

İKİNCİ DERECEDEDEN BİR KISITLA DÜZGÜN
OLMAYAN AŞKINALTUZAY BETİMLEYEN
AĞIRLIK FONKSİYONLARININ YÜKSEK
BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nilay ŞENOL

Anabilim Dalı : Bilişim

Programı : Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

Mayıs 2003

İKİNCİ DERECEDEDEN BİR KISITLA DÜZGÜN
OLMAYAN AŞKINALTUZAY BETİMLEYEN
AĞIRLIK FONKSİYONLARININ YÜKSEK
BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nilay ŞENOL

702011021

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2003

Tezin Savunulduğu Tarih : 2 Haziran 2003

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin DEMİRALP

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Seyidali Akhiev SEYİDOĞLU

Doç. Dr. N. Abdülbaki BAYKARA (M.Ü)

Mayıs 2003

ÖNSÖZ

Tezin her aşamasında bilgisi, deneyimi ve sonsuz sabrıyla benden yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Metin Demiralp'e teşekkür ederim.

Her zaman, her konuda yanımda oldukları ve tüm fedakârlıkları için aileme ve tez çalışmama olan katkılarından ötürü, desteğini ve dostluğunu hep hissettiğim arkadaşım Berna Fırat'a teşekkür ederim.

Mayıs 2003

Nilay ŞENOL

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	vi
TABLO LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
SEMBOL LİSTESİ	ix
ÖZET	x
SUMMARY	xi
1 GİRİŞ	1
1.1 Çalışmanın Amacı	1
1.2 Tezdeki Sunum Düzeni	2
1.3 Dik Dönme Matrisleri	2
1.4 İkinci Dereceden Yüzeyler	5
2 YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM	9
3 YBMG BİLEŞENLERİNİN AŞKINDÖNMELER ve KÜRESEL DEĞİŞKENLER KULLANILARAK BELİRLENMESİ	14
3.1 Sıfırıncı Basamaktan YBMG Yaklaşırımı	17
3.2 Birinci Basamaktan YBMG Yaklaşırımı	25
3.3 İkinci Basamaktan YBMG Yaklaşırımı	28
3.4 p nci Basamaktan YBMG Yaklaşırımı	29
4 YBMG BİLEŞENLERİNİN TOPLAMSALLIK ÖLÇENLERİNİN BELİRLENMESİ	31
4.1 Uygulama	31
5 SONUÇ	36

KAYNAKLAR	37
EKLER	
A BİRİM BASAMAK FONKSİYONU	39
B KÜRESEL DEĞİŞKENLERE GEÇİŞ	40
C BETA FONKSİYONU	43
D YANILGI (HATA) FONKSİYONU ve TÜMLEYİCİ YANILGI FONKSİYONU	45
E Eliptik Paraboloid, Hiperbolik Paraboloid ve Elipsoid Yüzeylerinin Çizimi	47
F Üç Boyutta Toplamsallık Ölçenlerinin Hesaplanması	48

KISALTMALAR

YBMG: Yüksek Boyutlu Model Gösterilim

GYBMG: Genelleştirilmiş Yüksek Boyutlu Model Gösterilim

ÇYBMG: Çarpımsallaştırılmış Yüksek Boyutlu Model Gösterilim

MYBMG: Melez Yüksek Boyutlu Model Gösterilim

HDMR: High Dimensional Model Representation

GHDMR: Generalized High Dimensional Model Representation

HHDMR: Hybrid High Dimensional Model Representation

TABLO LİSTESİ

Tablolar

- | | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | Ağırlık Fonksiyonu Toplamsallık ve Yayılma Ölçenleri-3 Boyut . . . | 33 |
| 4.2 | Ağırlık Fonksiyonu Toplamsallık ve Yayılma Ölçenleri-4 Boyut . . . | 34 |

ŞEKİL LİSTESİ

Şekiller

1.1	Eksen takımı dönmesi	3
1.2	Birim vektörlerin dönmesi	4
1.3	Birim Basamak Fonksiyonu	5
1.4	3 boyutta eliptik paraboloid	7
1.5	3 boyutta hiperbolik paraboloid	7
1.6	3 boyutta elipsoyid	8
4.1	Toplamsallık ölçenleri-3 boyut	35
4.2	Toplamsallık ölçenleri-4 boyut	35
A.1	Birim Basamak Fonksiyonu	39
B.1	İki Boyutlu Küresel Koordinat Dönüşümü[14]	40
B.2	Üç Boyutlu Küresel Koordinat Dönüşümü[14]	41
D.1	Yanlgı Fonksiyonu[15]	45
D.2	Tümleyici Yanlgı Fonksiyonu[15]	46

SEMBOL LİSTESİ

ξ	Özvektör
λ	Özdeğer
Λ	Özdeğerlerden oluşan köşegen matris
Q	Dönme matrisi
$U(x)$	Birim basamak fonksiyonu
$B(x)$	Beta fonksiyonu
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$erf(x)$	Yanılıgı Fonksiyonu
$erfc(x)$	Tamamlayıcı Yanılıgı Fonksiyonu
u_0	Değişmez Terim
$u_i(z_i)$	Bir Bağımsız Değişkene Bağlı Olan Fonksiyon
$u_{i_1 i_2}(z_{i_1}, z_{i_2})$	İki Bağımsız Değişkene Bağlı Olan Fonksiyon
$W_i(z_i)$	Ağırlık Fonksiyonu
σ_0	Sıfırıncı Basamaktan YBMG Yaklaşırımı
σ_1	Birinci Basamaktan YBMG Yaklaşırımı
σ_2	İkinci Basamaktan YBMG Yaklaşırımı
I	Birim Matris
μ	Ağırlık fonksiyonu yakınsama ölçeni

ÖZET

Bu çalışmadaki asıl amacımız, ağırlık fonksiyonunun en genel yapıda kullanılabileceği bir yüksek boyutlu model gösterilim yöntemi olan Genelleştirilmiş Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (GYBMG) için ağırlık fonksiyonunu Yüksek Boyutlu Model Gösterilimine (YBMG) açmak olmuştur. Amaca yönelik olarak atılan adımlarda izlenmek istenen yol, aşkınıuzayda (hyperspace) aşkındönmelere (hyperrotation) dayandırılan bir belirleme yordamıdır. Bu yaklaşımdaki amacımız ağırlık fonksiyonunun tüm bileşenleri için integral sayısında indirgeme sağlayabilmektir.

Özellikle İkinci Dereceden Programlama (Kuvadratik Programlama) problemlerinde ilgilenilen sorunun çözümünün arandığı aşkınıöre bir ikinci dereceden yapıyla betimlenir ve bu aşkınıöre, genellikle ayrılabilir dik bir geometriye sahip değildir. Burada, ikinci dereceden yapıyla betimlenen aşkınıüzeyin diklik ya da çarpımsallık özelliklerini taşımaması YBMG açılımını doğrudan kullanmamıza olanak vermez. Böyle bir durumda, GYBMG ile sorunun çözümüne bir yaklaşım getirebiliriz. Burada, ayrıntılandırmada karşılaşılabacak olan adımların çok kapsamlı olacağını ön çalışmalar sonucunda anlaşılması olmasından dolayı, çalışmayı bir yüksek lisans tezi düzeyinde sınırlayacak bir kapsamda tutabilmek için, bu çalışmada yalnızca aşkın yüzeyi betimleyen ağırlık fonksiyonunun YBMG açılımının gerçekleştirilmesi amaçlanmıştır. Bulguların GYBMG aracılığıyla İkinci Dereceden Programlama sorunlarına uygulanması ileride gerçekleştirilecek başka çalışmalara bırakılmaktadır.

SUMMARY

In this work, our main aim is to expand the weight function to High Dimensional Model Representation (HDMR) for its further utilization in Generalized High Dimensional Model Representation (GHDMR) which is a high dimensional model representation method that the weight function can be taken in general form. To achieve our purpose we proceed the steps which are based on a translation and hyperrotation in hyperspace. Our purpose in this approach is to reduce the numbers of integrals in the evaluation of HDMR terms in such a way that the number of integrations become independent of the number of variables.

In Quadratic Programming Problems, we look for the solution of problem in a hypersurface (hyperregion). This region is described by a quadratic form and it has not a separable orthogonal geometry. The nonorthogonal structure of this geometry disables us to directly use an HDMR expansion. So, we can use GHDMR for solving this problem. However, this approach, in total, is too comprehensive for our study here. In this work we intend to expand the weight function described by a hypersurface into HDMR. Our findings can be later applied via GHDMR in a more rigorous and detailed manner.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Amacı

Çok sayıda bağımsız değişkeni olan fonksiyonların incelenmesi ve işlenmesi, örneğin integralinin belirlenmesi gibi işlemlere sokulması, bağımsız değişken sayısının sonsuza doğru bir büyüme eğilimi göstermesi durumunda, fonksiyon yapısında kolaylık sağlayıcı birtakım özellikler olmadıkça, büyük zorluklar getirir. Bundan dolayı, bilim adamları, sorunu daha düşük boyutta parçalara ayıran bir yaklaşımla model bulmakla ilgilenmeye başladılar. Bu yöndeki ilk yaklaşım 20. yüzyılın ilk yarısında Sobol[1] tarafından geliştirildi. Onun asıl amacı bazı istatistiksel uygulamalardır. Sobol'un açılımı Rabitz tarafından yeniden ele alındı ve geliştirildi. Bu yöntem Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (YBMG)[2] olarak bilinir. Bu konuda son iki yıldır da İTÜ Bilişim Enstitüsü'nde Demiralp[8,9] grubu çalışmalar yapmaktadır.

YBMG'indeki en önemli kısıtlamalardan biri toplamsallıktır. İlgilenilen yapı toplamsal değilse YBMG'nden daha az sayıda terim alınarak oluşturulan kesme yaklaşımları sayısal olarak yeterli duyarlılık sağlayamayabilir. Bu nedenle YBMG açılımına dayandırılan yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Çarpımsallaştırılmış Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (ÇYBMG)[5] diye adlandırılan bu yöntem sayesinde bu sorun büyük ölçüde giderilmiş ve yapısında etkin bir çarpımsallık bulunan fonksiyonların yaklaşımlarında çok az sayıda terimle bile iyi sayısal sonuçlar elde edilebileceği gösterilmiştir.

Tam olarak ne toplamsal ne de çarpımsal olan fonksiyonların etkin olarak yakınsayabileceği olan bir yöntem de Melez Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (MYBMG) ya da İngilizce olarak Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMR) adı altında geliştirilmektedir[10].

YBMG'indeki diğer bir kısıtlama ise ağırlık olarak bağımsız bir değişkenli çarpanlardan oluşturulan çarpımsal fonksiyonlar kullanma zorunluluğudur. Bu bağlamda, ağırlık fonksiyonunun en genel yapıda alınabildiği Genelleştirilmiş Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (GYBMG) ya da İngilizce olarak Generalized High Dimensional Model Representation (GHDMR) adı altında bir yöntem

geliştirilmiş bulunmaktadır[6]. Bu yöntem çok değişkenli olan ama çarpımsal yapıda olması gerekmeyen ağırlık fonksiyonunu yardımcı bir çarpımsal ağırlık fonksiyonu aracılığıyla sıradan YBMG'ine açmaya dayandırılmaktadır.

