İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YARI SİMETRİK KONNEKSİYONLU WEYL MANİFOLDLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Didem ATABEY

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

AĞUSTOS 2012

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YARI SİMETRİK KONNEKSİYONLU WEYL MANİFOLDLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Didem ATABEY
(509091026)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Elif Özkara CANFES

Teslim Tarihi : 19 Temmuz 2012

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün **509091026** numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **DİDEM ATABEY**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"YARI SİMETRİK KONNEKSİYONLU WEYL MANİFOLDLARI "** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Elif Özkara CANFES** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Uğur DURSUN** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Aynur UYSAL ....
Doğuş Üniversitesi

Teslim Tarihi : 19 Temmuz 2012
Savunma Tarihi : 16 Ağustos 2012

Ailem'e,

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını, desteğini ve değerli zamanını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Elif Özkara CANFES'e sonsuz teşekkür etmek isterim.

Gerek yüksek lisans gerekse yüksek lisans dışında karşılaştığım zorluklarda bana yol gösteren ve beni cesaretlendiren aileme, arkadaşlarıma ve tüm sevdiklerime teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Temmuz 2012 Didem Atabey
(Matematikçi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{g}$: Metrik tensör
$\boldsymbol{\nabla}$: Riemann konneksiyonu
$\bar{\boldsymbol{\nabla}}$: Yarı simetrik Riemann konneksiyonu
$\boldsymbol{D}$: Weyl konneksiyonu
$\bar{\boldsymbol{D}}$: Yarı simetrik Weyl konneksiyonu
$\boldsymbol{\Gamma_{jk}^{i}}$: Riemann konneksiyon katsayıları
$\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\boldsymbol{jk}}^{\boldsymbol{i}}$: Yarı simetrik Riemann konneksiyon katsayıları
$\boldsymbol{L_{jk}^{i}}$: Weyl konneksiyon katsayıları
$\bar{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{jk}}^{\boldsymbol{i}}$: Yarı simetrik Weyl konneksiyon katsayıları
$\boldsymbol{K_{ijk}^{h}}$: Riemann konneksiyonu eğrilik tensörü
$\bar{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{ijk}}^{\boldsymbol{h}}$: Yarı simetrik Riemann konneksiyonu eğrilik tensörü
$\boldsymbol{R_{ijk}^{h}}$: Weyl konneksiyonu eğrilik tensörü
$\bar{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ijk}}^{\boldsymbol{h}}$: Yarı simetrik Weyl konneksiyonu eğrilik tensörü
$\boldsymbol{K_{ij}}$: Riemann konneksiyonu Ricci tensörü
$\bar{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{ij}}$: Yarı simetrik Riemann konneksiyonu Ricci tensörü
$\boldsymbol{R_{ij}}$: Weyl konneksiyonu Ricci tensörü
$\bar{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ij}}$: Yarı simetrik Weyl konneksiyonu Ricci tensörü
$\boldsymbol{r}$: Riemann konneksiyonu skaler eğriliği
$\bar{\boldsymbol{r}}$: Yarı simetrik Riemann konneksiyonu skaler eğriliği
$\boldsymbol{R}$: Weyl konneksiyonu skaler eğriliği
$\bar{\boldsymbol{R}}$: Yarı simetrik Weyl konneksiyonu skaler eğriliği

YARI SİMETRİK KONNEKSİYONLU WEYL MANİFOLDLARI

ÖZET

Bu çalışmada yarı simetrik konneksiyona sahip Weyl manifoldları incelenmiştir. Bilindiği gibi, burulmasız bir konneksiyona sahip n-boyutlu C^{∞} sınıfından diferansiyellenebilir bir M manifoldunda, g metrik tensörü ile D konneksiyonu arasında

$$Dg = 2(\omega \otimes g)$$

uygunluk koşulu varsa, M manifolduna bir Weyl uzayı denir ve $W_n(g, \omega)$ ile gösterilir. Burada ω bir kovaryant vektör alanı olup Weyl uzayının komplemanter vektörü olarak adlandırılır.

Yarı simetrik metrik konneksiyonlar, 1924'te Friedmann ve Schouten tarafından tanımlanmıştır. 1970'te Yano yarı simetrik metrik konneksiyonları inceleyerek, bu konu ile ilgili yeni çalışmalara referans olan bir makale yayınlamıştır.

Bu tez çalışmasının temel amacı, Weyl manifoldları üzerinde yarı simetrik konneksiyonları incelemektir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır ve birinci bölümde tezin temelini oluşturan Weyl manifoldları ve yarı simetrik lineer konneksiyonların tarihsel gelişimi hakkında kısaca bilgi verilmektedir.

İkinci bölümde, daha sonra ispatlanacak teoremlere hazırlık olarak, Riemann manifoldu, Riemann metriği, afin konneksiyon, burulma tensörü, Riemann konneksiyonu, Riemann eğrilik tensörü, konform eğrilik tensörü gibi temel tanımlardan, Riemann eğrilik tensörü için birinci ve ikinci Bianchi özdeşliklerinden, Riemann geometrisinin esas teoreminden bahsedilerek Einstein uzaylarının tanımı verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, yarı simetrik metrik konneksiyonlar; M C^{∞} sınıfından n-boyutlu diferansiyellenebilir g metriğine sahip bir manifold, $\overline{\nabla}$ M de simetrik olmayan bir konneksiyon ve π bir 1-form olmak üzere, $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun burulma tensörü

$$T(X,Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y$$

ve metrik tensörü

$$\overline{\nabla}g=0$$

şartlarını sağlayan konneksiyonlar olarak tanımlanmıştır. Daha sonra, yarı simetrik konneksiyon ve Riemann konneksiyonu arasında g(X,P)=π(X) olmak üzere,

$$\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+ \pi(Y)X-g(X,Y)P$$

bağıntısının mevcut olduğu ispatlanarak, yarı simetrik metrik konneksiyonun Ricci tensörü, skaler eğriliği ve eğrilik tensörünün tanımı, eğrilik tensörünün özellikleri verilmiştir. Son olarak Yano'nun Riemann metriğine sahip bir manifoldun yarı simetrik konneksiyona göre eğrilik tensörünün sıfır olması için gerek ve yeter şartın, Riemann konneksiyonuna göre konform eğrilik tensörünün sıfır olmasıdır teoreminin ispatı verilmiştir. Yarı simetrik metrik konneksiyonun Ricci tensörü simetrik olmadığından, yarı simetrik metrik konneksiyonlu Einstein manifoldları Ricci tensörünün simetrik kısmı metrik tensörün bir katı olarak tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde ise, burulmasız bir D konneksiyonuna ve g konform metriğine sahip Weyl manifoldu tanımlanarak, σ skaler bir fonksiyon olmak üzere metrik tensörün $\tilde{g}=\sigma^2 g$ şeklindeki bir konform dönüşümü altında herhangi bir A büyüklüğü $\tilde{A}=\sigma^p A$ olarak değişiyorsa, A'nın genelleştirilmiş türevi ve kovaryant türevi sırasıyla

$$\dot{\partial} A= \partial A-p(\omega\otimes A)$$

$$\dot{D} A=DA-p(\omega\otimes A)$$

olarak tanımlanmıştır. Bunun sonucu olarak uygunluk koşulundan, Riemann geometrisinde metrik tensörün kovaryant türevinin sıfır olmasına karşılık, Weyl geometrisinde metrik tensörün genelleştirilmiş kovaryant türevi sıfır olarak bulunur. Bu nedenle hesaplarda genelleştirilmiş kovaryant türevi kullanmak kolaylık sağlamaktadır. Eğer ω sıfır veya bir gradiyent vektör ise, Weyl manifoldu Riemann manifolduna indirgenir.

Riemann geometrisinde konneksiyon katsayıları, metrik tensörün ve bileşenlerinin kısmi türevleri cinsinden ifade edilebildiği gibi, Weyl konneksiyon katsayıları, metrik tensör ve metrik tensörün genelleştirilmiş türevleri cinsinden yazılabilir.

