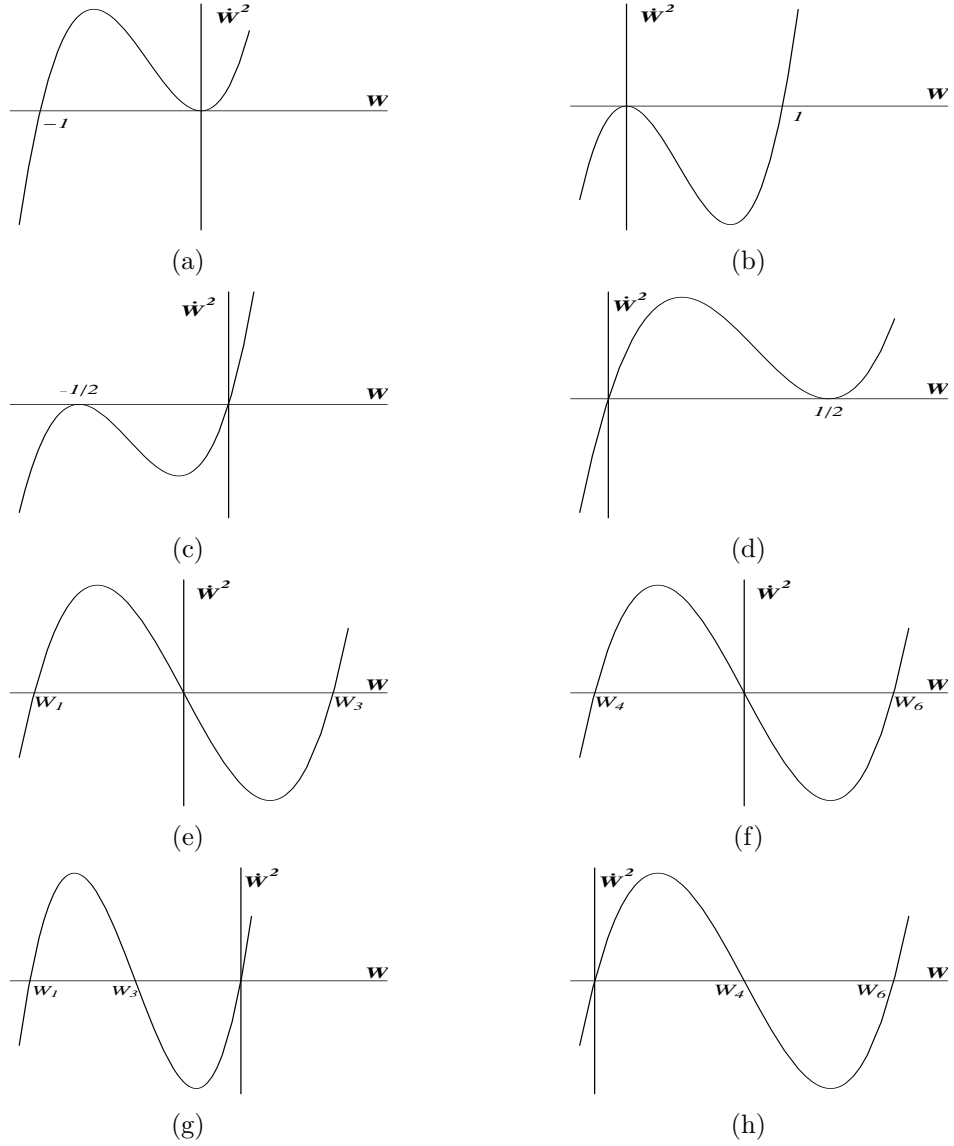
$$\psi = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{1/2} \tan\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}y + c_1\right) \exp[i(t + \Phi_0)] \quad (5.49)$$

çözümü elde edilir. Şekil 5.4(d)'den, $0 < W < 1/2$ ve $1/2 < W$ aralığında integral alınarak, $\varepsilon = -1$ için

$$\psi = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{1/2} \tanh\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}y + c_1\right) \exp[i(-t + \Phi_0)] \quad (5.50a)$$

$$\psi = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{1/2} \coth\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}y + c_1\right) \exp[i(-t + \Phi_0)] \quad (5.50b)$$

çözümleri elde edilir. $\varepsilon = \pm 1$, $c_1 = \text{sabit}$ olarak verilir.