Uygulamada, özellikle İkinci Dereceden Programlama alanında karşılaşılan problemlerde ilgilenilen sorunun çözümünün arandığı aşkınyöre düzgün olmayan çokyüzlülerle tanımlanırlar. Bu sorunlarda bağımsız değişken sayısı çok yüksek olduğundan YBMG uygulanımına çok uygun niteliktedirler. Ancak, kısıtın betimlediği aşkınyüzeyin diklik ya da çarpımsallık özelliklerini genellikle taşımaz olması sıradan YBMG kullanımına olanak vermez. Ama GYBMG ile sorunun çözümüne bir yaklaşım getirmek mümkündür. Bu eylem ilke olarak olanaklıysa da ayrıntılandırmada karşılaşılabilecek olan adımların çok kapsamlı olacağıın ön çalışmalar sonunda anlaşılması, çalışmayı bir yüksek lisans tezi düzeyinde sınırlayacak bir kapsamda tutabilmek için, bu çalışmada yalnızca, burada sözü edilen **aşkınyüzeyi betimleyen ağırlık fonksiyonunun YBMG açılımının gerçekleştirilmesi** amaçlanmaktadır. Bulguların GYBMG aracılığıyla İkinci Dereceden Programlama sorunlarına uygulanması ileride gerçekleştirilecek başka çalışmalara bırakılmaktadır.

1.2 Tezdeki Sunum Düzeni

Bu çalışmada amaca yönelik olarak atılan adımlarda izlenmek istenen yol, aşkınzayda aşkındönmelere dayandırılan bir belirleme yordamıdır. Bu yaklaşım, ağırlık fonksiyonunun tüm bileşenleri için başarılı olmuş, tümlevleme sayısında büyük ölçüde indirgeme sağlanabilmiştir.

Tez, bu giriş bölümünü izleyen ve özgün çıkarımların verildiği yapıda düzenlenmiştir. Son iki bölümde ise somut sonuçların sunumu ve ileride bu çalışmalarla ilgili neler yapılabileceği konusunda öngörüler verilmiştir. Giriş Bölümü'nün bundan sonraki kesiminde ise bu çalışmada yararlanılan bilgiler yeterli düzeyde verilmektedir.

1.3 Dik Dönme Matrisleri

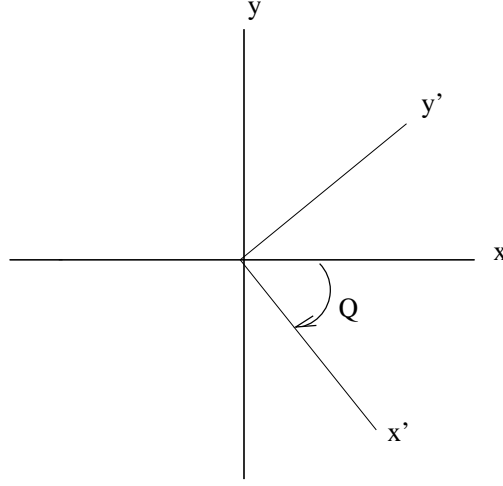
Bir vektör ya da koordinat sistemi sabit bir nokta etrafında belli bir açıyla döndürülebilir[16]. Dönmeler, dönme matrisleri kullanılarak uygulanır. Kullanılan bu dönme matrisleri dik matrislerdir.

\mathbf{R} dik bir dönme matrisi olsun. O halde,

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad (1.1)$$

eşitliğini yazabiliriz. Devriğin tanımı

$$\mathbf{R}_{ab}^T = \mathbf{R}_{ba} \quad (1.2)$$



Şekil 1.1: Eksen takımı dönmesi

şeklinde verilebilir. (1.1) eşitliğindeki ilişkinin tanımından ve aşağıdaki determinant özelliklerinden,

$$1 = \text{Det}(I) = \text{Det}(\mathbf{R}^T \mathbf{R}) = \text{Det}(\mathbf{R}) \text{Det}(\mathbf{R}^T) = \text{Det}(\mathbf{R}) \text{Det}(\mathbf{R}) = (\text{Det}(\mathbf{R}))^2 \quad (1.3)$$

eşitlikleri yazılabilir ve artı kök alınarak $\text{Det}(\mathbf{R}) = 1$ olur.

2 boyutta bir dönme göz önüne alalım. Şekil (1.1) $\theta > 0$ olacak şekilde bir koordinat dönmesini gösteriyor. Dönme işlemi bir koordinat sisteminin ya da bir vektörün dönmesi olarak düşünülebilir. Öncelikle vektör ve koordinat dönmelerini ayırt etmeye gereksinimimiz var. Örneğin, eğer bir koordinat sistemini $\theta = 45^\circ$ açıyla saat yönünde döndürürsek, eski vektör,

$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \quad (1.4)$$

yeni vektör,

$$\tilde{\mathbf{r}}' = y' \quad (1.5)$$

eşitliğine dönüşür. Örnek olarak bir vektörü $\theta = 45^\circ$ saat yönünde döndürdüğümüzde, eski vektör,

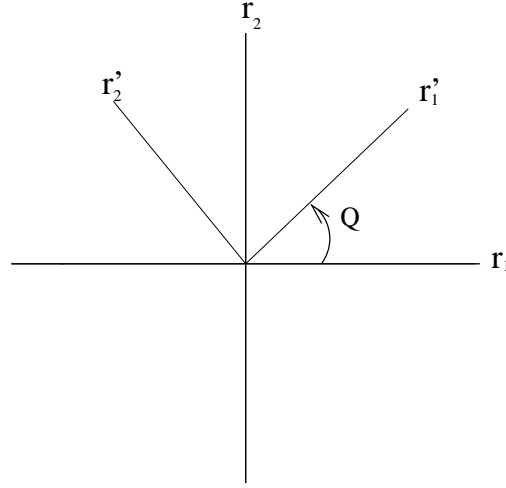
$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \quad (1.6)$$

yeni vektör,

$$\tilde{\mathbf{r}}' = y \quad (1.7)$$

olur.

Şimdi de 2 boyutta bir dönmeyi örnek alarak, \mathbf{R} dönme matrisini bulmaya çalışalım. Burada saat yönünde bir dönme yapacağız. Bu nedenle θ açısı artı alınır.



Şekil 1.2: Birim vektörlerin dönmesi

İlk olarak $\mathbf{R}x$, $\mathbf{R}y$ görüntü vektörlerini bularak işe başlayacağız ve daha sonra bunları orjinal vektörlerimiz cinsinden yeniden ifade edeceğiz. Böylece,

$$\begin{aligned} x' &= Rx = R_{11}x + R_{21}y = \text{Cos}\theta x - \text{Sin}\theta y \\ y' &= Ry = R_{12}x + R_{22}y = \text{Sin}\theta x + \text{Cos}\theta y \end{aligned} \quad (1.8)$$

eşitlikleri bulunur. Buradaki katsayılar şekil (1.2)'den çıkarılabilir. Sonuç olarak,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \text{Cos}\theta & -\text{Sin}\theta \\ \text{Sin}\theta & \text{Cos}\theta \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

olacak şekilde dönme matrisi bulunur. Burada saat yönünün tersinde bir dönme yapsaydık \mathbf{R} dönme matrisi,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \text{Cos}\theta & \text{Sin}\theta \\ -\text{Sin}\theta & \text{Cos}\theta \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

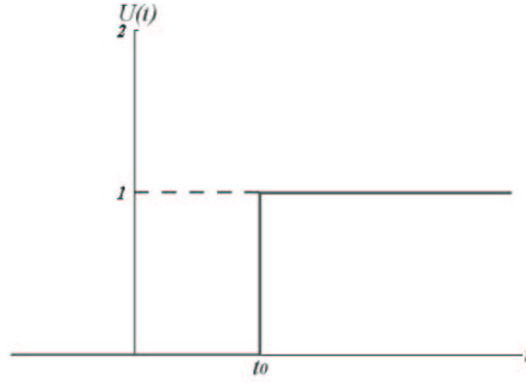
şeklinde bulunmaktadır.

Bu çalışmada, aşkındönme aracılığıyla ikinci dereceden bir aşkınyüzeyin betimlemesinde kullanılan ağırlık fonksiyonu YBMG' ine açılmıştır. Burada ağırlık fonksiyonu, parametreleri ikinci dereceden yapı, doğrusal yapı ve sabitten oluşan birim basamak fonksiyonudur [Ekler A].

Birim basamak fonksiyonu, değeri isteğe bağımlı olarak seçilebilen bir artı t_0 değeri için,

$$U(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

şeklinde gösterilir ve birim basamak fonksiyonu ya da Heaviside fonksiyonu olarak da adlandırılır (Bilimsel yazında, Birim Basamak ve Heaviside fonksiyonları



Şekil 1.3: Birim Basamak Fonksiyonu

arasında küçük bir farklılık olarak fonksiyonların $t = t_0$ için aldıkları değer 1 ve 0 olarak alınır).

Birim basamak fonksiyonu ile tanımlanan bu ağırlık fonksiyonu aşkın uzayda ikinci dereceden bir aşkinyüzey oluşturur. Böylece fonksiyonun, aşkinyüzeyin oluşturduğu bölge içerisinde ve yüzeyin üzerinde 1, tüm uzayın geri kalan kesiminde 0 olduğu varsayılacak ve bu fonksiyon YBMG'ine açılacaktır. Böylelikle YBMG'inin tüm uzayda tanımlanması sağlanmış yani düzgün ya da dik olmayan geometri düzgün bir geometri içine gömülerek yola çıkmıştır.

1.4 İkinci Dereceden Yüzeyler

İkinci dereceden (quadric) bir yüzeyin genel eşitliği[15],

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2px + 2qy + 2rz + d = 0 \quad (1.12)$$

şeklinde verilebilir.

İkinci dereceden yüzeylerin 17 tane standart yapısı var. Aşağıda bu yapılardan üç tanesine şekilleriyle [Ekler E] birlikte örnek verilmektedir.

Eliptik paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (1.13)$$

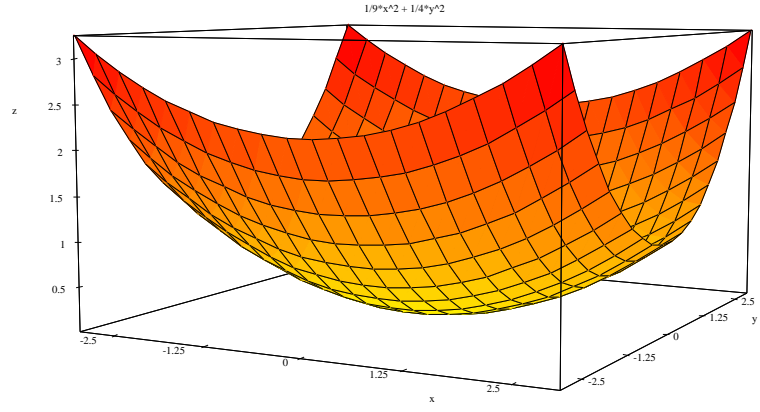
Hiperbolik Paraboloid

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \quad (1.14)$$

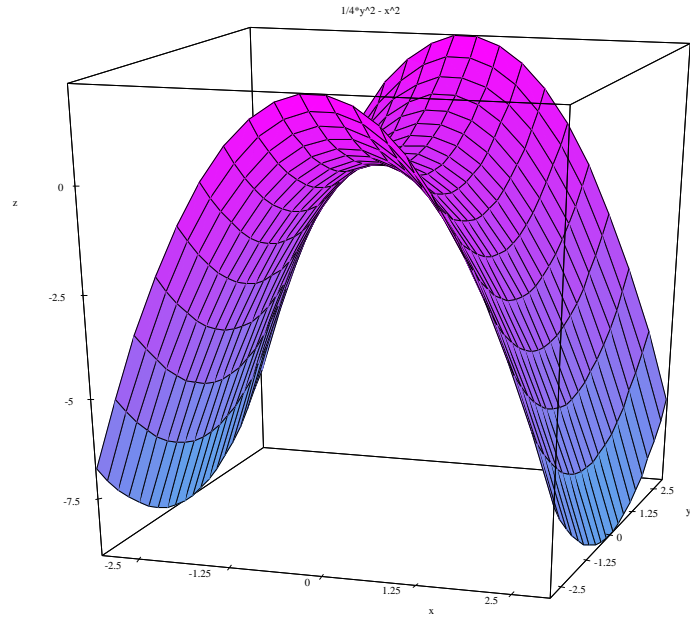
Elipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.15)$$