X, Y, Z vektör alanları, $\{E_1,E_2,\ldots,E_n\}$ ortonormal vektör alanları olmak üzere $W_n(g, \omega)$ manifolduna ait eğrilik tensörü

$$R(X,Y)Z= \nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_X\nabla_Y Z$$

ve Ricci tensörü

$$R(X,Y)=g(R(E_i,X)E_i)Y$$

şeklindedir. Weyl konneksiyonu metrik bir konneksiyon olmadığından Ricci tensörü simetrik değildir. Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart ω nın sıfır veya gradiyent vektör olmasıdır. Ricci tensörü simetrik olmadığından, Einstein-Weyl manifoldları Ricci tensörünün simetrik kısmı metrik tensörün bir katı olarak tanımlanmıştır. Daha sonra eğrilik tensörünün özellikleri ile birlikte, ispatlarda kullanılan Weyl manifoldunun konform eğrilik tensörüne yer verilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde, C^∞ sınıfından diferansiyellenebilir $W_n(g, \omega)$ Weyl manifoldu üzerinde π bir 1-form olmak üzere, burulması

$$\bar{T}(X,Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y$$

olan bir $\bar{D}$ yarı simetrik konneksiyonu tanımlanarak, bu konneksiyonun varlığı ispatlanmıştır. Yarı simetrik Weyl konneksiyonu ve Weyl konneksiyonu arasında g(X,P)=π(X) olmak üzere,

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + \pi(Y)X - g(X,Y)P$$

bağıntısının mevcut olduğu ispatlanmıştır.

Ayrıca yarı simetrik Weyl konneksiyonun karışık eğrilik tensörü, kovaryant eğrilik tensörü ve Ricci tensörünün tanımlarına yer verilmiştir. Weyl konneksiyonunun eğrilik tensörünün özellikleri kullanılarak yarı simetrik Weyl konneksiyonunun eğrilik tensörünün özelliklerinden bahsedilmiştir.

Son kısımda ise, yarı simetrik konneksiyonlu Weyl manifoldunun eğrilik tensörü özdeş olarak sıfır alınarak, yeni sonuçlar elde edilmiştir. Öncelikle $W_n(g,\omega,\pi)$ Weyl manifoldunun eğrilik tensörü sıfır olmak üzere, $W_n(g,\omega)$, (n>2) nin konform eğrilik tensörünün sıfır olması için gerek ve yeter şartın, π nin sıfır veya gradiyent vektör olmasıdır teoremi ispatlanmıştır. Buna bağlı olarak da $W_n(g,\omega,\pi)$ manifoldunun eğrilik tensörü sıfır olmak üzere, $W_n(g,\omega)$, (n>2) Weyl manifoldunun konform eğrilik tensörünün sıfır olması için gerek ve yeter şartın, $W_n(g,\pi,\omega)$ nin yarı simetrik Riemann manifoldu olmasıdır sonuç teoremi ispat edilmiştir. Bununla birlikte λ, $W_n(g,\omega,\pi)$ manifoldunda skaler bir fonksiyon olmak üzere, Ricci tensörünün simetrik kısmı metrikle $\bar{R}_{(ij)} = \lambda g_{ij}$ şeklinde orantılı ise $W_n(g,\omega,\pi)$ manifolduna yarı simetrik Einstein-Weyl manifoldu denir. Son olarak da, $W_n(g,\omega,\pi)$ manifoldunun eğrilik tensörü sıfır olmak üzere**,** $W_n(g,\omega)$ nin Einstein-Weyl olması için gerek ve yeter şart elde edilmiştir.

Tezin son bölümünde ise, kısaca elde edilen sonuçlar ve bu sonuçlardan yola çıkılarak yapılabilecek yeni çalışmalara yönelik önerilere yer verilmiştir.

WEYL MANIFOLDS WITH SEMI-SYMMETRIC CONNECTION

SUMMARY

In this work, we have studied Weyl manifolds with semi-symmetric connection and proved some theorems about it.

A differentiable n-dimensional manifold having a conformal metric tensor and a symmetric connection D satisfying the compatibility condition given by the equation

$$Dg=2(\omega\otimes g)$$

is called a Weyl space, which is denoted by $W_n(g,\omega)$, where ω denotes a covariant vector field (1-form).

This work consists of six chapters. In the first chapter, we give a historical overview of the development of Weyl manifolds and semi-symmetric connections.

In the second chapter, some basic definitions concerning Riemannian Geometry such as affine connection, torsion tensor, Riemannian metric, Riemannian connection, Riemannian curvature tensor, Ricci tensor and conformal curvature tensor are given and also the fundamental theorem of Riemannian geometry is proved.

In the third chapter, some basic definitions and theorems of semi-symmetric metric connections on a Riemannian manifold are examined. The idea of semi-symmetric linear connection on a differentiable manifold was introduced by Friedmann and Schouten in 1924. In 1932, Hayden introduced the idea of metric connection with torsion in a Riemannian manifold and this was further developed by Yano and Imai. In 1970, Yano studied some properties of semi-symmetric metric connections in a Riemannian manifold.

Let M be an n-dimensional manifold with a linear connection $\overline{\nabla}$. If the torsion tensor T of the connection $\overline{\nabla}$ is of the form

$$T(X,Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y$$

for a 1-form π, then the connection $\overline{\nabla}$ is said to be semi-symmetric. If there exists a Riemannian metric g such that

$$\overline{\nabla}g=0$$

then $\overline{\nabla}$ is said to be metric.

In this chapter, after giving the definition of the Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection, the relation

$$\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\pi(Y)X-g(X,Y)P$$

between the semi-symmetric metric connection $\overline{\nabla}$ and the Riemannian connection ∇ is obtained, where $g(X,P)= \pi(X)$. Furthermore, the definitions and the properties of the curvature tensor, the Ricci tensor and scalar curvature of the semi-symmetric metric connection are given. Later, the following Yano's theorem is proved.

Theorem: In order that a Riemannian metric admits a semi-symmetric metric connection whose curvature tensor vanishes, it is necessary and sufficient that the Riemannian metric is conformally flat.

On the other hand, since the Ricci tensor of Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection is not symmetric, an Einstein manifold with semi-symmetric connection can be defined if the symmetric part of the Ricci tensor is proportional to the metric tensor g.

In the fourth chapter, a symmetric Weyl connection D with conformal metric g is defined and some properties of Weyl connections are examined.

Under the conformal re-scaling (renormalisation) $\tilde{g}=\sigma^2 g$ $(\sigma > 0)$ of the metric g, a quantity A is called a satellite of g with weight {p}, if it admits a transformation of the form $\tilde{A}=\sigma^P A$. The prolonged (extended) derivative and the prolonged covariant derivative of a satellite A of weight {p} is defined by, respectively,

$$\dot{\partial}A= \partial A\text{-}p(\omega \otimes A),$$

$$\dot{D}A=DA\text{-}p(\omega \otimes A),$$

Clearly, the prolonged covariant derivative of the metric tensor is zero. This leads us to use prolonged covariant derivative instead of the usual covariant derivative. Moreover, if ω is zero or gradient vector, the Weyl connection reduces to a Riemannian connection. It is also noted that the prolonged covariant differentiation preserves the weights of the satellites of g.

The curvature tensor and Ricci tensor of $W_n(g,\omega)$ are defined by, respectively,

$$R(X,Y)Z= \nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_Y\nabla_X Z\text{-}\nabla_X\nabla_Y Z$$

and

$$R(X,Y)=g(R(E_i,X)E_i)Y,$$

where X, Y, Z are vector fields and $\{E_1, E_2, \dots E_n\}$ are orthonormal vector fields. Since the Weyl connection is not metric, the Ricci tensor is not symmetric. The anti-symmetric part of the Ricci tensor vanishes if and only if ω is zero or locally a gradient. So, a Weyl manifold is called an Einstein-Weyl manifold if the symmetric part of its Ricci tensor is proportional to the metric g.

At the end of this chapter, the properties of the curvature tensor and conformal curvature tensor of Weyl manifold are given.