Şekil 5.4: (5.45) denklemi için $\dot{W}^2 = P(W)$ grafikleri. (a): $C = 0$, $\varepsilon = 1$, (b): $C = 0$, $\varepsilon = -1$, (c): $C = 1/4$, $\varepsilon = 1$, (d): $C = 1/4$, $\varepsilon = -1$, (e): $C < 0$, $\varepsilon = 1$, (f): $C < 0$, $\varepsilon = -1$, (g): $0 < C < 1/4$, $\varepsilon = 1$, (h): $0 < C < 1/4$, $\varepsilon = -1$.

(iii) $C < 0$. $\varepsilon = \pm 1$ için $P(W)$ 'nin kökleri zıt işaretlidir. Şekil 5.4(e), 5.4(f) dikkate alınarak $W_3 < W$, $W_1 < W < W_2$, $W_6 < W$, $W_4 < W < W_6$ aralıklarında integral alınırsa

$$\psi = \left(\frac{\sqrt{1-4C}-\varepsilon}{a_0}\right)^{1/2} [\text{cn}(c_1y + c_2, k)]^{-1} \exp[i(\varepsilon t + \Phi_0)], \quad a_0 > 0 \quad (5.51a)$$

$$\psi = \left(\frac{\varepsilon-\sqrt{1-4C}}{a_0}\right)^{1/2} \text{cn}(c_1y + c_2, k) \exp[i(\varepsilon t + \Phi_0)], \quad a_0 < 0 \quad (5.51b)$$

çözümlerine ulaşılır. $c_1^2 = \sqrt{1-4C}$, $k^2 = \frac{\varepsilon+\sqrt{1-4C}}{2\sqrt{1-4C}}$ olarak verilir.

(iv) $0 < C < \frac{1}{4}$. $\varepsilon = 1$ için Şekil 5.4(g) dikkate alınarak $W_2 < W$, $W_1 < W < W_3$ aralıklarında integral alınırsa

$$\psi = c_1 \left(\frac{2}{a_0}\right)^{1/2} \left(\frac{1-\sqrt{1-4C}}{1+\sqrt{1-4C}}\right)^{1/2} \text{tn}(c_1y + c_2, k) \exp[i(t + \Phi_0)], \quad (5.52a)$$

$$\psi = c_1 \left(\frac{-2}{a_0}\right)^{1/2} \left[\frac{1-\sqrt{1-4C}}{1+\sqrt{1-4C}} + \text{cn}^2(c_1y + c_2, k)\right]^{1/2} \exp[i(t + \Phi_0)] \quad (5.52b)$$

çözümleri elde edilir. $c_1^2 = \frac{1+\sqrt{1-4C}}{2}$, $k^2 = \frac{2\sqrt{1-4C}}{1+\sqrt{1-4C}}$ olarak verilir. $\varepsilon = -1$ için Şekil 5.4(h) dikkate alınarak $W_6 < W$, $W_5 < W < W_4$ aralıklarında integral alınırsa

$$\psi = \left(\frac{1-\sqrt{1-4C}}{a_0}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{2\sqrt{1-4C}}{1-\sqrt{1-4C}} (\text{cn}(c_1y + c_2, k))^{-2}\right]^{1/2} \exp[i(-t + \Phi_0)] \quad (5.53)$$

$$\psi = \left(\frac{1-\sqrt{1-4C}}{a_0}\right)^{1/2} \text{sn}(c_1y + c_2, k) \exp[i(-t + \Phi_0)]$$

çözümlerine ulaşılır. $a_0 > 0$, $c_1^2 = \frac{1+\sqrt{1-4C}}{2}$, $k^2 = \frac{1-\sqrt{1-4C}}{1+\sqrt{1-4C}}$ olarak verilir.

(v) $1/4 < C$. $\dot{W}^2 = P(W)$ grafiği Şekil.5.2(b) gibi olup, $0 < W$ için integral alındığında $a_0 > 0$ olmak üzere iki çözüm elde edilir:

$$\psi = \left(\frac{2}{a_0}\right)^{1/2} C^{1/2} \text{tn}(C^{1/2}y + c_1) \text{dn}(C^{1/2}y + c_1) \exp[i(\varepsilon t + \Phi_0)]. \quad (5.54)$$

$k^2 = \frac{2C^{1/2}-\varepsilon}{4C^{1/2}}$ olarak verilir.