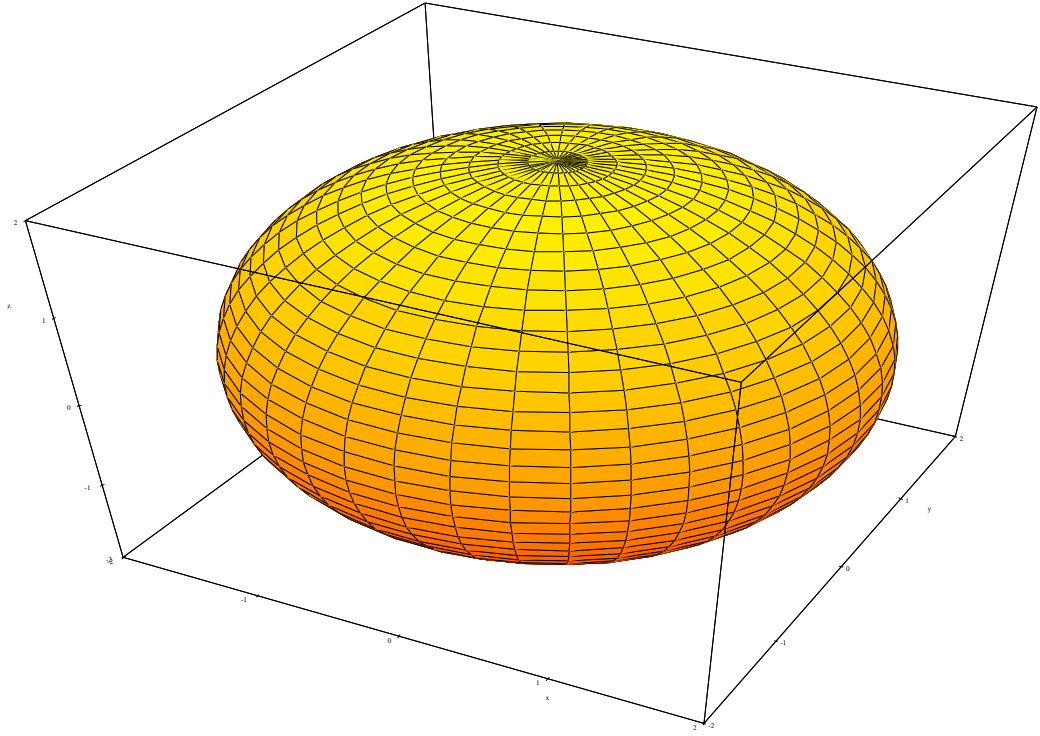
Bu çalışmada, birim basamak fonksiyonu aracılığıyla betimlenen ikinci dereceden yüzey, YBMG bileşenlerinin belirlenmesinde doğrusal yapıya oranla büyük zorluklar getirir. Ancak doğrusal yapı kullandığımızda N boyutlu uzayda kapalı bir bölge oluşturmak için N+1 tane aşkındüzleme gereksinim bulunmaktadır. Bu durum N değerinin çok büyümesi durumunda büyük zorluklar getirir. Bu nedenle doğrusal yüzeylerle çalışıldığında bölgeyi tamamen kapalı seçmek akılcı bir uygulama değildir. Oysa ikinci dereceden yapı kullandığımızda uygun yüzeyler seçerek (örneğin elipsoid) tek bir yüzeyle bile bölgeyi tamamen kapatabiliriz.



Şekil 1.4: 3 boyutta eliptik paraboloid



Şekil 1.5: 3 boyutta hiperbolik paraboloid



Şekil 1.6: 3 boyutta elipsoyid

BÖLÜM 2

YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM

Uygulamalı bilimlerdeki problemlerin büyük bir çoğunluğu yüzlerce değerden oluşmuş fonksiyonlara bağlıdır. Mühendislik problemlerindeki matematiksel formüller bize bunun gibi fonksiyonları verir. Çok değişkenli fonksiyonlar, onların argümanlarının sayısı sonsuza doğru gittiğinde, fonksiyon yapısında kolaylık sağlayıcı birtakım özellikler olmadıkça büyük zorluklar getirir. Burada, bazı sayısal uygulamaların içinde metodolojik (yöntembilimsel) problemler ortaya çıkabilir. Bu nedenle, yüksek boyuta sahip problemleri daha düşük boyutta parçalara ayıran bir yaklaşımla model bulmak önemli olabilir. Bir başka deyimle, yüksek boyuttaki fonksiyonel yapıyı daha az sayıda bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlara ayırarak toplamsal bir yapı elde edebiliriz. Bu bir böl ve yönet felsefesidir. Bu formül, 20. yüzyılın ilk yarısında Sobol[3] tarafından geliştirildi ve bazı istatistiksel uygulamalarda kullanıldı. Sobol'un açılımı Rabitz[2] tarafından çeşitli problemlere uygulanarak yeniden ele alındı ve genelleştirildi. Bu yöntem yüksek boyutlu model gösterilim olarak bilinir[1-11].

$f(x_1, \dots, x_N)$ şeklinde gösterilen ve x_1, \dots, x_N ile simgelenen N bağımsız değişkene bağlı bir çok değişkenli fonksiyonun dik bileşenlere ayrılması için yazılması gereken denklem aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_N) = & f_0 + \sum_{i_1=1}^N f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \\ & + \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=1 \\ i_1 < i_2 < i_3}}^N f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) + \dots + f_N(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Burada ilk bileşenin f_0 ile simgelenen bir değişmez olduğu, daha sonraki ilk N bileşenin $f_1(x_1), \dots, f_N(x_N)$ şeklinde simgelenen ve bir tek bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlar olduğu, daha sonraki ilk $\frac{N(N-1)}{2}$ bileşenin $f_{1,2}(x_1, x_2), \dots, f_{1,N}(x_1, x_N), f_{2,3}(x_2, x_3), \dots, f_{2,N}(x_2, x_N), f_{3,4}(x_3, x_4), \dots, f_{3,N}(x_3, x_N), \dots, f_{N-1,N}(x_{N-1}, x_N)$ ile simgelenen ve sadece iki bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlar olduğu ve diğer bileşenlerin de bu şekilde, gittikçe artan sayıda, bağımsız değişken içeren fonksiyonlardan oluştuğu ve bu fonksiyonların hepsinin

birbirine dik olduğu varsayımıyla yola çıkılmaktadır. (2.1) numaralı denklemin sağ tarafındaki fonksiyonlar, ele alınan fonksiyonun dik (orthogonal) ayrıştırılmış bileşenleridir ve aşağıdaki koşulları sağlamaktadır.

$$\begin{aligned} (f_{i_1, i_2, \dots, i_k}, f_{i_1, i_2, \dots, i_l}) &= 0 \\ \{i_1, i_2, \dots, i_k\} &\neq \{i_1, i_2, \dots, i_l\}, \quad 1 \leq k, l \leq N \end{aligned} \quad (2.2)$$

Diklik koşulu bir iççarpım üzerinden tanımlanmakta ve gerek $f(x_1, \dots, x_N)$ fonksiyonunun gerekse bileşen fonksiyonların karesi integrale edilebilen fonksiyonlar olduğu varsayılmaktadır. Kare integraller ve iççarpım bağımsız değişkenlerin baştan saptanan belli bir aralığı üzerinde tanımlanmakta ve her bir değişken için o değişkene bağlı olarak verilen bir ağırlık fonksiyonu kullanılmaktadır. Dolayısıyla, karesi integrale edilebilen ve $u(x_1, \dots, x_N)$ ve $v(x_1, \dots, x_N)$ şeklinde simgelenen herhangi iki fonksiyon için iççarpım

$$(u, v) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_N) u(x_1, \dots, x_N) v(x_1, \dots, x_N) \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

(2.3)'deki denklikte kullanılan ağırlık fonksiyonu

$$W(x_1, \dots, x_N) = W_1(x_1) \dots W_N(x_N) \quad (2.4)$$

şeklinde çarpımsal bir yapıda seçilmektedir.

(2.3)'de sözü edilen bileşenlerin kolayca saptanabilmesi için, ağırlık fonksiyonlarının her birinin ilgili aralık üzerindeki integralinin 1 olduğu yani

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) = 1 \quad (2.5)$$

eşitliğinin geçerli olduğu varsayılmaktadır. Bu ağırlık fonksiyonu ile ele alınan fonksiyon (2.2) bağıntısının özel durumu da gözönüne alınırsa (2.1)'deki eşitlik gösterilebilmektedir.

$f(x_1, \dots, x_N)$ fonksiyonunun dik bileşenlere ayrılması için yazılması gereken eşitliğin sağ yanındaki büyüklüklerin her birinin belirlenmesi için bir takım izdüşüm operatörlerinden yararlanabiliriz.

\mathcal{I}_0 Operatörü

Değişkenlerin aralıkları üzerinde karesi integrale edilebilir herhangi bir $F(x_1, \dots, x_N)$ fonksiyonu için

$$\mathcal{I}_0 F(x_1, \dots, x_N) = \int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) F(x_1, \dots, x_N) \quad (1 \leq i \leq N) \quad (2.6)$$

eşitliği yazılabilir.

O halde, \mathcal{I}_0 operatörünü (2.1) eşitliğinin her iki yanına uygularsak

$$\mathcal{I}_0 f(x_1, \dots, x_N) = \mathcal{I}_0 f_0 + \sum_{i_1=1}^N \mathcal{I}_0 f_{i_1}(x_{i_1}) + \dots \quad (2.7)$$

$$\mathcal{I}_0 f(x_1, \dots, x_N) = f_0 \quad (2.8)$$

eşitliğinde görüldüğü gibi değişmez terimi elde ederiz.

\mathcal{I}_j Operatörü

\mathcal{I}_j operatörünü $F(x_1, \dots, x_N)$ fonksiyonu üzerine uyguladığımızda

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j F(x_1, \dots, x_N) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} dx_{j-1} W_{j-1}(x_{j-1}) \\ &\int_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} dx_{j+1} W_{j+1}(x_{j+1}) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) F(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (2.9)$$

eşitliğini yazabiliriz.

\mathcal{I}_j operatörünü (2.1)'in her iki yanına uyguladığımızda ise

$$\mathcal{I}_j f(x_1, \dots, x_N) = \mathcal{I}_j f_0 + \sum_{i_1=1}^N \mathcal{I}_j f_{i_1}(x_{i_1}) + \dots = f_0 + f_j(x_j) \quad (2.10)$$

$$f_j(x_j) = \mathcal{I}_j f(x_1, \dots, x_N) - f_0 \quad (1 \leq j \leq N) \quad (2.11)$$

eşitliklerinde de görüldüğü gibi bir bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlar bulunabilir.

$\mathcal{I}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ Operatörü

Bu operatör de fonksiyonu, x_{i_1}, \dots, x_{i_p} değişkenlerini dışlayarak ağırlık fonksiyonuyla çarpıp diğer tüm değişkenler üzerinden integre etmeyi temsil ediyor.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{i_1 i_2 \dots i_p} F(x_1, \dots, x_N) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_{i_1-1}}^{b_{i_1-1}} dx_{i_1-1} W_{i_1-1}(x_{i_1-1}) \\ &\times \int_{a_{i_1+1}}^{b_{i_1+1}} dx_{i_1+1} W_{i_1+1}(x_{i_1+1}) \dots \int_{a_{i_p-1}}^{b_{i_p-1}} dx_{i_p-1} W_{i_p-1}(x_{i_p-1}) \\ &\times \int_{a_{i_p+1}}^{b_{i_p+1}} dx_{i_p+1} W_{i_p+1}(x_{i_p+1}) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) F(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Bu operatörü (2.1)'in her iki yanına uygularsak

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{i_1 i_2 \dots i_p} f(x_1, \dots, x_N) &= \mathcal{I}_{i_1 i_2 \dots i_p} f_0 + \sum_{i_1=1}^N \mathcal{I}_{i_1 i_2 \dots i_p} f_{i_1}(x_{i_1}) + \dots \\
&= f_0 + f_{i_1}(x_{i_1}) + \dots + f_{i_p}(x_{i_p}) + f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + f_{i_{p-1} i_p}(x_{i_{p-1}}, x_{i_p}) \\
&\quad + f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) + \dots + f_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_{i_p}) \quad (2.13)
\end{aligned}$$

eşitliğini yazıp, x_{i_1}, \dots, x_{i_p} bağımsız değişkenlerine bağlı fonksiyonu bulabiliriz.