In the fifth chapter, the definition of the semi-symmetric connection on Weyl manifold is given and the existence of it is proved.

A linear Weyl connection $\overline{D}$ on M is said to be semi-symmetric if the torsion tensor $\overline{T}$ of $\overline{D}$ satisfies

$$\overline{T}(X,Y)= \pi(Y)X\text{-} \pi(X)Y$$

for a 1-form π, which is denoted by $W_n(g,\omega,\pi)$.

By using the properties of the connection, the relation

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + \pi(Y)X - g(X,Y)P$$

between $\overline{D}$ and the Weyl connection D is obtained, where $g(X,P)=\pi(X)$.

And also, the definitions and the properties of the curvature tensor, the Ricci tensor and the scalar curvature of Weyl manifold with semi-symmetric connection are given. Further, the first and the second Bianchi identities associated with the semi-symmetric Weyl connection are given.

At the end of this chapter, the following theorem about the flat Weyl manifold, for n>2 with semi-symmetric connection is proved.

Theorem: In order that a conformally flat Weyl manifold admits a semi-symmetric metric connection whose curvature tensor vanishes, it is necessary and sufficient that π is zero or locally a gradient .

From the above theorem it can be concluded that, in order that a conformally flat Weyl manifold admits a semi-symmetric metric connection whose curvature tensor vanishes, it is necessary and sufficient that $W_n(g,\omega,\pi)$ is locally Riemannian.

In addition, a Weyl manifold with semi-symmetric connection is said to be Einstein-Weyl manifold if the symmetric part of the Ricci tensor is proportional to the metric.

The following necessarry and sufficient condition for an Einstein-Weyl manifold having semi-symmetric metric connection is obtained.

Theorem: Let W_n be a flat Weyl manifold with a semi-symmetric connection. W_n is an Einstein-Weyl manifold if and only if

$$\pi_{(ij)}=\mu g_{(ij)},$$

where $\pi_{(ij)}=D_j\pi_i-\pi_i\pi_j-\frac{1}{2}g_{(ij)}\pi^m\pi_m$ and $\mu=\frac{1}{2-n}(\lambda+g^{lk}\pi_{lk})$.

At the end, the brief results and discussions are given.

1. GİRİŞ

1918 de H. Weyl, Fizikteki birleştirilmiş alan teorisini formüle etmek için Riemann geometrisini genelleştirerek konform metrik ve simetrik konneksiyona sahip Weyl manifoldlarını tanımlamıştır[1]. Bu çalışmaların ardından Weyl manifoldları bir çok matematikçinin ilgisini çekmiştir. 1943 de E. Cartan Einstein-Weyl manifoldlarını tanımlayarak üç boyutlu Einstein-Weyl uzaylarını incelemiştir[2]. 1985 de P.E. Jones ve K.P.Tod, Einstein Weyl uzaylarını incelemişler, daha sonra bu konuda çok sayıda çalışmalar yapmışlardır[3]. Weyl'in teorisi fizikte çok ilgi görmemesine rağmen matematikçilerin ilgisini çekmiş ve bu konuda günümüze dek çalışmalar yapılmıştır. Yarı simetrik lineer konneksiyonlar ilk defa Friedmann ve Schouten tarafından tanımlanmıştır[4]. Daha sonra Hayden Riemann manifoldları üzerinde yarı simetrik metrik konneksiyonu tanımlamış ve 1970 yılında Yano tarafından bu konu geliştirilmiştir[5]. Yano, bu çalışmasında yarı simetrik Riemann manifoldlarının eğrilik tensörünün özdeş olarak sıfır olması için gerek ve yeter şartın Riemann konneksiyonunun konform eğrilik tensörünün özdeş olarak sıfır olmasıdır teoremini ispatlamıştır. Daha sonra, 1975 yılında K. Yano ve Imai kompleks manifoldlar üzerinde yarı simetrik metrik konneksiyonları tanımlamışlardır[6]. Bu çalışmanın ardından bu konu ile igili bir çok çalışmalar yapılmıştır [7,8]. Ayrıca, 1992 yılında N.S. Agashe ve M.R. Chafle yarı simetrik metrik olmayan konneksiyonları tanımlayarak yeni çalışmaların önünü açmışlardır[9].

Bu tezde, yarı simetrik konneksiyonlu Weyl manifoldları tanımlanarak, konneksiyonun varlığı ispatlanmış, bu konneksiyona ait eğrilik tensörünün ve Weyl konform eğrilik tensörünün sıfır olması için gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1 M, n-boyutlu C^∞ sınıfından bir manifold ve $x^i, (i = 1, 2, ..., n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ açık alt kümesi üzerinde bir koordinat sistemi olsun. M üzerindeki C^∞ sınıfından vektör alanlarının uzayı $\mathscr{X}(M)$ ve M'den $\mathbb{R}^n$ ye C^∞ sınıfından fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ olmak üzere,

$$g : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlı, simetrik, 2-lineer iç çarpıma Riemann metriği veya metrik tensör denir.

Bir M manifoldu üzerinde bir Riemann metriği tanımlanmış ise, bu manifolda Riemann manifoldu denir ve (M, g) ile gösterilir.

M' nin (U, x^i) komşuluğunda herhangi bir p noktasında teğet uzayının baz vektörleri $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, X ve Y vektör alanlarının lokal bileşenleri sırasıyla X^i ve Y^j olmak üzere,

$$g(X, Y) = g(X^i\partial_i, Y^j\partial_j) = g(\partial_i, \partial_j)X^iY^j = g_{ij}X^iY^j, \quad (i, j = 1, \cdots, n)$$

dir. Burada Einstein toplam sembolü kullanılmaktadır. g pozitif tanımlı olduğundan, g' nin lokal bileşenleri g_{ij}'ler daima pozitiftir.

δ^h_j Kronecker deltası olmak üzere, $g_{ij}g^{ih} = \delta^h_j$ dir. g^{ij} , g nin kontravaryant bileşenleri, g_{ji} kovaryant bileşenleri adını alır.

Tanım 2.2 M, C^∞ sınıfından n-boyutlu manifold ve $\nabla : (X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ bir lineer operatör olmak üzere $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R}^n)$ için

1. $\nabla_{(X_1+X_2+...+X_r)}Y = \nabla_{X_1}Y + \nabla_{X_2}Y + ... + \nabla_{X_r}Y$
2. $\nabla_X(Y_1 + Y_2 + ... + Y_r) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2 + ... + \nabla_X Y_r$
3. $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$
4. $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$

şartlarını gerçekleyen ∇ operatörüne, M manifoldu üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon ve ∇_X' e, X vektör alanına göre kovaryant türev denir.

Tanım 2.3 M'nin U komşuluğunda

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^h_{ji}\partial_h \tag{2.1}$$

denklemi ile tanımlanan C^{∞} sınıfından Γ^h_{ji} fonksiyonlarına konneksiyon katsayıları denir.

X ve Y vektör alanları olmak üzere Y'nin X'e göre kovaryant türevi $\nabla_X Y$

$$\nabla_X Y : X^j\nabla_j Y^h = X^j(\partial_j Y^h + \Gamma^h_{ij}Y^i) \tag{2.2}$$

dir.

ω bir 1-form olmak üzere ω'nin X'e göre kovaryant türevi

$$(\nabla_X\omega)(Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) \tag{2.3}$$

dir.

(2.3) lokal koordinatlar cinsinden

$$\nabla_X\omega : X^j\nabla_j\omega_i = X^j(\partial_j\omega_i - \Gamma^h_{ij}\omega_h) \tag{2.4}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada ω_i ve X^j sırasıyla ω ve X'in lokal bileşenleridir.

Tanım 2.4 M, n-boyutlu diferansiyellenebilen bir manifold, ∇, M'de bir afin konneksiyon, X ve Y M'de herhangi iki vektör alanı olmak üzere,

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \qquad (\mathbf{2.5})$$

şeklindeki tensöre burulma tensörü denir.