5.7 $L_{2,7}$ Alt Cebiri İçin Çözümler

Bu alt cebir, çözümleri Painlevé transandanları ile yazılan ikinci mertebeden doğrusal olmayan ADDler vermektir.

(i) $C_0 \neq 0$ için (4.24b) denklemi. $\lambda = \lambda_0$, $\eta = \eta_0\xi$ seçilirse bu denklem

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + \left(\frac{2a_0\lambda_0}{\eta_0^2}\right) W^2 + \frac{\eta}{\eta_0^3} W + 2\left(\frac{C_0}{\lambda_0\eta_0}\right)^2 W^{-1}$$

denkleminde dönüşür. $\eta_0 = -1$ seçilirse bu denklem PXXXIV ile bir sabit farkıyla aynı olan

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W}\dot{W}^2 + 4\gamma W^2 - \eta W + 2\delta^2 W^{-1} \quad (5.55)$$

denkleminde dönüşür. Burada γ, δ sabitler olup

$$\gamma = a_0\lambda_0/2, \quad \delta^2 = (C_0/\lambda_0)^2$$

olarak verilir. (5.55)'te

$$2\gamma W = \dot{V} + V^2 + \frac{\eta}{2}$$

yazılırsa, V 'nin sağladığı denklemin ikinci Painlevé transandanı olduğu görülür:

$$\ddot{V} = 2V^3 + \eta V + k, \quad k = -\frac{1}{2} \pm 4a_0\delta i.$$

Sonuçta $V = P_{II}(-\xi)$ elde edilir. W karmaşık sayı değerli olduğundan, $\lambda_0, \lambda_0 W$ çarpımını reel yapacak şekilde seçilmesi gereken bir karmaşık sabit sayıdır.

(ii) $C_0 = 0$ için (4.24b) denklemi. $\lambda = \lambda_0, \eta = \eta_0\xi$ dönüşümüyle bu denklem

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W}\dot{W}^2 + \left(\frac{2a_0\lambda_0}{\eta_0^2}\right)W^2 + \frac{\eta}{\eta_0^3}W$$

şeklini alır. $\eta_0 = 2^{-1/3}$ ve $\lambda_0 = 2^{1/3}/a_0$ seçilirse PXX denkleminde ulaşılır.

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W}\dot{W}^2 + 4W^2 + 2\eta W.$$

$U^2 = W$ yazılırsa Painlevé transandanı P_{II} elde edilir:

$$\ddot{U} = 2U^3 + \eta U.$$

Sonuç olarak çözüm

$$\psi = \frac{2^{1/6}}{a_0^{1/2}} P_{II}(2^{-1/3}\xi) \exp(i\Phi_0) \quad (5.56)$$

şeklinde yazılır.

5.8 $L_{2,10}$ Alt Cebiri İçin Çözümler

(4.30b) için (5.5) denklemi

$$\begin{aligned} \ddot{W} = & \frac{1}{2W}\dot{W}^2 - \frac{1}{\dot{\eta}}\left(\frac{\ddot{\eta}}{\dot{\eta}} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\right)\dot{W} + \frac{2a_0\lambda}{\dot{\eta}^2}W^2 + 2\left(\frac{C_0}{\lambda\dot{\eta}}\right)^2W^{-1} \\ & + \frac{1}{\dot{\eta}^2}(2\xi^2 - 2a\varepsilon + \frac{\dot{\lambda}^2}{2\lambda^2} - \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda})W \end{aligned} \quad (5.57)$$

şeklindedir. $L_{2,1}$ alt cebirinde olduğu gibi, bu denklem PXXXIII veya PXXXIV denklemine dönüşebilir. (5.57) ile (5.7) ve (5.8)'te \dot{W} ve W^2 'nin katsayısı karşılaştırılırsa λ ve η 'nin

$$\lambda = \lambda_0, \quad \eta = \eta_0 \xi$$

şeklinde seçilmesi gerektiği görülür. λ ve η 'nin bu seçimiyle (5.57) denklemi

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W} \dot{W}^2 + \frac{2a_0 \lambda_0}{\eta_0^2} W^2 + 2 \left(\frac{C_0}{\lambda_0 \eta_0} \right)^2 W^{-1} + \left(\frac{2}{\eta_0^4} \eta^2 - \frac{2a\varepsilon}{\eta_0^2} \right) W \quad (5.58)$$

haline gelir. W 'nin katsayısı η^2 terimini içerdiğinden, (4.30b) denklemi kanonik denklemlerden birine dönüştürülemez ve Painlevé özelliğine sahip değildir.