Buraya kadar yapılan incelemeler (2.1) bağıntısı ile verilen toplamsal açılımın terimlerinin toplam boya katkıları ölçülerek toplamsal yapıdan nasıl bir yaklaşımla çizimi üretilebileceği hakkında düşün verir[7]. Eğer (2.1) bağıntısı dikkatlice incelenecek olursa sağ yandaki toplamsal açılımın içerdiği toplam terim sayısının 2^N olduğu ortaya çıkar. Dolayısıyla, (2.1) açılımı, her ne kadar dik açılım da olsa, sonsuz değil sonlu sayıda terim içerir. Yine de bu sonlu terim sayısı N değişkeninin yani bağımsız değişken sayısının çok büyük (100 ya da 1000 gibi, bazı durumlarda daha da büyük değerlerle karşılaşılabilmektedir) olması durumunda uygulanabilirlik ya da kullanılabilirlik özelliğini önemli ölçüde yitirebilmektedir. Dolayısıyla, bu toplamsal açılmadan kesmeler yani baştan başlayarak sıra ile yalnızca belli kesimin gözönüne alınması geri kalan kesimin ise gözardı edilerek bir yaklaşımla üretilmesi uygulama açısından büyük önem kazanmaktadır. Bu önemin bir başka nedeni de, açılmadaki ilk terimin değişmez (sabit) olmasıdır. Değişmez fonksiyonun incelemelerde son derece büyük kolaylık getireceği açıktır. Yalnızca değişmezle yani f_0 ile yetinilmemesi durumunda hemen ardından gelen $f_i(x_i)$ şeklinde bir bağımsız değişkenli fonksiyonlar da içerilip geriye kalanlar dışlanarak daha duyarlıklı başka bir yaklaşımla getirilebilir. Bu durumun da aşırı büyük zorluklar getirmediği düşünülebilir. Çünkü, eninde sonunda, tek bağımsız değişkenli fonksiyonlar üzerinde yapılacak işlemlerin analitik olarak gerçekleştirilebilmesi söz konusu olmasa bile sayısal yaklaşımlarla pekâlâ başarılabilir. Bunun nedeni bu doğrultuda bilim dünyasında büyük bilgi birikimi olması ve bilişim aygıtlarının donanımsal ve yazılımsal yeteneklerinin bu konuda yeterince etkin durumda bulunmasıdır. Benzer durum, gittikçe azalan düzeyde olmakla birlikte iki ve üç bağımsız değişkenli fonksiyon içeren terimler için de geçerlidir. Bütün bu anlatılanlar, sağ yanda yapılan bir kesme ile oluşturulan toplamsal yaklaşımların boyunun (normunun) açılımı yapılan fonksiyonun yani karesinin $f(x_1, \dots, x_N)$ 'in boyunun karesine oranının bir tür toplamsallık ölçeni olarak düşünülebileceğini gösterir. Dolayısıyla, bu bağlamda, aşağıdaki tanımlar yapılabilir.

$$\sigma_0 \equiv \frac{\|f_0\|^2}{\|f\|^2} \quad (2.14a)$$

$$\sigma_1 \equiv \sigma_0 + \frac{\sum_{i=1}^N \|f_i\|^2}{\|f\|^2} \quad (2.14b)$$

$$\sigma_2 \equiv \sigma_1 + \frac{\sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \|f_{i_1, i_2}\|^2}{\|f\|^2} \quad (2.14c)$$

.....

Bu tanımlamalardan kolayca görülebileceği üzere σ_0 değişmez terimin yani f_0 büyüklüğünün tüm açılımdaki katkı düzeyini belirlemektedir. Gerek σ_0 ve gerekse diğer σ büyüklükleri 0 ile 1 arasında değer alabilmektedirler. $\sigma_0 = 1$ durumu ancak ve ancak $f(x_1, \dots, x_N)$ fonksiyonunun bir değişmez (sabit) olmasına karşılık gelir dolayısıyla, σ_0 büyüklüğünü Değişmezlik Ölçeni olarak adlandırmak yerinde olur. Benzer bir gözlem diğer σ büyüklüklerinin de aynı biçimde adlandırılabilirliğini gösterir. Yani, sözgelimi, σ_p en çok p bağımsız değişkenden oluşan fonksiyonları içerecek biçimde yapılacak bir toplamsal kesmenin tüm açılımdaki payını simgeler. Dolayısıyla, en genel biçimiyle, σ_p büyüklüğünü “ p . Basamaktan Toplamsallık Ölçeni” olarak adlandırabiliriz.

BÖLÜM 3

YBMG BİLEŞENLERİNİN AŞKINDÖNMELER ve KÜRESEL DEĞİŞKENLER KULLANILARAK BELİRLENMESİ

Bu çalışmada düzgün olmayan ikinci dereceden bir bölgede ağırlık fonksiyonunun Yüksek Boyutlu Model Gösterilimine açılımı incelendi. Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (YBMG), çok sayıda bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyonu, bir sabit, birtakım bir değişkenli, birtakım iki değişkenli ve bu şekilde devam ederek temel fonksiyonlara ayırır. Burada, YBMG bileşenlerinin değerlendirilmesinde ortaya çıkan çok katlı integraller parametresi ikinci dereceden yapı, doğrusal yapı ve sabitten oluşan birim basamak fonksiyonu içerir. Birim basamak fonksiyonu içerisindeki bu ikinci dereceden yapı, integrallerin hesaplanmasında doğrusal yapıya oranla daha büyük zorluklar getirir. Ancak ikinci dereceden yapı, uygun ikinci dereceden yüzeyler seçildiğinde bölgeyi tamamen kapatabilmemizi sağlar. Böylece hem kapalı hem yarı açık bölgeleri tek bir kısıt kullanarak YBMG'ine açabiliriz.

Değiştirgenlerinin $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$ şeklinde, bir ikinci dereceden yapı, bir doğrusal yapı, bir de sabitten oluştuğu varsayılmak üzere birim basamak fonksiyonu aracılığıyla ikinci dereceden bir bölge betimleyebiliriz.

$$\omega = U(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c) \quad (3.1)$$

Bu birim basamak fonksiyonunu YBMG'ye açmadan önce \mathbf{x} vektörü üzerinde α kadar öteleme yapalım.

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \alpha \quad (3.2)$$

$$\omega = U((\mathbf{y} + \alpha)^T \mathbf{A} (\mathbf{y} + \alpha) + \mathbf{b}^T (\mathbf{y} + \alpha) + c) \quad (3.3)$$

Birim basamak fonksiyonu içindeki yapı düzenlenirse aşağıda (3.4) eşitliğindeki gibi yazılabilir.

$$(\mathbf{y} + \alpha)^T \mathbf{A}(\mathbf{y} + \alpha) + \mathbf{b}^T(\mathbf{y} + \alpha) + c = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} + \alpha^T \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{A} \alpha + \alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \mathbf{y} + \mathbf{b}^T \alpha + c \quad (3.4)$$

Burada y bağımsız değişkeninin karesi ve sabitten oluşacak daha basit bir yapı elde etmek için aşağıdaki (3.5) eşitliğinin geçerli olduğunu varsayalım.

$$\alpha^T \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \mathbf{y} = 0 \quad (3.5)$$

Burada \mathbf{A} matrisi simetrik artı tanımlı bir matris olarak seçiliyor. Bu durumda $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ eşitliği geçerli olur ve (3.5)'teki eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} (2\alpha^T \mathbf{A} + \mathbf{b}^T) \mathbf{y} &= 0 \\ 2\alpha^T \mathbf{A} + \mathbf{b}^T &= 0 \\ \alpha^T &= -\frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Böylece α 'nın (3.6) eşitliğini sağlaması koşuluyla yukarıdaki (3.4) eşitliği aşağıdaki gibi gösterilir.

$$(\mathbf{y} + \alpha)^T \mathbf{A}(\mathbf{y} + \alpha) + \mathbf{b}^T(\mathbf{y} + \alpha) + c = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} + \alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c \quad (3.7)$$

Artık birim basamak fonksiyonunu aşağıdaki gibi y bağımsız değişkenlerinden ve sabitten oluşacak şekilde yazabiliriz.

$$\omega = U (\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) \quad (3.8)$$

Burada sadece bağımsız değişkenlerinin karesinden ve sabitten oluşacak bir yapı elde edersek fonksiyon, YBMG açılımına daha uygun bir duruma gelir.

λ_j , \mathbf{A} matrisinin özdeğeri, ξ_j de özvektörü ($j = 1, \dots, N$) olacak şekilde aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\mathbf{A} \xi_j = \lambda_j \xi_j \quad (3.9)$$

$$\mathbf{Q} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N] \quad \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \xi_1^T \\ \xi_2^T \\ \vdots \\ \xi_N^T \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

\mathbf{Q} , yukarıda gösterildiği gibi \mathbf{A} matrisinin özvektörlerinden oluşan dönme matrisi olacak şekilde koordinat sistemi üzerinde aşkındönme yapalım.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{z} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}^T \mathbf{A}\mathbf{y} &= (\mathbf{Q}\mathbf{z})^T \mathbf{A} (\mathbf{Q}\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}\mathbf{z} = \mathbf{z}^T \underbrace{\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}}_I \mathbf{z} \\
&= \mathbf{z}^T \mathbf{\Lambda}\mathbf{z} = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_N z_N^2 \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Bu durumda birim basamak fonksiyonunun argümanları aşağıdaki gibi değişir ve birim basamak fonksiyonu da z bağımsız değişkenlerini içerir.

$$\omega = U \left(\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_N z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A}\alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c) \right) \quad (3.12)$$

Elde edilen bu eşitlikte $z_i = \frac{z_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ ($1 \leq i \leq N$) değişken dönüşümünü yapalım.

$$\omega = U \left(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A}\alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c) \right) \quad (3.13)$$

Artık bu fonksiyonu YBMG'ine açabiliriz. Bu durumda, içinde çalıştığımız uzayın N boyutta olduğunu ve uzayı betimleyen bağımsız değişkenlerin z_1, \dots, z_N ile simgelandiğini söyleyebiliriz. Uzayın içinde oluşturduğumuz aşkınyüzeyin de (3.13)'te birim basamak fonksiyonunun argümanında yer alan yapıyla verildiğini söyleyebiliriz.

Fonksiyondaki, z_k değişkenlerinin her birinin $(-\infty, \infty)$ aralığında değiştiği yani bir gerçel değişken için en geniş aralığın gündemde olduğu düşünülmekte olduğundan, ilgili YBMG ağırlık fonksiyonuna, z_k 'nin sonsuza gitmesi durumunda sıfıra giden bir yapı vererek tümlevlemelerde daha iyi bir yakınsama sağlayabiliriz.

$$W_k(z_k) \equiv e^{-\mu z_k^2}, \quad 1 \leq k \leq N \quad (3.14)$$

Seçilen bu ağırlık fonksiyonunu birimboylulaştırmak için aşağıdaki adımları atarız.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz_k e^{-\mu z_k^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mu}} \quad (3.15)$$

$$W_k(z_k) = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu(z_k^2)} \quad 1 \leq k \leq N \quad (3.16)$$

Böylece YBMG'nin çarpımsal yapıdaki ağırlık fonksiyonu

$$W(z_1, \dots, z_N) \equiv W_1(z_1) \cdots W_N(z_N) = \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} \right)^N e^{-\mu(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2)} \quad (3.17)$$

eşitliğiyle gösterilebilir.