Tanım 2.5 M, n-boyutlu diferansiyellenebilen bir manifold, ∇ M'de tanımlı bir afin konneksiyon, g bir Riemann metriği olmak üzere, $\forall X, Y \in \mathscr{X}(M)$ için

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0 \qquad (\mathbf{2.6})$$

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \qquad (\mathbf{2.7})$$

şartlarını sağlayan ∇ konneksiyonuna Riemann konneksiyonu denir.

Teorem 2.1 [10] *Bir Riemann manifoldu üzerinde bir ve yalnız bir Riemann konneksiyonu vardır.*

İspat. ∇, M'de bir Riemann konneksiyonu, g bir Riemann metriği, X, Y ve Z M'de vektör alanları olmak üzere, (**2.7**) denkleminin lokal koordinatlardaki ifadesi

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma^h_{ji} g_{hk} + \Gamma^h_{ki} g_{hj} \qquad (\mathbf{2.8})$$

dir.

i, j ve k'ya sıralı permütasyon uygulanırsa

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^h_{ik} g_{hj} + \Gamma^h_{jk} g_{ih} \qquad (\mathbf{2.9})$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma^h_{ij} g_{hk} + \Gamma^h_{kj} g_{hi} \qquad (\mathbf{2.10})$$

elde edilir.

(**2.10**) denklemi (**2.8**) ve (**2.9**) denklemlerinin toplamından çıkarılırsa

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = 2\Gamma^h_{ki} g_{hj} \qquad (\mathbf{2.11})$$

bulunur.

(**2.11**) denklemi g^{jm} ile çarpılır ve j üzerine toplam alınırsa

$$\Gamma^m_{ki} = \frac{1}{2} g^{jm}(\partial_i g_{jk} + \partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik}) \qquad (\mathbf{2.12})$$

olarak elde edilir.

Γ^h_{ij} konneksiyon katsayıları g metriği ile tek bir şekilde belirlenir ve Γ^h_{ij} konneksiyon katsayılarına Levi-Civita konneksiyonu denir. □

Tanım 2.6 (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun.

$$K : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \longrightarrow \mathscr{X}(M)$$

$$K(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z \qquad (\mathbf{2.13})$$

ile tanımlanan K fonksiyonu M üzerinde bir $(1, 3)$ tensör alanıdır ve M'nin Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır.

Riemann eğrilik tensörünün lokal koordinatlardaki ifadesi

$$K^h_{kij} = -\partial_i \Gamma^h_{kj} + \partial_j \Gamma^h_{ki} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^h_{mi} + \Gamma^m_{ki}\Gamma^h_{mj} \qquad (\mathbf{2.14})$$

şeklindedir. K, her X, Y, Z ve $W \in \mathscr{X}(M)$, $f \in C^\infty$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$K(X, Y)Z + K(Y, X)Z = 0 \qquad (\mathbf{2.15})$$

$$K(X, Y)Z + K(Y, Z)X + K(Z, X)Y = 0 \qquad (\mathbf{2.16})$$

$$\nabla_X K(Y, Z)W + \nabla_Y K(Z, X)W + \nabla_Z K(X, Y)W = 0 \qquad (\mathbf{2.17})$$

$$f K(X, Y)Z = K(fX, Y)Z = K(X, fY)Z = K(X, Y) f Z \qquad (\mathbf{2.18})$$

Tanım 2.7 K eğrilik tensörü özdeş olarak sıfır ise, M manifolduna düz uzay denir.

Tanım 2.8 (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ ortonormal vektör alanları olsun.

$$Ric : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(X, Y) \longrightarrow Ric(X, Y) = \sum g(K(E_i, X)E_i, Y) \qquad (\mathbf{2.19})$$

şeklinde tanımlanan $(0,2)$ tipindeki $Ric(X,Y)$ tensör alanına Ricci eğrilik tensörü denir.

Lokal koordinatlardaki ifadesi

$$K_{ij} = K_{ijs}^{s} \qquad \textbf{(2.20)}$$

şeklindedir[11].

Ricci eğrilik tensörü simetrik bir tensördür.

Tanım 2.9 (M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X,\ Y \in \mathscr{X}(M)$ için,

$$Ric(X,Y) = \lambda g(X,Y) \qquad \textbf{(2.21)}$$

olacak biçimde M üzerinde bir $\lambda : M \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu tanımlı ise, M'ye bir Einstein manifoldu adı verilir.

Tanım 2.10 (M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r = \sum_{i,j=1}^{n} Ric(E_i, E_j) \qquad \textbf{(2.22)}$$

fonksiyonuna M'nin skaler eğrilik fonksiyonu adı verilir.

(**2.21**) den

$$\lambda = \frac{r}{n} \qquad \textbf{(2.23)}$$

olarak belirlenir. Böylece Einstein manifoldunun bir karakterizasyonu

$$K_{ij} = \frac{r}{n} g_{ij} \qquad \textbf{(2.24)}$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.11 $S_{ij} = \dfrac{1}{2(n-1)(n-2)}\left[g_{ij}r - 2(n-1)K_{ij}\right],\ (n>2)$ olmak üzere Riemann manifoldunun konform dönüşümü altında invaryant kalan

$$W_{hil}^{k} = K_{hil}^{k} + \delta_l^k S_{hi} - \delta_i^k S_{hl} + g^{jk} g_{ih} S_{jl} - g^{jk} g_{lh} S_{ji},\ (n>2) \qquad \textbf{(2.25)}$$

ile tanımlanan W_{hil}^{k} tensörüne konform eğrilik tensörü denir[11].

Tanım 2.12 Konform eğrilik tensörü özdeş olarak sıfır ise, Riemann uzayına konform düz uzay denir.

3. YARI SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU MANİFOLDLAR

M, C^∞ sınıfından differansiyellenebilen n-boyutlu bir manifold ve $\bar{\nabla}$ bir afin konneksiyon olmak üzere, $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun $T(X,Y)$ burulma tensörü, $\forall\ X, Y \in \mathscr{X}(M)$ vektörleri ve herhangi bir π 1-formu için

$$T(X,Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y \qquad \textbf{(3.1)}$$

şartını sağlıyorsa $\bar{\nabla}$'ya yarı simetrik konneksiyon denir[5].

(**3**.**1**) in lokal koordinatlardaki ifadesi

$$T^h_{ij} = \delta^h_j \pi_i - \delta^h_i \pi_j \qquad \textbf{(3.2)}$$

şeklindedir.

M manifoldu üzerinde verilen bir g metriği ile $\bar{\nabla}$ konneksiyonu için

$$Xg(Y,Z) = g(\bar{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \bar{\nabla}_X Z) \qquad \textbf{(3.3)}$$

şartı sağlanıyorsa $\bar{\nabla}$ konneksiyonuna metrik konneksiyon denir.

(**3**.**1**) ve (**3**.**3**) şartlarını sağlayan manifoldlara yarı simetrik metrik konneksiyonlu manifold denir[5].

Teorem 3.1 [5] *Yarı simetrik metrik konneksiyona sahip bir M manifoldunun konneksiyon katsayıları*

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_k \pi_j - g_{jk}\pi_l g^{il} \qquad \textbf{(3.4)}$$

olarak belirlenir.

İspat. $\bar{\nabla}$, yarı simetrik metrik konneksiyonunu ve ∇, Riemann konneksiyonunu göstermek üzere,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + U(X,Y) \qquad \textbf{(3.5)}$$

olsun.