(4.30b) denklemi $C_0 = 0$ için ele alınırsa, yukarıdaki işlemler tekrarlanır ve denklemin Painlevé özelliğine sahip olmadığı görülür. Son olarak, (4.30b) denkleminin nokta simetrisi ve sabit çözümleri yoktur.

5.9 $L_{2,11}$ Alt Cebiri İçin Çözümler

(4.32) sistemi için, denklemler arası kuplaj kaldırılamamış ve herhangi bir çözüm yapılamamıştır.

5.10 $L_{2,12}$ Alt Cebiri İçin Çözümler

(4.34b) denkleminin tekillik yapısının araştırılması ve integre edilmesi [6]'da yapılmıştır. Burada bu çalışmanın sonuçları özetlenecektir.

$$2Y\ddot{Y} - \dot{Y}^2 + R(\xi)\dot{Y}\ddot{Y} + S(\xi)\dot{Y}^2 + T(\xi)Y^2 + U(\xi)\dot{Y}^n = 0 \quad (5.59)$$

şeklinde bir denklem, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, Painlevé testini geçer:

$$R(\xi) = -4 \frac{\partial}{\partial \xi} \ln(U(\xi)), \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} S(\xi) + 2T(\xi) = 0. \quad (5.60)$$

$C_0 = 0$ için (4.34b) denklemi yazılırsa

$$2\chi\ddot{\chi} - \dot{\chi}^2 + \left(\frac{\xi^2}{4} - 2a \right) \dot{\chi}^2 - \frac{1}{4} \chi^2 - 4a_0 \dot{\chi}^3 = 0 \quad (5.61)$$

elde edilir. (5.59) denklemi (5.61) ile kıyaslanırsa, katsayı fonksiyonlarının

$$R(\xi) = 0, \quad S(\xi) = \xi^2/4 - 2a, \quad T(\xi) = -1/4, \quad U(\xi) = -4a_0 \text{ and } n = 3$$

olduğu görülür. Katsayı fonksiyonlarının (5.60) koşullarını sağladığı açıktır. (5.61) denklemi, [6]'da ele alınan üçüncü mertebeden adi diferansiyel denklemler arasında Painlevé testini geçen tek denklemdir. Denklem için, K bir sabit olmak üzere

$$\ddot{\chi}^2 + F(\chi, \dot{\chi}, \xi)\ddot{\chi} = A(\chi, \dot{\chi}, \xi) + KB(\chi, \dot{\chi}, \xi) \quad (5.62)$$

yapısında bir ilk integral önerisi getirilir. (5.62) türetilip (5.61) ile karşılaştırılırsa aranan ilk integral

$$\dot{\chi}^2 = -\frac{1}{4}(\chi - \dot{\chi}\xi)^2 + 2a\chi^2 + 2a_0 + \dot{\chi}^3 + CX \quad (5.63)$$

şeklinde elde edilir. Bu birinci mertebeden denklemin çözümü

$$\chi(\xi) = -\frac{k}{a_0} \left[\frac{\dot{W}^2}{4W} - \frac{W^3}{4} - zW^2 + (1 - z^2 + \alpha)W + \frac{\beta}{2W} + \frac{2}{3}(\alpha + 1)z + \frac{az}{3k^2} \right] \quad (5.64)$$

olarak verilir. Burada $W(z)$ fonksiyonu,

$$\ddot{W} = \frac{1}{2W}\dot{W}^2 + \frac{3}{2}W^3 + 4zW^2 + 2(z^2 - \alpha)W + \frac{\beta}{W} \quad (5.65)$$

P_{IV} denklemini sağlar. $z = k\xi$, $k^4 = -1/16$ olarak verilir. α , β sabitleri

$$\begin{aligned} -2(\alpha + 1)^2 + 3\beta &= 4(2a^2 - 3Ca_0) \\ (\alpha + 1)[2(\alpha + 1)^2 + 9\beta] &= (a/k^2)(4a^2 - 9Ca_0) \end{aligned}$$

sisteminden belirlenir. Sonuç olarak, yukarıda verilenlerle birlikte, (1.1) denkleminin çözümü,

$$M = \sqrt{\dot{\chi}}, \quad \Phi = \int \frac{\xi(1 + \dot{\chi})}{4\dot{\chi}} d\xi$$

olmak üzere, (4.33) ile verilir.