YBMG açılımını yapacağımız fonksiyon ve bu açılımı yapabilmemiz için gerekli ağırlık fonksiyonu da belirlendiğine göre artık YBMG bileşenlerini belirlemek için gerekli adımları atabiliriz.

3.1 Sıfıncı Basamaktan YBMG Yaklaşırımı

Sıfıncı basamaktan YBMG yaklaşırırımı yani değışmez terimi belirleyebilmek için \mathcal{I}_0 operatöründen yararlanabiliriz.

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}_0 U (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A}\alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) \\ &= \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} \right)^N \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_N dz_1 \dots dz_N e^{-\mu(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2)} \\ & \quad \times U (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A}\alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Bu yapıyı yazdıktan sonra buradaki N katlı integrali hesaplamaya çalışacağız.

$$I = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_N dz_1 \dots dz_N e^{-\mu(z_1^2 + \dots + z_N^2)} U(z_1^2 + \dots + z_N^2 + \alpha^T \mathbf{A}\alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c) \quad (3.19)$$

Burada, aşkinküresel değışkenlere dönüşüm yaparsak [Ekler B] integral daha kolay hesaplanır duruma gelir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \underbrace{\int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi}}_{N-2} \int_0^{2\pi} e^{-\mu r^2} U(r^2 + \alpha^T \mathbf{A}\alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c) \\ & \quad \times r^{N-1} \text{Sin}^{N-2} \theta_1 \text{Sin}^{N-3} \theta_2 \dots \text{Sin} \theta_{N-2} d\theta_{N-1} d\theta_{N-2} \dots d\theta_1 dr \end{aligned} \quad (3.20)$$

yazabiliriz. Eşitliğı düzenlersek,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} dr r^{N-1} e^{-\mu r^2} U(r^2 + \alpha^T \mathbf{A}\alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c) \int_0^{2\pi} d\theta_{N-1} \times \\ & \quad \times \int_0^{\pi} d\theta_1 \text{Sin}^{N-2} \theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \text{Sin}^{N-3} \theta_2 \dots \int_0^{\pi} d\theta_{N-2} \text{Sin} \theta_{N-2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

yapıyı elde ederiz. Artık integral daha rahat hesaplanabilir duruma gelmiştir.

$$\int_0^{2\pi} d\theta_{N-1} = 2\pi \quad (3.22)$$

Sinüs trigonometrik fonksiyonunu içeren integralleri hesaplayabilmek için Beta fonksiyonundan [Ekler C] yararlanacağız. Beta fonksiyonu için genel trigonometrik form,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}^n x \text{Cos}^m x dx = \frac{1}{2} B \left(\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}(m+1) \right) \quad (3.23)$$

şeklinde verilebilir. Burada $m = 0$ yazılırsa, aşğıdaki eşitlik geçerli olur.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}^n x dx = \frac{1}{2} B \left(\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2} \right) \quad (3.24)$$

Hesaplamak istediğimiz sinüs fonksiyonunu içeren integraller $[0, \pi]$ aralığındaydı. Bu durumda,

$$\int_0^{\pi} \text{Sin}^m \theta d\theta = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}^m \theta d\theta}_{\frac{1}{2}B(\frac{1}{2}(m+1), \frac{1}{2})} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{Sin}^m \theta d\theta \quad (3.25)$$

eşitliğini yazıp $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{Sin}^m \theta d\theta$ integralini hesaplamak için de $\theta = \theta + \frac{\pi}{2}$ dönüşümü yaparsak,

$$\text{Sin}^m \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \left[\text{Sin} \theta \text{Cos} \frac{\pi}{2} + \text{Cos} \theta \text{Sin} \frac{\pi}{2} \right]^m \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{Sin}^m \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}^m \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{Cos} \theta)^m d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^m \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} B \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(m+1) \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \text{Sin}^m \theta d\theta &= \frac{1}{2} B \left(\frac{1}{2}(m+1), \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} B \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(m+1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\Gamma \left(\frac{1}{2}(m+1) \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2}(m+1) + \frac{1}{2} \right)} + \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2}(m+1) \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(m+1) \right)} \right] \\ &= \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2}(m+1) \right)}{\Gamma \left(\frac{m}{2} + 1 \right)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Böylece sinüs trigonometrik fonksiyonunu içeren N-2 katlı integral aşağıdaki şekilde hesaplanmış olur.

$$\int_0^{\pi} d\theta_1 \text{Sin}^{N-2} \theta_1 \dots \int_0^{\pi} d\theta_{N-2} \text{Sin} \theta_{N-2} = \prod_{m=1}^{N-2} \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2}(m+1) \right)}{\Gamma \left(\frac{m}{2} + 1 \right)} \quad (3.29)$$

Bu bilgilerin ışığı altında I integralini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$I = 2\pi \prod_{m=1}^{N-2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(m+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} \int_0^\infty e^{-\mu r^2} r^{N-1} U(r^2 + \alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c) dr \quad (3.30)$$

Gamma fonksiyonunun genel eşitliğini aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad x > 0 \quad (3.31)$$

Eşitlik (3.29)'da gamma fonksiyonu içeren yapıyı düzenlemek için bu eşitlikten yararlanabiliriz.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \quad \frac{1}{2} > 0 \quad (3.32)$$

$t = v^2$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty v^{-1} e^{-v^2} 2v dv \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-v^2} dv \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (3.33)$$

değerini elde ederiz. Bu durumda (3.29)'daki gamma fonksiyonu içeren yapıyı aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\prod_{m=1}^{N-2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(m+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = (\sqrt{\pi})^{N-2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \quad (3.34)$$

Eşitlik (3.29)'u (3.30)'da yerine koyalım.

$$I = 2\pi (\sqrt{\pi})^{N-2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\mu r^2} r^{N-1} U(r^2 + \alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c) dr \quad (3.35)$$

Artık (3.34)'teki r değışkenine bağılı integrali hesaplırsak tüm tümlevleri hesaplamış olur ve YBMG değışmez terimini elde ederiz.

Eşitlik (3.34)'te, birim basamak fonksiyonunun argümanında yer alan sabiti, α 'yı yerine koyarak yeniden düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c &= \left(-\frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \right) \mathbf{A} \left((\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \\
&+ \mathbf{b}^T \left((\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) + c \\
&= \frac{1}{4} \mathbf{b}^T \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}}_I (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - \frac{1}{2} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} + c \\
&= -\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} + c
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Elde edilen bu değeri de yerine koyduktan sonra

$$\int_0^\infty e^{-\mu r^2} r^{N-1} U\left(r^2 - \frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} + c\right) dr =? \tag{3.37}$$

sorusuna yanıt arayabiliriz. Bu integrali hesaplayabilmek için iki ayrı irdeleme yapmamız gerekiyor. Birim basamak fonksiyonu içindeki $-\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} + c$ sabit teriminin sıfırdan büyük ya da küçük olmasına göre iki durumda inceleme yapacağız.

1. irdeleme

$$-\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} + c \geq 0$$

$U\left(r^2 - \frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} + c\right)$ birim basamak fonksiyonu 1, integral sınırları da $[0, \infty)$ alınabilir.

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-\mu r^2} r^{N-1} dr \tag{3.38}$$

$r = \frac{r}{\sqrt{\mu}}$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$I_1 = \frac{1}{(\sqrt{\mu})^N} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{N-1} dr \tag{3.39}$$

eşitliği elde edilir. Bu integrali hesaplayabilmek için gamma fonksiyonundan yararlanabiliriz.

$$\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{N}{2}-1} dt \tag{3.40}$$

yazabiliriz. Burada $t = r^2$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2\left(\frac{N}{2}-1\right)} 2r dr = 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{N-1} dr \tag{3.41}$$

eşitliği elde edilir.

$$I_1 = \frac{1}{(\sqrt{\mu})^N} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{N-1} dr = \frac{1}{(\sqrt{\mu})^N} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{2} \tag{3.42}$$

Elde edilen bu bağıntı sırasıyla (3.34) ve değişmez terim için yazdığımız (3.17) eşitliklerinde yerine koyulursa

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}_0 U (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) \\ &= \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} \right) 2\pi (\sqrt{\pi})^{N-2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^N} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{2} \end{aligned} \quad (3.43)$$

eşitliğinde de görüldüğü gibi tüm terimler birbirini götürür ve sabit terim 1 olarak elde edilir. Bu durum aslında oldukça doğaldır. $-\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} + c \geq 0$ durumunda uzayda birim basamak fonksiyonu ile betimlediğimiz aşkinkürenin yarıçapı kompleks değer alır. Bu durumun matematiksel olarak bir anlamı olsa da fiziksel olarak yoktur. Bu nedenle incelemelerimizi $-\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} + c < 0$ durumu için gerçekleştireceğiz.

2. irdeleme

$$-\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} + c < 0$$

Bu durumda integrasyon sınırları aşağıdaki incelemeler doğrultusunda değişecektir.

$$r^2 - \frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} + c \geq 0 \quad (3.44)$$

$$r^2 \geq \frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c \Rightarrow r \geq \sqrt{\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c} \quad (3.45)$$

Eşitlik (3.36)'daki integral,

$$I_1 = \int_{\sqrt{\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c}}^{\infty} e^{-\mu r^2} r^{N-1} dr \quad (3.46)$$

şeklinde yazılır. Bu integralin hesaplanması sonucunda N sayısının tek ya da çift olmasına göre iki farklı sonuç elde ederiz.

a. N sayısının çift olma durumu

$$I_1 = \int_{\sqrt{\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c}}^{\infty} e^{-\mu r^2} r^{N-1} dr \quad (3.47)$$

Bu integral üzerinde $r = \frac{x}{\sqrt{\mu}}$ değişken dönüşümü yaparsak integral

$$I_1 = \frac{1}{(\sqrt{\mu})^N} \int_{\sqrt{\mu(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c)}}^{\infty} e^{-x^2} x^{N-2} dx \quad (3.48)$$

şeklinde yazılabilir. Bu integral için kısmi integrasyon uygulayalım.

$$\begin{aligned} u &= r^{N-2} & du &= (N-2)r^{N-3}dr \\ dv &= re^{-r^2}dr & v &= \frac{e^{-r^2}}{-2} \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{(\sqrt{\mu})^N} \left(r^{N-2} \frac{e^{-r^2}}{-2} \Big|_{\left(\sqrt{\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)}\right)}^{\infty} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\sqrt{\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)}}^{\infty} \frac{e^{-r^2}}{-2} (N-2)r^{N-3}dr \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{(\sqrt{\mu})^N} \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)} \right)^{N-2} e^{-\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{N-2}{2} \left[\int_{\sqrt{\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)}}^{\infty} r^{N-4}re^{-r^2}dr \right] \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Yukarıdaki eşitlik içindeki integral ifadesi için de kısmi integrasyon uyguladığımızda adımlar arasında özyleneleli bir ilişki bulup integral için genel bir eşitlik yazabiliriz.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(\sqrt{\mu})^N} \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)} \right)^{N-2} e^{-\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{N-2}{2} \left(\sqrt{\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)} \right)^{N-4} e^{-\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{N-2}{2} \frac{N-4}{2} \left(\sqrt{\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)} \right)^{N-6} e^{-\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)} + \dots \\ &+ \frac{1}{2} \frac{N-2}{2} \frac{N-4}{2} \frac{N-6}{2} \dots \frac{6}{2} \frac{4}{2} \left(\sqrt{\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)} \right)^2 e^{-\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)} \\ &+ \frac{N-2}{2} \frac{N-4}{2} \frac{N-6}{2} \dots \frac{6}{2} \frac{4}{2} \int_{\sqrt{\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)}}^{\infty} re^{-r^2}dr \Big) \end{aligned} \quad (3.52)$$