Böylece $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ yarı simetrik metrik konneksiyonun katsayıları

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + U^i_{jk} \tag{3.6}$$

şeklinde yazılabilir. $\bar{\nabla}$ ve ∇ metrik konneksiyon olduğundan, (**3**.**3**) ve (**3**.**6**) den

$$U^h_{ik}g_{hj} + U^h_{jk}g_{ih} = 0 \tag{3.7}$$

elde edilir. (**3**.**7**) denkleminde, i, j ve k'ya sıralı permütasyon uygulanırsa

$$U^h_{ji}g_{hk} + U^h_{ki}g_{hj} = 0 \tag{3.8}$$

$$U^h_{kj}g_{hi} + U^h_{ij}g_{kh} = 0 \tag{3.9}$$

denklemleri elde edilir. (**3**.**9**) denklemi, (**3**.**7**) ve (**3**.**8**) denklemlerinin toplamından çıkarılırsa

$$-(U^h_{kj} - U^h_{jk})g_{hi} + (U^h_{ik} + U^h_{ki})g_{jh} - (U^h_{ij} - U^h_{ji})g_{hk} = 0 \tag{3.10}$$

bulunur. Ayrıca, ∇ simetrik bir konneksiyon olduğundan

$$T^h_{jk} = U^h_{jk} - U^h_{kj} \tag{3.11}$$

olarak bulunur. (**3**.**11**) denklemi (**3**.**10**) da yerine yazılırsa

$$(U^h_{ik} + U^h_{ki})g_{jh} = T^h_{ij}g_{hk} + T^h_{kj}g_{hi} \tag{3.12}$$

elde edilir. (**3**.**12**) denklemi g^{jl} ile çarpılır ve j üzerine toplam alınırsa

$$(U^l_{ik} + U^l_{ki}) = \delta^l_k\pi_i + \delta^l_i\pi_k - 2g_{ki}\pi_j g^{jl} \tag{3.13}$$

bulunur.

$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \dfrac{\bar{\Gamma}^i_{jk} + \bar{\Gamma}^i_{kj}}{2} + \dfrac{\bar{\Gamma}^i_{jk} - \bar{\Gamma}^i_{kj}}{2}$ olarak yazılabildiğinden, (**3**.**6**) ve (**3**.**12**) den, yarı simetrik metrik konneksiyonun katsayıları

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_k\pi_j - g_{jk}\pi_l g^{il} \tag{3.14}$$

olarak elde edilmiş olur. □

Tanım 3.1

$$\bar{K}(X,Y)Z = \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z - \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z \quad (\mathbf{3.15})$$

tensörüne yarı simetrik metrik konneksiyonun eğrilik tensörü denir.

(**3**.**14**) ve (**3**.**15**) kullanılarak,

$$\bar{K}^h_{ikj} = K^h_{ikj} + \delta^h_j\pi_{ik} - \delta^h_k\pi_{ij} + g_{ik}g^{lh}\pi_{lj} - g_{ij}g^{lh}\pi_{lk} \quad (\mathbf{3.16})$$

olarak bulunur. Burada

$$\pi_{ik} = \nabla_k\pi_i - \pi_i\pi_k + \frac{1}{2}g_{ik}\pi^m\pi_m \quad (\mathbf{3.17})$$

olarak tanımlanmıştır. (**3**.**16**) denklemi g_{hl} ile çarpılırsa yarı simetrik metrik konneksiyonun eğrilik tensörü

$$\bar{K}_{likj} = K_{likj} + g_{jl}\pi_{ik} - g_{kl}\pi_{ij} + g_{ik}\pi_{lj} - g_{ij}\pi_{lk} \quad (\mathbf{3.18})$$

şeklinde elde edilir. $\bar{K}_{hijk}$ eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar[4,5].

$$\bar{K}_{hijk} = -\bar{K}_{hikj} \quad (\mathbf{3.19})$$

$$\bar{K}_{hijk} + \bar{K}_{hkij} + \bar{K}_{hjki} = 2g_{jh}\bar{\nabla}_{[k}\pi_{i]} + 2g_{kh}\bar{\nabla}_{[j}\pi_{i]} + 2g_{ih}\bar{\nabla}_{[k}\pi_{j]} \quad (\mathbf{3.20})$$

$$\bar{\nabla}_k\bar{K}^h_{ijl} + \bar{\nabla}_l\bar{K}^h_{ikj} + \bar{\nabla}_j\bar{K}^h_{ilk} = 2\pi_k R^h_{ijl} + 2\pi_l R^h_{ikj} + 2\pi_j R^h_{ilk} \quad (\mathbf{3.21})$$

K_{ij}, Riemann konneksiyonunun Ricci tensörü ve r, Riemann konneksiyonunun skaler eğriliği olmak üzere, yarı simetrik metrik konneksiyonun Ricci tensörü $\bar{K}_{ij}$ ve skaler eğriliği $\bar{r}$, sırasıyla

$$\bar{K}_{ji} = K_{ji} + (n-2)\pi_{ji} + \pi_{kl}g^{kl}g_{ji} \quad (\mathbf{3.22})$$

$$\bar{r} = r + 2(n-1)\pi_{ij}g^{ij} \quad (\mathbf{3.23})$$

olarak elde edilir.

(**3**.**22**) den açıkça görüldüğü gibi $\bar{K}_{ij}$ simetrik bir tensör değildir.

$\bar{K}_{ij}$ nin simetrik kısmı

$$\bar{K}_{(ij)} = \frac{\bar{K}_{ij} + \bar{K}_{ji}}{2} = K_{ij} + (n-2)\pi_{(ij)} + \pi_{kl}g^{kl}g_{ij} \qquad \textbf{(3.24)}$$

ve anti-simetrik kısmı

$$\bar{K}_{[ij]} = \frac{\bar{K}_{ij} - \bar{K}_{ji}}{2} = (n-2)\pi_{[ij]} = (n-2)\nabla_{[i}\pi_{j]} \qquad \textbf{(3.25)}$$

olarak bulunur.

Buradan görüldüğü gibi $\bar{K}_{ij}$ nin simetrik olması için gerek ve yeter şart, $\pi = 0$ veya π'nin bir gradiyent vektör olmasıdır.

Teorem 3.2 [5] *Riemann metriğine sahip bir manifoldun yarı simetrik konneksiyona göre eğrilik tensörünün sıfır olması için gerek ve yeter şart, Riemann konneksiyonuna göre konform eğrilik tensörünün sıfır olmasıdır.*

İspat. $W_n(g,\pi)$ nin eğrilik tensörü $\bar{K}^h_{ikj}$ nin özdeş olarak sıfır olduğunu kabul edelim.

(**3.16**) dan

$$K^h_{ikj} = -\delta^h_j\pi_{ik} + \delta^h_k\pi_{ij} - g_{ik}g^{lh}\pi_{lj} + g_{ij}g^{lh}\pi_{lk}, \ (n>2) \qquad \textbf{(3.26)}$$

bulunur.

Buradan h ve l üzerine daraltma yapılırsa

$$K_{ik} = (2-n)\pi_{ik} - g_{ik}g^{lk}\pi_{lk}, \ (n>2) \qquad \textbf{(3.27)}$$

elde edilir. (**3.27**) den

$$K = 2(1-n)g^{lk}\pi_{lk} \qquad \textbf{(3.28)}$$

olarak bulunur.

Ayrıca $S_{ij} = \dfrac{1}{2(n-1)(n-2)}\left[g_{ij}K - 2(n-1)K_{ij}\right]$, (n>2)

ve

$$W^k_{hil} = K^k_{hil} + \delta^k_l S_{hi} - \delta^k_i S_{hl} + g^{jk}g_{ih}S_{jl} - g^{jk}g_{lh}S_{ji} \qquad \textbf{(3.29)}$$

Riemann konneksiyonuna ait konform eğrilik tensörü olmak üzere, (**3.26**), (**3.27**) ve (**3.28**), (**3.29**) kullanılırsa $W^k_{hil} = 0$ sonucu elde edilmiş olur. $\square$

4. WEYL MANİFOLDLARI

Tanım 4.1 Burulmasız bir konneksiyona sahip n-boyutlu bir M manifoldunda, g metrik tensörü ile D konneksiyonu arasında

$$D_k g_{ij} - 2g_{ij}\omega_k = 0 \qquad (\mathbf{4.1})$$

uygunluk koşulu varsa, M manifolduna bir Weyl uzayı denir ve $W_n(g_{ij}, \omega_k)$ ile gösterilir[12]. Burada ω bir kovaryant vektör alanı olup Weyl uzayının komplemanter vektörü adını alır.