SONUÇLAR

Bu çalışmada diferansiyel denklemlerin Lie grubu analizi yardımıyla 2+1 boyutlu kübik Schrödinger denklemi (KSD) için grup değişmez çözümler aranmıştır. KSD integre edilemeyen bir denklem olup, simetri cebiri bilinmektedir. Denklemin simetri cebirinin iki ve üç boyutlu alt cebirleri kullanılarak, denklemin bu cebirlere ait simetri grupları altında değişmez kalan çözümleri araştırılmıştır.

İki boyutlu alt cebirlerin simetri indirgemesinde kullanılmasıyla, denklemin ikinci ve üçüncü mertebeden doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemlere indirgemeleri elde edilmiştir. İndirgeme veren oniki adet iki boyutlu alt cebirin simetri grubu altında değişmez kalan çözümlere ait adi diferansiyel denklemlerin incelenmesinin sonuçları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- $L_{2,8}$, $L_{2,9}$ alt cebirleri kullanılarak elde edilen denklemler basit olup hemen integre edilmiştir.
- $L_{2,5}$, $L_{2,6}$ alt cebirlerinden elde edilen denklemler Painlevé özelliğine sahiptir. Bu denklemler Painlevé sınıflandırmasındaki PXVIII, PXIX, PXXXIII denklemlerine dönüştürülerek ilk integralleri alınmıştır. Ardından tam çözümleri trigonometrik ve eliptik fonksiyonlar türünden yazılmıştır.
- $L_{2,2}$ alt cebirinden elde edilen denklem, içerdiği parametrenin belli değerleri için Painlevé özelliğine sahiptir. Parametrenin bu değerleri için denklem, PXVIII ve PXXXIII denklemlerine dönüştürülerek bir kez integre edilmiş, tam çözümler ise trigonometrik fonksiyonlar ve eliptik fonksiyonlar türünden yazılmıştır.
- $L_{2,7}$ alt cebirinden elde edilen denklem Painlevé özelliğine sahiptir. $L_{2,3}$ alt cebiri için elde edilen denklem ise içerdiği bir parametrenin belli değerleri için Painlevé özelliğine sahiptir. Bu denklemler PXX ve PXXXIV denklemlerine dönüştürülmüştür. Çözümler P_{II} transandan fonksiyonu cinsindedir.

- $L_{2,12}$ alt cebiri için elde edilen denklem üçüncü mertebeden doğrusal olmayan bir adi diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü, yapılmış bir çalışmada, içerdiği integral sabitinin belli bir değeri için Painlevé transandanı P_{IV} türünden verilmiştir. Bu çalışmanın sonuçları özetlenmiştir.
- $L_{2,1}$, $L_{2,4}$, $L_{2,10}$ alt cebirlerinden elde edilen denklemler Painlevé özelliğine sahip değildir ve integre edilememiştir. Bu denklemler için sayısal çözüm yapılabilir.
- $L_{2,11}$ alt cebiri için elde edilen adi diferansiyel denklem sisteminin kuplajı kaldırılamamıştır. Bu sistemin Painlevé testi ve sayısal çözümü yapılabilir.

Ayrıca yukarıdaki denklemlerin mümkün olduğunda sabit sayı çözümleri de verilmiştir.

Dört adet üç boyutlu alt cebir kullanılarak ulaşılan çözümler bir tabloda özetlenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **Sciarrino, A. and Winternitz, P.**, 1997. Symmetries and solutions of the vector nonlinear Schrödinger equation, *Il Nuovo Cimento*, **112B(6)**, 853-871.
- [2] **Fibich, G., Papanicolau, G.C.**, 1999. Self-focusing in the perturbed and unperturbed nonlinear Schrödinger equation in critical dimension, *SIAM J. Appl. Math.*, **60**, 183-240.
- [3] **Landman, M.J., Papanicolau, G.C., Sulem C. and Sulem P.L.**, 1988. Rate of blow-up for solutions of the nonlinear Schrödinger equation at critical dimension, *Phys. Rev. A*, **38**, 3837-3843.
- [4] **Fibich, G. and Papanicolau, G.C.**, 1998. A modulation method for self-focusing in the perturbed critical nonlinear Schrödinger equation, *Physica D*, **32**, 210-226.
- [5] **Gagnon, L. and Winternitz, P.**, 1988. Lie symmetries of a generalized non-linear Schrödinger equation:I The symmetry group and its subgroups, *J. Phys. A: Math-Gen*, **21**, 1493-1511.
- [6] **Gagnon, L. and Winternitz, P.**, 1989. Lie symmetries of a generalized non-linear Schrödinger equation:II Exact solutions, *J. Phys. A: Math-Gen*, **22**, 469-497.
- [7] **Gagnon, L. and Winternitz, P.**, 1989. Lie symmetries of a generalized non-linear Schrödinger equation:III Reductions to third-order ordinary differential equations, *J. Phys. A: Math-Gen*, **22**, 499-509.
- [8] **Saied., E.A., Abd El-Rahman G.A. and Ghonamy, M.I.**, 2003. On the exact solution of (2+1) dimensional cubic nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math-Gen*, **36**, 6751-6770.