$\int_{\sqrt{\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c}}^{\infty} re^{-r^2}dr$ tümlevini hesaplayalım.

$$\int_{\sqrt{\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)}}^{\infty} re^{-r^2}dr = \frac{e^{-r^2}}{-2} \Big|_{\sqrt{\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)}}^{\infty} = \frac{1}{2} e^{-\mu\left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c\right)} \quad (3.53)$$

Bu durumda, I_1 tümlevini aşağıdaki gibi buluruz.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{(\sqrt{\mu})^N} \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^{N-2} e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right. \\
&+ \frac{1}{2} \frac{N-2}{2} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^{N-4} e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{N-2}{2} \frac{N-4}{2} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^{N-6} e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} + \dots \\
&+ \frac{1}{2} \frac{N-2}{2} \frac{N-4}{2} \frac{N-6}{2} \dots \frac{6}{2} \frac{4}{2} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^2 e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \\
&+ \left. \frac{1}{2} \frac{N-2}{2} \frac{N-4}{2} \frac{N-6}{2} \dots \frac{6}{2} \frac{4}{2} e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Bu integrali aşağıdaki gibi daha genel bir şekilde yazabiliriz.

$$I_1 = \frac{e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)}}{2(\sqrt{\mu})^N} \left[\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^{N-2m} \frac{\left(\frac{N}{2} - 1 \right)!}{\left(\frac{N}{2} - m \right)!} \right] \tag{3.55}$$

Eşitlik (3.54)'ü sırasıyla (3.34) ve (3.17)'de yerine koyalım. Bu durumda N bağımsız değişken sayısı çift olduğunda değişmez terim aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_0 U (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) &= \frac{e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)}}{\Gamma \left(\frac{N}{2} \right)} \\
&\times \left[\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^{N-2m} \frac{\left(\frac{N}{2} - 1 \right)!}{\left(\frac{N}{2} - m \right)!} \right]
\end{aligned} \tag{3.56}$$

b.N sayısının tek olma durumu

Eşitlik (3.46)'daki tümlevi aynı şekilde hesapladığımızda aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{(\sqrt{\mu})^N} \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^{N-2} e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right. \\
&+ \frac{1}{2} \frac{N-2}{2} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^{N-4} e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{N-2}{2} \frac{N-4}{2} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^{N-6} e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} + \dots \\
& + \frac{1}{2} \frac{N-2}{2} \frac{N-4}{2} \dots \frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^{N-6} e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \\
& + \frac{N-2}{2} \frac{N-4}{2} \frac{N-6}{2} \dots \frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \int_{\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)}}^{\infty} e^{-r^2} dr \quad (3.57)
\end{aligned}$$

Burada son kalan integral tümleyici yanlıgı fonksiyonudur (complementary error function).

$$\int_{\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)}}^{\infty} e^{-r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right) \quad (3.58)$$

Eşitlik (3.57)'yi (3.56) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{(\sqrt{\mu})^N} \left(\frac{e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)}}{2} \left[\left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^{N-2} + \frac{N-2}{2} \right. \right. \\
& \times \left. \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^{N-4} + \frac{N-2}{2} \frac{N-4}{2} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^{N-6} \right. \\
& + \dots + \left. \left. \frac{N-2}{2} \frac{N-4}{2} \dots \frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right) \right] \right. \\
& \left. + \frac{N-2}{2} \frac{N-4}{2} \frac{N-6}{2} \dots \frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right) \right) \quad (3.59)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu yapıyı daha genel olarak aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{(\sqrt{\mu})^N} \left(\frac{e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)}}{2} \left[\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^{N-2m} \right. \right. \\
& \times \left. \left. \frac{\frac{1}{N} \prod_{n=0}^{m-1} (N-2n)}{2^{m-1}} \right] + \prod_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} (N-2n) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{N+1}{2}}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right) \right) \quad (3.60)
\end{aligned}$$

Eşitlik (3.59)'u sırasıyla (3.34) ve (3.17)'de yerine koyalım. Bu durumda N bağımsız değişken sayısı tek olduğunda değişmez terim aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_0 U(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) &= \frac{e^{-\mu(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c)}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \\
&\times \left[\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right)^{N-2m} \frac{\frac{1}{N} \prod_{n=0}^{m-1} (N-2n)}{2^{m-1}} \right] \\
&+ \prod_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} (N-2n) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{N+1}{2}}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c \right)} \right) \quad (3.61)
\end{aligned}$$

3.2 Birinci Basamaktan YBMG Yaklaşırımı

Yüksek Boyutlu Model Gösterilim açılımında tek bağımsız değişkene bağlı fonksiyonları bulmak için bu bağımsız değişkeni dışlayarak diğer bağımsız değişkenler üzerinden integral alıyorduk. Burada i. bağımsız değişkeni dışlayarak bu değişken üzerinden integral almayacağız ve diğer bağımsız değişkenlere bağlı olarak integral alırız. Böylece z_i bağımsız değişkenine bağlı bir fonksiyon buluruz.

$$\mathcal{I}_i U(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) = ? \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_i U(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) \\
&= \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} \right)^{N-1} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N-1} e^{-\mu(z_1^2 + \dots + z_{i-1}^2 + z_{i+1}^2 + \dots + z_N^2)} \\
&\times U(z_1^2 + \dots + z_{i-1}^2 + z_{i+1}^2 + \dots + z_N^2 + (z_i^2 + \alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) \\
&dz_1 \dots dz_{i-1} dz_{i+1} \dots dz_N \quad (3.63)
\end{aligned}$$

Eşitlik (3.62)'de I_1 operatöründen yararlanarak z_i bağımsız değişkenini dışlayıp fonksiyonu N-1 kez tümlevledik. Bu durumda fonksiyon içindeki z_i terimi değişmez terim olarak düşünülmektedir.

$$\begin{aligned}
I &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N-1} e^{-\mu(z_1^2 + \dots + z_{i-1}^2 + z_{i+1}^2 + \dots + z_N^2)} \\
&\times U(z_1^2 + \dots + z_{i-1}^2 + z_{i+1}^2 + \dots + z_N^2 + (z_i^2 + \alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) \\
&dz_1 \dots dz_{i-1} dz_{i+1} \dots dz_N
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Bu integrali hesaplamak için sıfıncı basamaktan YBMG teriminde atılan adımlar gibi burada da önce küresel değişkenlere dönüşüm yaparız.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\infty} \underbrace{\int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi}}_{N-3} \int_0^{2\pi} e^{-\mu r^2} U(r^2 + z_i^2 + \alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c) \\
&\times r^{N-2} \text{Sin}^{N-3} \theta_1 \text{Sin}^{N-4} \theta_2 \dots \text{Sin} \theta_{N-3} d\theta_{N-2} d\theta_{N-3} \dots d\theta_1 dr
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Sıfıncı basamaktan YBMG yaklaşıtırmındaki farklı olarak (3.64)'teki I tümlevinde fonksiyon z_i sabitini de içeriyor. Bu çok katlı tümlevi betimleyebilmek için sıfıncı basamaktan YBMG bileşeninde atılan adımları burada da uygulayabiliriz. Böylece sinüs trigonometrik fonksiyonunu içeren N-3 katlı integral aşağıdaki şekilde hesaplanmış olur.

$$\int_0^{\pi} d\theta_1 \text{Sin}^{N-3} \theta_1 \dots \int_0^{\pi} d\theta_{N-3} \text{Sin} \theta_{N-3} = \prod_{m=1}^{N-3} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}(m+1))}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \tag{3.66}$$

$$\prod_{m=1}^{N-3} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}(m+1))}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} = (\sqrt{\pi})^{N-3} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{N-1}{2})} \tag{3.67}$$

Bu durumda I integralini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$I = 2\pi (\sqrt{\pi})^{N-3} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{N-1}{2})} \int_0^{\infty} e^{-\mu r^2} r^{N-2} U(r^2 + z_i^2 + \alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c) dr \tag{3.68}$$

Eşitlik (3.67)'de α değerini yerine koyup sağ yanda görülen integrali hesaplayalım.

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu r^2} r^{N-2} U(r^2 - \frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} + c + z_i^2) =? \tag{3.69}$$

Sıfıncı basamaktan YBMG yaklaşıtırmında $-\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} + c$ değerinin sıfırdan büyük ya da küçük olmasına göre iki tür irdeleme yapmıştık. Bu değer sıfırdan büyük olduğu durumda gerçel değerler elde edemediğimizi görmüştük.

(3.68) eşitliğinde r değişkeninin gerçel değer olup olmamasını z_i değeri de etkileyecektir. Bu durumda integral sınırlarını $[K, \infty)$ olarak alırsak

$$K = \begin{cases} |z_i| \leq \sqrt{\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c} & \sqrt{\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c - z_i^2} \\ |z_i| > \sqrt{\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c} & 0 \end{cases} \quad (3.70)$$

olacak şekilde K değerlerini belirleyebiliriz. Tümlevi $[0, \infty)$ aralığında belirlemiştik. Diğer durumda ise yine N sayısının tek ve çift olma durumuna göre iki ayrı değer elde ederiz. Yapılan ara işlemlerin sıfıncı basamaktan YBMG yaklaşıtırmındakinden bir farkı olmadığından sonuçlar burada doğrudan verildi. Buradaki tümlevleme sayısının $N-1$ olduğuna ve bu bağlamda sonuçların değişeceğine dikkat edelim.

a. N sayısının çift olma durumu

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_i U(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) &= \frac{e^{-\mu(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c - z_i^2)}}{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)} \\ &\times \left[\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c - z_i^2 \right)} \right)^{N-1-2m} \frac{\frac{1}{N-1} \prod_{n=0}^{m-1} (N-1-2n)}{2^{m-1}} \right] \\ &+ \prod_{n=1}^{\frac{N-2}{2}} (N-1-2n) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{N}{2}}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c - z_i^2 \right)} \right) \end{aligned} \quad (3.71)$$

a. N sayısının tek olma durumu

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_i U(z_1^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) &= \frac{e^{-\mu(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c - z_i^2)}}{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)} \\ &\times \left[\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c - z_i^2 \right)} \right)^{N-1-2m} \frac{\left(\frac{N-1}{2} - 1\right)!}{\left(\frac{N-1}{2} - m\right)!} \right] \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.3 İkinci Basamaktan YBMG Yaklaşımını

Yüksek Boyutlu Model Gösterilim açılımında iki bağımsız değişkene bağlı fonksiyonları bulmak için bu bağımsız değişkenleri dışlayarak diğer bağımsız değişkenler üzerinden integral alıyorduk. Burada z_{i_1} ve z_{i_2} bağımsız değişkenlerini dışlayarak bu değişkenler üzerinden integral almayacağız ve diğer bağımsız değişkenlere bağlı olarak integral alırız. Böylece z_{i_1} ve z_{i_2} bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon buluruz.

$$\mathcal{I}_{i_1 i_2} U(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) = ? \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}_{i_1 i_2} U(z_1^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) \\ &= \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} \right)^{N-2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N-2} e^{-\mu(z_1^2 + \dots + z_{i_1-1}^2 + z_{i_1+1}^2 + \dots + z_{i_2-1}^2 + z_{i_2+1}^2 + \dots + z_N^2)} \\ & \quad \times U(z_1^2 + \dots + z_{i_1-1}^2 + z_{i_1+1}^2 + \dots + z_{i_2-1}^2 + z_{i_2+1}^2 + \dots + z_N^2 \\ & \quad + (z_{i_1}^2 + z_{i_2}^2 + \alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) dz_1 \dots dz_{i_1-1} dz_{i_1+1} \dots dz_{i_2-1} dz_{i_2+1} \dots dz_N \quad (3.74) \end{aligned}$$

Burada, izlenen yol ve yapılan irdelemeler sıfırcı ve birinci basamaktan YBMG yaklaşımındaki adımlarla benzer olduğu için sonuçlar doğrudan verilmiştir.

a. N sayısının çift olma durumu

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{i_1 i_2} U(z_1^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) &= \frac{e^{-\mu(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - z_{i_2}^2)}}{\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)} \\ & \times \left[\sum_{m=1}^{\frac{N-2}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - z_{i_2}^2 \right)} \right)^{N-2-2m} \frac{\left(\frac{N-2}{2} - 1\right)!}{\left(\frac{N-2}{2} - m\right)!} \right] \quad (3.75) \end{aligned}$$

b. N sayısının tek olma durumu

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{i_1 i_2} U(z_1^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) &= \frac{e^{-\mu(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - z_{i_2}^2)}}{\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)} \\ & \times \left[\sum_{m=1}^{\frac{N-2}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - z_{i_2}^2 \right)} \right)^{N-2-2m} \frac{\frac{1}{N-2} \prod_{n=0}^{m-1} (N-2-2n)}{2^{m-1}} \right] \end{aligned}$$

$$+ \prod_{n=1}^{\frac{N-3}{2}} (N-2-2n) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{N-1}{2}}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - z_{i_2}^2 \right)} \right) \quad (3.76)$$

Burada elde edilen bağıntılara bakılırsa, sıfıncı basamaktan YBMG yaklaşıtırmındaki irdelemler sonucunda elde edilen bağıntılarla benzer yapıda olduğu görülür. Tümlev sayısı her seferinde bir azaldığı için üçüncü basamaktan YBMG yaklaşıtırmındaki bağıntıların da birinci basamaktan YBMG yaklaşıtırmındaki bağıntılarla benzer olacağını söylemek yanlış olmaz.