σ pozitif skaler bir fonksiyon olmak üzere, $W_n(g_{ij}, \omega_k)$ uzayında metrik tensörün

$$\tilde{g}_{ij} = \sigma^2 g_{ij} \qquad (\mathbf{4.2})$$

şeklindeki bir konform dönüşümü altında, ω kovaryant vektör alanı

$$\tilde{\omega}_i = \omega_i + \partial_i \ln \sigma \qquad (\mathbf{4.3})$$

şeklinde değişir.

L^i_{jk} Weyl konneksiyon katsayılarını göstermek üzere, (**4.1**) denklemi

$$\partial_k g_{ij} - g_{hj} L^h_{ik} - g_{ih} L^h_{jk} - 2\omega_k g_{ij} = 0 \qquad (\mathbf{4.4})$$

şeklinde yazılır. L^i_{kl} konneksiyon katsayıları (**4.4**) den

$$L^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} - g^{im}(g_{mk}\omega_l + g_{ml}\omega_k - g_{kl}\omega_m) \qquad (\mathbf{4.5})$$

olarak elde edilir[12]. Eğer ω sıfır veya bir gradiyent vektör ise, Weyl manifoldu Riemann manifolduna indirgenir. Buna göre (**4.1**) bağıntısını sağlayan ω kovaryant vektörü ve g metrik tensörü varsa, (**4.5**) simetrik bir konneksiyon tanımlar.

g metrik tensörü ve ω komplemanter vektörü (**4**.**1**)'i sağlıyorsa, (**4**.**2**) ve (**4**.**3**) bağıntıları ile verilen $\tilde{g}$ metrik tensörü ve $\tilde{\omega}$ komplemanter vektörü de aynı bağıntıyı sağlar. (**4**.**2**) ve (**4**.**3**) ile verilen bu dönüşüme Gauge dönüşümü adı verilir[12].

Tanım 4.2 g tensörünün $\tilde{g} = \sigma^2 g$ şeklindeki bir konform dönüşümü altında bir A büyüklüğü

$$\tilde{A} = \sigma^p A \tag{4.6}$$

şeklinde değişiyorsa, A'ya g tensörünün $\{p\}$ ağırlıklı bir uydusu denir.

Tanım 4.3 A, g 'nin $\{p\}$ ağırlıklı bir uydusu olmak üzere

$$\dot{\partial}_k A = \partial_k A - p\omega_k A \tag{4.7}$$

şeklinde tanımlanan $\dot{\partial}_k A$ ifadesine A'nın genelleştirilmiş türevi denir.

$$\dot{D}_k A = D_k A - p\omega_k A \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlanan $\dot{D}_k A$ büyüklüğüne, A'nın genelleştirilmiş kovaryant türevi denir. Burada $D_k A$ alışılmış kovaryant türevdir[12].

Genelleştirilmiş türev ve genelleştirilmiş kovaryant türev bir uydunun ağırlığını korur.

Riemann geometrisinde metrik tensörün kovaryant türevinin sıfır olmasına karşılık, Weyl geometrisinde metrik tensörün genelleştirilmiş kovaryant türevi sıfırdır.

Bilindiği gibi Riemann geometrisinde konneksiyon katsayıları, metrik tensör ve bileşenlerinin kısmi türevleri cinsinden ifade edilmektedir.

$$\dot{\partial}_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - 2\omega_k g_{ij} \tag{4.9}$$

olduğu göz önüne alınırsa, L^i_{jk} Weyl konneksiyon katsayıları metrik tensör ve onun genelleştirilmiş türevleri cinsinden

$$L^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}(\dot{\partial}_k g_{jl} + \dot{\partial}_j g_{kl} - \dot{\partial}_l g_{jk}) \tag{4.10}$$

olarak yazılabilir[12].

W_n Weyl uzayının karışık eğrilik tensörü ve kovaryant eğrilik tensörü, sırasıyla

$$R^i_{jkl} = -\frac{\partial L^i_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial L^i_{jk}}{\partial x^l} - L^i_{hk} L^h_{jl} + L^i_{hl} L^h_{jk} \qquad \mathbf{(4.11)}$$

$$R_{mjkl} = g_{mi} R^i_{jkl} \qquad \mathbf{(4.12)}$$

olarak tanımlanır. W_n nin Ricci eğrilik tensörü ve skaler eğriliği ise, sırasıyla,

$$R_{jk} = g^{ml} R_{mjkl} \qquad \mathbf{(4.13)}$$

$$R = g^{jk} R_{jk} \qquad \mathbf{(4.14)}$$

olarak tanımlanır. Weyl konneksiyonu metrik olmadığından, R_{ij} Ricci tensörü simetrik değildir. R_{ij}, simetrik ve anti-simetrik kısımlarının toplamı olarak

$$R_{ij} = R_{[ij]} + R_{(ij)} \qquad \mathbf{(4.15)}$$

olarak yazılabilir.

Tanım 4.4 λ, $W_n(g, \omega)$ de bir skaler fonksiyon olmak üzere, Ricci tensörünün simetrik kısmı metrik tensör ile

$$R_{(ij)} = \lambda g_{ij} \qquad \mathbf{(4.16)}$$

şeklinde orantılı ise, $W_n(g, \omega)$ manifolduna Einstein-Weyl manifoldu denir[3].

Weyl uzayının eğrilik tensörü R^h_{ijk} aşağıdaki özellikleri sağlar[12].

$$R_{ijkl} + R_{ijlk} = 0 \qquad \mathbf{(4.17)}$$

$$R_{ijkl} + R_{jikl} = 2g_{ij}(D_l\omega_k - D_k\omega_l) \qquad \mathbf{(4.18)}$$

$$R^h_{hjk} = -2R_{[jk]} = -2n\nabla_{[j}\omega_{k]} \qquad \mathbf{(4.19)}$$

$$R^h_{ijk} + R^h_{jki} + R^h_{kij} = 0 \qquad \mathbf{(4.20)}$$

$$\dot{\nabla}_l R^h_{ijk} + \dot{\nabla}_l R^h_{jki} + \dot{\nabla}_l R^h_{kij} = 0 \qquad \mathbf{(4.21)}$$

Tanım 4.5

$$L_{ij} = -\frac{1}{n-2} R_{ij} + \frac{2}{n(n-2)} R_{[ij]} + \frac{1}{2(n-1)(n-2)} R g_{ij}, \ (n > 2)$$

ve

$$L^h_k = g^{lh} L_{lk}$$

olmak üzere, $W_n(g,\omega)$ Weyl manifoldunun konform dönüşümü altında invaryant kalan

$$C^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k L_{ij} - \delta^h_j L_{ik} + L^h_k g_{ij} - L^h_j g_{ik} - 2\delta^h_i L_{[jk]} \qquad (\mathbf{4.22})$$

tensörüne Weyl manifoldunun konform eğrilik tensörü denir[13].

Tanım 4.6 Konform eğrilik tensörü özdeş olarak sıfır olan Weyl manifoldlarına konform düz Weyl manifoldu denir.

5. YARI SİMETRİK KONNEKSİYONLU WEYL MANİFOLDLARI

M, n-boyutlu diferansiyellenebilen bir Weyl manifoldu olsun. π 1-form olmak üzere, M'de lineer konneksiyon olan $\bar{D}$'nin burulma tensörü $\bar{T}$

$$\bar{T}^h_{jk} = \bar{L}^h_{jk} - \bar{L}^h_{kj} = \delta^h_k \pi_j - \delta^h_j \pi_k \tag{5.1}$$

ve metrik tensörü g

$$\bar{D}_k g_{ij} = 2\omega_k g_{ij} \tag{5.2}$$

koşulunu sağlıyorsa, M manifolduna yarı simetrik konneksiyonlu Weyl manifoldu denir ve $W_n(g, \omega, \pi)$ ile gösterilir[14].