- [9] **Gagnon, L.**, 1989. Quelques Solutions exactes á la théorie d'auto focalisation optique obtenues par la méthode de réduction par symétries, Proceedings of the annual seminar of the Canadian Mathematical Society on Lie theory, Diff. Eqs and Representation Theory, CANADA.
- [10] **Olver, P.J.**, 1991. Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer, New York.
- [11] **Stephani, H. and Maccallum, M.**, 1989. Differential Equations: Their Solutions Using Symmetries, Cambridge University Press, Cambridge.
- [12] **Bluman, G.W. and Kumei, S.**, 1989. Symmetries and Differential Equations., Springer-Verlag, New York.
- [13] **Burdet, G., Patera, J. and Perrin, M.**, 1978. Sous-Algèbres de Lie de l'algèbre de Schrödinger *Ann. Sc. Math. Quebec*, **II(1)**, 81-108.
- [14] **Clarkson, P.A. and Winternitz, P.**, 1999. Symmetry reduction and exact solutions of nonlinear partial differential equations, in *The Painlevé Property , One Century Later, CRM Series in Mathematical Physics*, pp597-668, Ed. Conte, R., Springer, NewYork.
- [15] **Golubev, V.V.**, 1953. Lectures on the integration of the equation of motion of a rigid body around a fixed point, Gostechizdat (State Publishing House), Moscow.
- [16] **Kowalevski, S.**, 1889. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, *Acta Mathematica*, **12**, 177-232.
- [17] **Painlevé, P.**, 1900. Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, *Bull. Soc. Math.*, **28** 201261.
- [18] **Painlevé, P.**, 1902. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme, *Acta Math.*, **25**, 1-85.
- [19] **Painlevé, P.**, 1906. Sur les équations différentielles du second ordre á points critiques fixes, *C.R. Acad. Sc.*, **143**, 1111-1117.

- [20] **Ince, E.L.**, 1956. Ordinary Differential Equations, Dover, New York.
- [21] **Chowdhury, A.R.**, 2000. Painlevé Analysis and its Applications, Chapman&Hall/CRC, Florida.
- [22] **Kruskal, M.D., Joshi, N. and Halburd, R.**, 1996. Analytic and asymptotic methods for nonlinear singularity analysis: A review and extensions of tests for the Painlevé property, Integrability of Nonlinear Systems, Proceedings of the CIMPA School Pondicherry University, India.
- [23] **Ablowitz, M.J., Ramani, A. and Segur, H.** 1980. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-Type.I, *J. Math. Phys.*, **21(4)**, 715-721.
- [24] **Güngör, F.**, 2000. Symmetry breaking interactions for the Schrödinger equation in three-dimensional spacetime, *Phys. Lett. A* (**270**), 164-170.
- [25] **Byrd, P.F. and Friedman, M.D.**, 1954. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists, Springer-Verlag, Heidelberg.

ÖZGEÇMİŞ

Cihangir Özemir 1979 Hendek doğumludur. Adapazarı Atatürk Süper Lisesi'nden 1997 yılında mezun olmuş, aynı yıl İTÜ İnşaat Mühendisliği Bölümü'nde lisans eğitimine başlamıştır. 2000 yılında İTÜ Fizik Mühendisliği Bölümü ile ÇAP'a başlamıştır. 2002 yılında İTÜ İnşaat Mühendisliği bölümünden lisans derecesini aldıktan sonra, İTÜ FBE Matematik Mühendisliği yüksek lisans programına girmiştir. Aynı zamanda bu tarihten beri İTÜ Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.