Bu bilgilere dayanarak, üçüncü, dördüncü ve bu şekilde devam ederek tüm YBMG bileşenleri için genel bir bağıntı yazmak olanaklı görünüyor.

O halde, bundan sonra genel bir p değeri için YBMG yaklaşıtırmını yazalım.

3.4 p nci Basamaktan YBMG Yaklaşıtırımı

Yüksek Boyutlu Model Gösterilim açılımında p tane bağımsız değişkene bağlı fonksiyonları bulmak için bu bağımsız değişkenleri dışlayarak diğer bağımsız değişkenler üzerinden integral alıyorduk. Burada $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_p}$ bağımsız değişkenlerini dışlayarak bu değişkenler üzerinden integral almayacağız ve diğer bağımsız değişkenlere bağlı olarak integral alırız. Böylece $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_p}$ bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon buluruz.

$$\mathcal{I}_{i_1 \dots i_p} U(z_1^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) =? \quad (3.77)$$

Burada p değerinin tek ya da çift olmasına göre iki tür irdeleme yapacağız.

p çift ise

a. N sayısının çift olma durumu

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{i_1 \dots i_p} U(z_1^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) &= \frac{e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - \dots - z_{i_p}^2 \right)}}{\Gamma \left(\frac{N-p}{2} \right)} \\ &\times \left[\sum_{m=1}^{\frac{N-p}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - \dots - z_{i_p}^2 \right)} \right)^{N-p-2m} \frac{\left(\frac{N-p}{2} - 1 \right)!}{\left(\frac{N-p}{2} - m \right)!} \right] \end{aligned} \quad (3.78)$$

b. N sayısının tek olma durumu

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{i_1 \dots i_p} U(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) &= \frac{e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - \dots - z_{i_p}^2 \right)}}{\Gamma\left(\frac{N-p}{2}\right)} \\
&\times \left[\sum_{m=1}^{\frac{N-p}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - \dots - z_{i_p}^2 \right)} \right)^{N-p-2m} \frac{1}{N-2} \prod_{n=0}^{m-1} (N-p-2n) \right] \\
&+ \prod_{n=1}^{\frac{N-(p+1)}{2}} (N-p-2n) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{N-(p-1)}{2}}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - \dots - z_{i_p}^2 \right)} \right) \quad (3.79)
\end{aligned}$$

p tek ise

a. N sayısının çift olma durumu

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{i_1 \dots i_p} U(z_1^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) &= \frac{e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - \dots - z_{i_p}^2 \right)}}{\Gamma\left(\frac{N-p}{2}\right)} \\
&\times \left[\sum_{m=1}^{\frac{N-p}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - \dots - z_{i_p}^2 \right)} \right)^{N-p-2m} \right. \\
&\times \left. \frac{1}{N-p} \prod_{n=0}^{m-1} (N-p-2n) \right] + \prod_{n=1}^{\frac{N-(p+1)}{2}} (N-p-2n) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{N-(p-1)}{2}}} \\
&\times \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - \dots - z_{i_p}^2 \right)} \right) \quad (3.80)
\end{aligned}$$

b. N sayısının tek olma durumu

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{i_1 \dots i_p} U(z_1^2 + \dots + z_N^2 + (\alpha^T \mathbf{A} \alpha + \mathbf{b}^T \alpha + c)) &= \frac{e^{-\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - \dots - z_{i_p}^2 \right)}}{\Gamma\left(\frac{N-p}{2}\right)} \\
&\times \left[\sum_{m=1}^{\frac{N-p}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{b} - c - z_{i_1}^2 - \dots - z_{i_p}^2 \right)} \right)^{N-p-2m} \frac{\left(\frac{N-p}{2} - 1\right)!}{\left(\frac{N-p}{2} - m\right)!} \right] \quad (3.81)
\end{aligned}$$

BÖLÜM 4

YBMG BİLEŞENLERİNİN TOPLAMSALLIK ÖLÇENLERİNİN BELİRLENMESİ

YBMG açılımında, toplamsal açılımdaki bileşen terimlerin toplam boy'a katkıları ölçülerek, toplamsal yapıdan nasıl bir yaklaşımla üretebileceğimiz hakkında yorum yapabiliriz.

YBMG'in amacı bağımsız değişken sayısının çok büyük olduğu durumlarda, toplamsal açılımda kesmeler yaparak olabildiğince az sayıda terimle fonksiyona bir yaklaşımla yapmaktır. Kesme ile oluşturulan toplamsal yaklaşımın boyunun, açılımı yapılan fonksiyonun boyunun karesine oranı toplamsallık ölçenini verir. Bu durumda sıfırıncı basamaktan toplamsallık ölçenini yani değişmez terimin tüm açılımdaki katkısını belirlemek için, değişmez terimin boy karesini, fonksiyonun boy karesine böleriz. Aynı durum, diğer toplamsallık ölçen büyüklükleri için de geçerlidir.

Bu bölümde, üçüncü bölümde elde edilen YBMG bileşenlerinin sıfırıncı ve birinci basamaktan toplamsallık ölçenleri belirlenmiştir.

4.1 Uygulama

Burada öncelikle simetrik artı tanımlı bir \mathbf{A} matrisi, bir \mathbf{b} vektörü ve $-\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} + c$ koşulunu sağlayacak şekilde bir c sabiti tanımlarız.

Sıfırıncı basamaktan toplamsallık ölçenini belirleyebilmek için

$$\sigma_0 = \frac{\|u_0\|^2}{\|u\|^2} \quad (4.1)$$

eşitliğini kullanırız. Aşağıdaki adımları izleyerek

$$\|u_0\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \dots dz_N W_1(z_1) \dots W_N(z_N) (\|u_0\|)^2 = u_0^2 \quad (4.2)$$

$$\|u\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \dots dz_N W_1(z_1) \dots W_N(z_N) (\|u\|)^2 \quad (4.3)$$

$$\sigma_0 = \frac{u_0^2}{u_0} = u_0 \quad (4.4)$$

değişmezlik ölçenini belirleyebiliriz.

Birinci basamaktan YBMG yaklaşımını belirleyebilmek için de aşağıdaki adımları uygulanmaktadır.

$$\|u_1(x_1)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \frac{\sqrt{\mu} e^{-\mu z_1^2}}{\sqrt{\pi}} (u_1 - u_0)^2 \quad (4.5)$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \frac{\sum_{i=1}^N \|u_i(z_i)\|^2}{\|u\|^2} \quad (4.6)$$

Değişmez terimi belirleyebilmek için üçüncü bölümde elde ettiğimiz aşağıdaki bağıntıları kullanırız.

3 boyutta değişmez terim

$$u_0 = \frac{e^{-\mu(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c)}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left[\sum_{m=1}^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c \right)} \right)^{3-2m} \frac{\prod_{n=0}^{m-1} (3-2n)}{2^{m-1}} \right] \\ + \prod_{n=1}^{\frac{3-1}{2}} (3-2n) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{3+1}{2}}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c \right)} \right) \quad (4.7)$$

4 boyutta değişmez terim

$$u_0 = \frac{e^{-\mu(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c)}}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} \left[\sum_{m=1}^{\frac{4}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b} - c \right)} \right)^{4-2m} \frac{\left(\frac{4}{2}-1\right)!}{\left(\frac{4}{2}-m\right)!} \right] \quad (4.8)$$

Bir bağımsız değişkene bağlı terimleri elde etmek için de (4.9) ve (4.10) ile verilen eşitlikleri kullanırız.

3 boyutta bir değişken içeren terim

$$u_1 = \frac{e^{-\mu(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c-z_i^2)}}{\Gamma(\frac{3-1}{2})} \left[\sum_{m=1}^{\frac{3-1}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c-z_i^2 \right)} \right)^{3-1-2m} \frac{(\frac{3-1}{2}-1)!}{(\frac{3-1}{2}-m)!} \right] \quad (4.9)$$

4 boyutta bir değişken içeren terim

$$u_1 = \frac{e^{-\mu(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c-z_i^2)}}{\Gamma(\frac{4-1}{2})} \times \left[\sum_{m=1}^{\frac{4-1}{2}} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c-z_i^2 \right)} \right)^{4-1-2m} \frac{\frac{1}{4-1} \prod_{n=0}^{m-1} (4-1-2n)}{2^{m-1}} \right] + \prod_{n=1}^{\frac{4-2}{2}} (4-1-2n) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{4}{2}}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\mu \left(\frac{1}{4}\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{b}-c-z_i^2 \right)} \right) \quad (4.10)$$

Gerekli tanımlamalar ve bu bağıntıları kullanılarak yapılan hesaplamalarda simgesel bir programlama dili olan MuPad [Ekler F] kullanılmıştır. Üç boyut ve dört boyut için elde edilen sayısal değerler aşağıdaki tablolarda ve grafik üzerinde gösterilmiştir.