A, (1,2) tipinde tensör alanı olmak üzere

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + A(X, Y) \tag{5.3}$$

olsun. $\bar{L}^i_{jk}$ yarı simetrik Weyl konneksiyonunun katsayıları

$$\bar{L}^i_{jk} = L^i_{jk} + A^i_{jk} \tag{5.4}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$L^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} - g^{im}(g_{mk}\omega_l + g_{ml}\omega_k - g_{kl}\omega_m) \tag{5.5}$$

Weyl konneksiyon katsayılarıdır.

Teorem 5.1 [14] *Weyl manifoldu üzerinde bir ve yalnız bir yarı simetrik lineer konneksiyon vardır.*

İspat. (**5.2**) ve (**5.3**) den

$$A^h_{ik} g_{hj} + A^h_{jk} g_{ih} = 0 \tag{5.6}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde i, j ve k'ya sıralı permütasyon uygulanırsa

$$A^h_{ji}g_{hk} + A^h_{ki}g_{jh} = 0 \tag{5.7}$$

$$A^h_{kj}g_{hi} + A^h_{ij}g_{kh} = 0 \tag{5.8}$$

denklemleri elde edilir. (**5.8**) denklemi, (**5.6**) ve (**5.7**) nin toplamından çıkarılırsa

$$-(A^h_{kj} - A^h_{jk})g_{hi} + (A^h_{ik} + A^h_{ki})g_{jh} - (A^h_{ij} - A^h_{ji})g_{hk} = 0 \tag{5.9}$$

bulunur. Bunun yanı sıra L^i_{jk} simetrik olduğundan

$$\bar{T}^h_{ij} = A^h_{ij} - A^h_{ji} \tag{5.10}$$

olarak elde edilir. Böylece (**5.1**), (**5.4**) ve (**5.10**) dan

$$A^r_{ik} + A^r_{ki} = \delta^r_k\pi_i + \delta^r_i\pi_k - 2g_{ki}\pi_h g^{rh} \tag{5.11}$$

elde edilir.

$\bar{L}^i_{jk} + \bar{L}^i_{kj} = 2L^i_{jk} + A^i_{jk} + A^i_{kj}$ ve $\bar{L}^i_{jk} - \bar{L}^i_{kj} = \bar{T}^i_{jk}$ olduğundan, (**5.1**) ve (**5.11**) den

$$\bar{L}^i_{jk} = L^i_{jk} + \delta^i_k\pi_j - g_{kj}\pi_l g^{li} \tag{5.12}$$

olarak elde edilmiş olur. □

Yarı simetrik Weyl konneksiyonunun karışık eğrilik tensörü, kovaryant eğrilik tensörü $\bar{R}_{ijkl}$ ve Ricci tensörü $\bar{R}_{ij}$, sırasıyla,

$$\bar{R}^p_{jkl} = -\partial_k\bar{L}^p_{jl} + \partial_l\bar{L}^p_{jk} - \bar{L}^p_{hk}\bar{L}^h_{jl} + \bar{L}^p_{hl}\bar{L}^h_{jk} \tag{5.13}$$

$$\bar{R}_{ijkl} = \bar{R}^h_{jkl}g_{ih} \tag{5.14}$$

$$\bar{R}_{jl} = \bar{R}^k_{jlk} = g^{mk}\bar{R}_{mjlk} \tag{5.15}$$

olarak tanımlanır. R_{likj}, D Weyl konneksiyonunun kovaryant eğrilik tensörü ve

$$\pi_{ik} = D_k\pi_i - \pi_i\pi_k + \frac{1}{2}g_{ik}\pi^m\pi_m \tag{5.16}$$

olmak üzere, (**5.13**) denklemi (**5.14**) de kullanılırsa

$$\bar{R}_{likj} = R_{likj} + g_{jl}\pi_{ik} - g_{kl}\pi_{ij} + g_{ik}\pi_{lj} - g_{ij}\pi_{lk} \tag{5.17}$$

olarak elde edilir.

Weyl konneksiyonunun eğrilik tensörü olan R_{lijk} nın özellikleri kullanılarak $W_n(g,\omega,\pi)$ nin eğrilik tensörünün ve kovaryant eğrilik tensörünün aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca görülebilir:

$$\bar{R}_{ijkl} + \bar{R}_{ijlk} = 0 \tag{5.18}$$

$$\bar{R}_{ijkl} + \bar{R}_{jikl} = 2g_{ij}(D_l\omega_k - D_k\omega_l) \tag{5.19}$$

$$\bar{R}^h_{hjk} = R^h_{hjk} = -2R_{[jk]} \tag{5.20}$$

$$\bar{R}_{hijk} + \bar{R}_{hkij} + \bar{R}_{hjki} = 2g_{jh}\bar{D}_{[k}\pi_{i]} + 2g_{kh}\bar{D}_{[j}\pi_{i]} + 2g_{ih}\bar{D}_{[k}\pi_{j]} \tag{5.21}$$

Ayrıca (**5.14**) ve (**5.16**) dan $W_n(g,\omega,\pi)$ nin Ricci tensörü

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-2)\pi_{ij} + g_{ij}\pi_{lk}g^{lk} \tag{5.22}$$

olarak elde edilir.

(**5.22**) den açıkça görüldüğü gibi $\bar{D}$ konneksiyonunun Ricci tensörü simetrik değildir.

Ricci tensörünün simetrik ve anti-simetrik kısımları, sırasıyla,

$$\bar{R}_{(ij)} = R_{(ij)} + (n-2)\pi_{(ij)} + g_{ij}\pi_{lk}g^{lk} \tag{5.23}$$

$$\bar{R}_{[ij]} = R_{[ij]} + (n-2)D_{[j}\pi_{i]} \tag{5.24}$$

bulunur. (**4.18**) kullanılarak (**5.24**)

$$\bar{R}_{[ij]} = nD_{[i}\omega_{j]} + (n-2)D_{[j}\pi_{i]} \tag{5.25}$$

şeklinde yazılabilir.

(**5.24**) den açıkça görüldüğü gibi, n=2 için

$$\bar{R}_{[ij]} = R_{[ij]} = nD_{[i}\omega_{j]}$$

dir. Bunun sonucu olarak iki boyutlu yarı simetrik konneksiyona sahip Weyl manifoldunun Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart, $W_n(g,\omega,\pi)$

nin Riemann manifoldu olmasıdır.

Tanım 5.1 λ, $W_n(g,\omega,\pi)$ de skaler fonksiyon olmak üzere, Ricci tensörünün simetrik kısmı, metrik tensör ile

$$\bar{R}_{(ij)} = \lambda g_{ij} \tag{5.26}$$

şeklinde orantılı ise, $W_n(g,\omega,\pi)$ manifolduna yarı simetrik Einstein-Weyl manifoldu denir[14].

Açıklama 5.1 n=2 için, (**5.23**) den

$$\bar{R}_{(ij)} = R_{(ij)} + g_{ij}\pi_{lk}g^{lk}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak eğer $W_n(g,\omega)$ 2-boyutlu Einstein-Weyl manifoldu ise, $W_n(g,\omega,\pi)$ de Einstein-Weyl manifoldu olur.

Teorem 5.2 *$W_n(g,\omega,\pi)$, (n>2) manifoldunun eğrilik tensörü sıfır olmak üzere, $W_n(g,\omega)$ nin konform eğrilik tensörünün sıfır olması için gerek ve yeter şart, π'nin sıfır veya bir gradiyent vektör olmasıdır.*

İspat. $W_n(g,\omega,\pi)$ nin eğrilik tensörü $\bar{R}_{likj}$ nın özdeş olarak sıfır olduğunu kabul edelim.

(**5.17**) den

$$R_{likj} = -g_{jl}\pi_{ik} + g_{kl}\pi_{ij} - g_{ik}\pi_{lj} + g_{ij}\pi_{lk} \tag{5.27}$$

bulunur. (**5.15**) ve (**5.27**) den

$$R_{ij} = (2-n)\pi_{ij} - g_{ij}g^{lk}\pi_{lk},\ (n>2) \tag{5.28}$$

olarak elde edilir. Ayrıca (**5.28**) den

$$R = 2(1-n)g^{lk}\pi_{lk} \tag{5.29}$$

olarak bulunur. (**5.24**) den görüldüğü gibi

$$R_{[ij]} = (2-n)D_{[j}\pi_{i]},\ (n>2) \tag{5.30}$$

olduğundan

$$L_{ij} = \frac{R_{ij}}{n-2} + \frac{2}{n(n-2)}R_{[ij]} + \frac{Rg_{ij}}{2(n-1)(n-2)} \tag{5.31}$$

ve

$$L_k^h = L_{lk} g^{hl} \tag{5.32}$$

olmak üzere, (**5.28**), (**5.29**) ve (**5.30**) , (**5.31**) de yerine yazılırsa

$$L_{ij} = \pi_{ij} - \frac{2}{n} D_{[j} \pi_{i]} \tag{5.33}$$

olarak elde edilmiş olur. (**5.33**) den

$$L_{[ij]} = \frac{n-2}{n} D_{[j} \pi_{i]}, \ (n > 2) \tag{5.34}$$

olarak bulunur.

Weyl manifoldu W_n nin, konform eğrilik tensörü

$$C_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_k^h L_{ij} - \delta_j^h L_{ik} + L_k^h g_{ij} - L_j^h g_{ik} - 2\delta_i^h L_{[jk]} \tag{5.35}$$

olmak üzere

$C_{lijk} = g_{hl} C_{ijk}^h$ olarak tanımlanırsa

$$C_{lijk} = R_{lijk} + g_{kl} L_{ij} - g_{jl} L_{ik} + L_{lk} g_{ij} - L_{lj} g_{ik} - 2g_{il} L_{[jk]} \tag{5.36}$$

elde edilir. (**5.36**) da (**5.27**), (**5.33**)ve (**5.34**) kullanılarak

$$C_{lijk} = -\frac{2}{n} \left(g_{kl} D_{[j} \pi_{i]} - g_{jl} D_{[k} \pi_{i]} + g_{ij} D_{[k} \pi_{l]} - g_{ik} D_{[j} \pi_{l]} + (n-2) g_{il} D_{[k} \pi_{j]} \right), \ (n > 2) \tag{5.37}$$

bulunur.

Buradan açıkça görüldüğü gibi $C_{lijk} = 0$ olması için gerek ve yeter şart, $\pi = 0$ veya π'nin bir gradiyent vektör olmasıdır. □

Sonuç Teorem 5.1 *$W_n(g, \omega, \pi)$, (n>2) manifoldunun eğrilik tensörü sıfır olmak üzere, $W_n(g, \omega)$ Weyl manifoldunun konform eğrilik tensörünün sıfır olması için gerek ve yeter şart, $W_n(g, \omega, \pi)$ nin yarı simetrik Riemann manifoldu olmasıdır.*

İspat. $R_{ijkl} = 0$ olduğunu kabul edersek, (**5.25**) den

$$D_{[j}\pi_{i]} = \frac{n}{n-2}D_{[j}\omega_{i]}, \ (n > 2) \tag{5.38}$$

elde edilir. Teorem 5.2 ve (**5.38**) den π'nin sıfır form veya gradiyent vektör olması için gerek ve yeter şart, ω'nin sıfır form veya gradiyent vektör olmasıdır. Buradan, $W_n(g, \omega, \pi)$ manifoldunun yarı simetrik Riemann manifoldu olmasıdır sonucu elde edilir. □

Sonuç Teorem 5.2 *$W_n(g, \omega, \pi)$, (n>2) nin eğrilik tensörü sıfır olmak üzere, $W_n(g, \omega)$ nin Einstein-Weyl olması için gerek ve yeter şart, $\pi_{(ij)} = \mu g_{ij}$ olmasıdır.*

İspat. (**5.28**) den

$$R_{(ij)} = (2-n)\pi_{(ij)} - g_{ij}g^{lk}\pi_{lk}, \ (n > 2) \tag{5.39}$$

olarak elde edilir

Eğer $W_n(g, \omega)$ Einstein-Weyl manifoldu ise (**4.16**) dan

$$R_{(ij)} = \lambda g_{ij} \tag{5.40}$$

dir. (**5.39**) ve (**5.40**) dan, $\mu = \frac{1}{2-n}(\lambda + g^{lk}\pi_{lk}), \ (n > 2)$ olmak üzere

$$\pi_{(ij)} = \mu g_{ij} \tag{5.41}$$

olarak elde edilir. □

Açıklama 5.2 (**5.39**) dan açıkça görüldüğü gibi n=2 için, Weyl konneksiyonuna ait Ricci tensörünün simetrik kısmı, metrik tensörün bir katı olarak elde edilir.

Buradan n=2 için, $W_n(g, \omega, \pi)$ nin eğrilik tensörü sıfır ise, $W_n(g, \omega)$ Einstein-Weyl uzayıdır sonucu elde edilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada yarı simetrik konneksiyona sahip Weyl manifoldları incelenmiştir. Yarı simetrik konneksiyonun Weyl manifoldu üzerinde varlığı ispatlanmıştır.

Yarı simetrik konneksiyona sahip Weyl manifoldunun eğrilik tensörü sıfır olmak üzere, Weyl manifoldunun konform eğrilik tensörünün sıfır olması için gerek ve yeter şart elde edilmiştir.

Çalışmada elde edilen sonuçlardan yola çıkılarak, yarı simetrik konneksiyona sahip Weyl manifoldu için Einstein-Weyl uzayları incelenebilir ve Einstein-Weyl uzaylarına örnekler bulunabilir.

KAYNAKLAR

[1] Weyl, H. (1918). *Gravitation und Elektrizit ät*, S.B. Press, Akad.Wiss, Berlin

[2] Cartan, E. (1943). *Sur une classe d'espaces de Weyl,* Ann.Sci.Ec.Norm.Sup. **60**, p.1–16.

[3] Jones, P.E. ve Tod, K.P. (1985) *Minitwistor and Einstein Weyl spaces,* Classical Quantum and Gravity, **2**, p.567-577.

[4] Friedmann, A. ve Schouten, J.A. (1924). *Über die geometrie der habsymmetrishen übertragung*, Math. Zeitschr, **21**, p.211-223.

[5] Yano, K. (1970). *On Semi-symmetric Metric Connections*, Rev.Roumanie Math. Pures Appl., **15**, p.1579-1586.

[6] Yano, K. ve Imai, T. (1975). *On Semi-symmetric Metric F-connection*, Tensor **29**, p.134-138.

[7] De, U.C. ve Biswas, S.C. (1997). *On a type of semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold*, Publ. de. L'inst. Math, Nouv.serie, **61(75)**, p.90-96

[8] De, U.C. ve Joydeep, S. (2001). *On a type of semi-symmetric metric connection on a almost contact metric manifold*, Facta Universitatis, Ser. Math. Inform., **16,** p.87-96

[9] Agashe, N.S. ve Chafle, M.R. (1992). *A semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold*, Indian J. pure pp.Math., **23(6**), p.399-409

[10] Weatherburn, C.E. (1966). *An Introduction to Riemannian Geometry and Tensor Calculus*, Cambridge Univ. Press.

[11] Eisenhart, L.P. (1926). *Riemannian Geometry*, Princeton Univ.Press.

[12] Canfes, E. ve Özdeğer, A. (1997). *Some applications of prolonged covariant differentiation in Weyl spaces*, J. Geometry, **60(1/2)**, p.7-16

[13] Özdemir, F. ve Yıldırım, G.Ç. (2005). *On conformally recurrent Kahlerian Weyl spaces, Topology and its applications*, **153,** p.477-484

[14] Canfes, E.C. (2009). Isotropic Weyl manifold with semi-symmetric connection, *Acta Mathematica Scientia,* **29B(1)**, p.176-180

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Didem Atabey

Doğum Yeri ve Tarihi: Manisa/11.05.1984

E-Posta: atabeydi@itu.edu.tr

Lisans: **Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2002-2006**

Yüksek Lisans: İstanbul Üniversitesi, Orta Öğretim Alan Öğretmenliği, 2006-2008