3 Boyut:

Tablo 4.1: Ağırlık Fonksiyonu Toplamsallık ve Yayılma Ölçenleri-3 Boyut

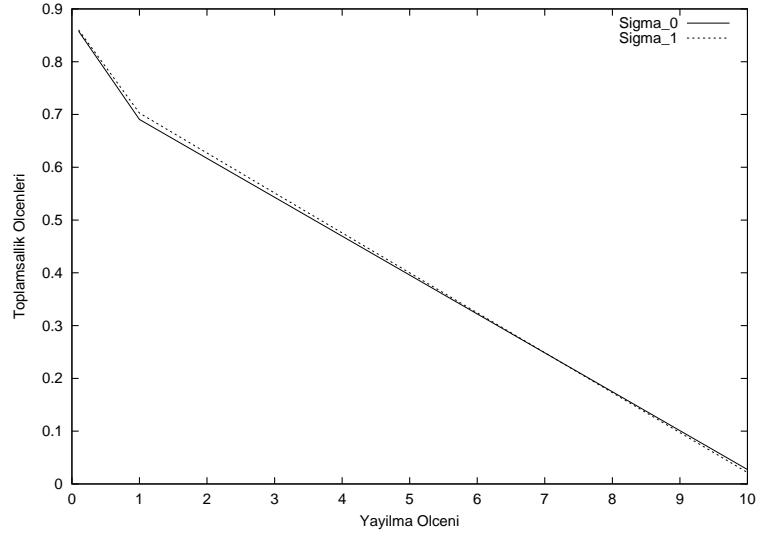
	Toplamsallık Ölçeni	
μ	σ_0	σ_1
0.1	0.8576757383	0.860129883
1	0.6905678813	0.7026384694
10	0.02737691596	0.02171491102

4 Boyut:

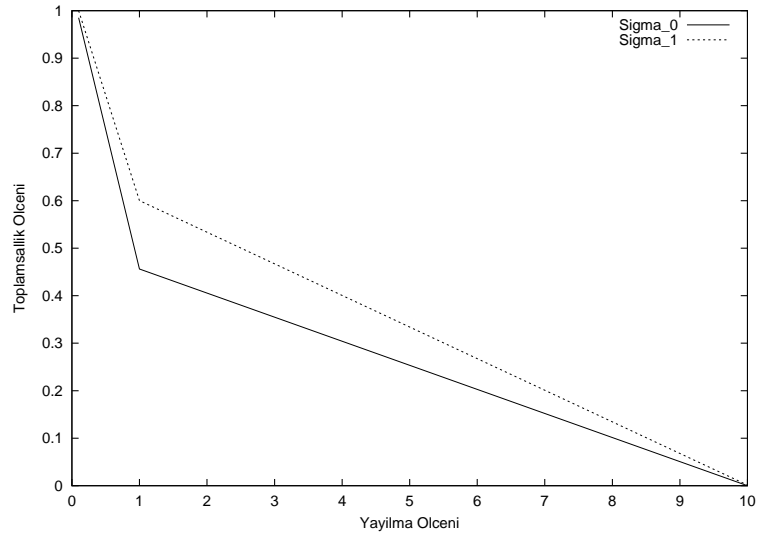
Tablo 4.2: Ağırlık Fonksiyonu Toplamsallık ve Yayılma Ölçenleri-4 Boyut

	Toplamsallık Ölçeni	
μ	σ_0	σ_1
0.1	0.9852788342	1.00..
1	0.4561758157	0.6002563248
10	0.0000002338	0.0014362255

Burada geniş kapsamlı bir sayısal uygulama yapılmamıştır. Fakat yapılan uygulama değişmez terim ve bir bağımsız değişkene bağlı terimlerin tüm fonksiyona göre katkılarını görmemiz açısından yeterlidir. Bu ölçenlerin tanımladığımız matrise ve vektöre göre farklı değerler alacağını bağıntılara bakarak söyleyebiliriz. Bunun yanı sıra grafiklerden de görüldüğü gibi ağırlık fonksiyonu yayılma ölçeni μ , yakınsama değerlerini oldukça etkilemektedir. μ değeri küçüldükçe daha iyi bir yakınsama elde edilmektedir.



Şekil 4.1: Toplamsalılık ölçenleri-3 boyut



Şekil 4.2: Toplamsalılık ölçenleri-4 boyut

BÖLÜM 5

SONUÇ

Yüksek Boyutlu Model Gösterilimde, fonksiyonun bilinmeyen YBMG bileşenlerini bulmak için diklik ya da çarpımsallık koşullarının sağlanması gerekir. Bu koşulların sağlanması beklenmeden ağırlık fonksiyonun en genel yapıda alınabildiği bir yüksek boyutlu model gösterilim yöntemi geliştirme yoluna gidilmiştir. Genelleştirilmiş Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (GYBMG) olarak bilinen bu yöntem, yine çok değişkenli olan ama çarpımsal yapıda olması gerekmeyen ağırlık fonksiyonunu YBMG'ye açmaya dayandırılmıştır.

Bu çalışmada, GYBMG'de ağırlık fonksiyonu olarak kullanılmak üzere, geometrisi düzgün olmayan ikinci dereceden bölgelerde yüksek boyutlu model gösterilim açılımı yapılmaktadır. Amaca yönelik olarak atılan adımlarda, aşkınuzayda aşkındönmelere dayandırılan bir belirleme yordamı izlenmiştir. Bu yaklaşım sonucunda ağırlık fonksiyonunun tüm bileşenleri için integral sayısında indirgeme sağlanabilmiş ve tüm bileşenler için analitik sonuçlar bulunabilmiştir.

Bulgular, GYBMG aracılığıyla yarı açık ve kapalı bölgelerdeki ikinci dereceden programlama problemlerinde kullanılabilir. Ayrıntılandırılmada karşılaşılan adımların çok kapsamlı olmasından dolayı bu uygulama, ileride gerçekleştirilecek başka çalışmalara bırakılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] **Sobol, I. M.**, 1993. Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models, *MMCE*, VOL. **1**, NO. **4**, 407.
- [2] **Rabitz, H., Alis, O.F.**, 1999. Additive and Multiplicate High Dimensional Representation General Foundations of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, **25**, 197-233.
- [3] **Alış, Ö., Rabitz, H.**, 2001. Efficient Implementation of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, **29**, 127-142.
- [4] **Li, G., Rosenthal, C., Rabitz, H.**, 2001. High Dimensional Model Representations, *J. Phys. Chem. A*, **105**, 7765-7777.
- [5] **Demiralp, M., Rabitz, H.**, Factorized High Dimensional Model Representation of Multivariate Functions (yayımlanacak).
- [6] **Demiralp, M., Rabitz, H.**, Generalized High Dimensional Model Representation of Multivariate Functions (yayımlanacak).
- [7] **Demiralp, M.**, 2001. Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi: Değişmezlik ve Toplamsallık Ölçenleri, Çarpımsal Gösterilim ve Çarpımsallık Ölçenleri, *12. Ulusal Mekanik Kongresi, Konya*.
- [8] **Fırat, B., Şenol, N., Demiralp, M.**, 2003. Hyperpolyhedral Weight Construction Through High Dimensional Model Representation (HDMR): A Hyperrotation Based Application, HIGH DIMENSIONAL MODELLING APPLICATIONS IN SCIENCE AND ENGINEERING SESSION OF THE 4TH INTERNATIONAL CONFERENCE "TOOLS FOR MATHEMATICAL MODELLING", Saint-Petersburg State Polytechnic University, Saint-Petersburg, Rusya, 23-28 Haziran (yayımlanacak).
- [9] **Şenol, N., Fırat, B., Demiralp, M.**, 2003. Hyperpolyhedral Weight Construction Through High Dimensional Model Representation (HDMR): A Laplace Transform Application, HIGH DIMENSIONAL MODELLING APPLICATIONS IN SCIENCE AND ENGINEERING SESSION OF THE 4TH INTERNATIONAL CONFERENCE "TOOLS FOR MATHEMATICAL MODELLING", Saint-Petersburg State Polytechnic University, Saint-Petersburg, Rusya, 23-28 Haziran (yayımlanacak).

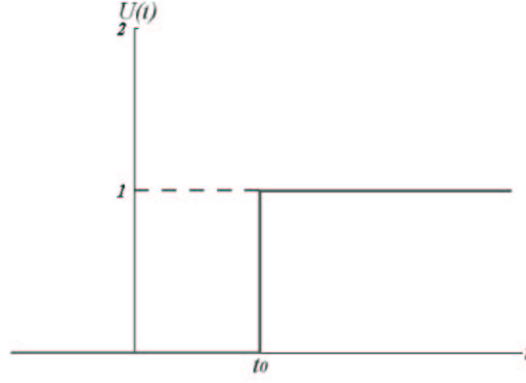
- [10] **Tunga, B., Demiralp, M.**, An Hybrid High Dimensional Model Representation Approximants And Their Utilization in Applications, HIGH DIMENSIONAL MODELLING APPLICATIONS IN SCIENCE AND ENGINEERING SESSION OF THE 4TH INTERNATIONAL CONFERENCE "TOOLS FOR MATHEMATICAL MODELLING", Saint-Petersburg State Polytechnic University, Saint-Petersburg, Rusya, 23-28 Haziran (yayımlanacak).
- [11] **Li, G., S.-W. Wang, Rosenthal, C., Rabitz, H.**, 2001. High dimensional model representations generated from low dimensional data samples. I. mp-Cut-HDMR, *J. Math. Chem.*, **30**, 1-30.
- [12] **Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M.**, 1965. *Table of Integrals, Series, and Products*, New York, Academic Press, 4. Baskı .
- [13] **Kreyszig, E.**, 1988. *Advanced Engineering Mathematics*, New York, Wiley, 6. Baskı .
- [14] <http://www.mathworld.wolfram.com> (Son Ziyaret Tarihi: 25.04.2003).
- [15] <http://www.efunda.com> (Son Ziyaret Tarihi: 25.04.2003).
- [16] <http://www.ece.rutgers.com> (Son Ziyaret Tarihi: 25.04.2003).

EKLER A

BİRİM BASAMAK FONKSİYONU

Birim Basamak Fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir[14].

$$U(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$



Şekil A.1: Birim Basamak Fonksiyonu

Birim Basamak Fonksiyonunun t_0 noktasındaki f fonksiyonuna açılımı aşağıdaki gibi verilebilir.

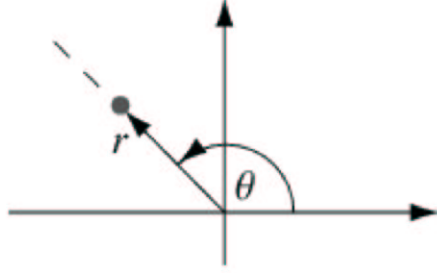
$$U(t - t_0)f(t - t_0) = \begin{cases} f(t - t_0) & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

EKLER B

KÜRESEL DEĞİŞKENLERE GEÇİŞ

İki boyutlu küresel koordinat dönüşümleri kutupsal (polar) koordinatlar olarak bilinir[13].

n=2



Şekil B.1: İki Boyutlu Küresel Koordinat Dönüşümü[14]

$(x_1, x_2) \Rightarrow (r, \theta)$ ile dönüşüm ilişkileri:

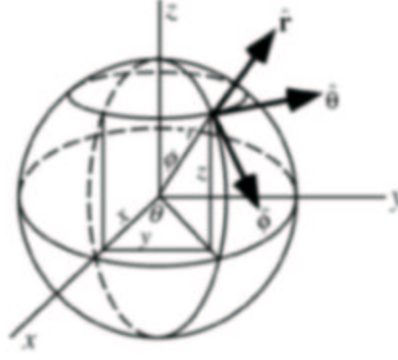
$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos(\theta) & 0 \leq \theta < 2\pi \\ x_2 &= r \sin(\theta) & 0 \leq \theta < 2\pi \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Buradan görüldüğü gibi $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ olur.

n=3

$(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow (r, \theta, \psi)$ ile dönüşüm ilişkileri:

$$x_1 = r \cos(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \psi < 2\pi$$



Şekil B.2: Üç Boyutlu Küresel Koordinat Dönüşümü[14]

$$\begin{aligned}
 x_2 &= r \sin(\theta) \cos(\psi) & 0 \leq \theta \leq \pi, & & 0 \leq \psi < 2\pi \\
 x_3 &= r \sin(\theta) \sin(\psi) & 0 \leq \theta \leq \pi, & & 0 \leq \psi < 2\pi
 \end{aligned}
 \tag{B.2}$$

Burada görüldüğü gibi $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ olur. Bu yöntem daha yüksek boyutlara da uygulanabilir. Genel formülü aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \cos(\theta_1) \\
 x_2 &= r \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\
 x_3 &= r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) \\
 x_4 &= r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \cos(\theta_4) \\
 &\vdots \\
 x_{n-1} &= r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \dots \cos(\theta_{n-1}) \\
 x_n &= r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \dots \sin(\theta_{n-1})
 \end{aligned}
 \tag{B.3}$$

olduğundan $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $0 \leq \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \leq \pi$ ve $0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$ dir.

Jacobian, dönüşümler hakkında bilgiler içeren bir matematiksel deyimdir. Jacobian dönüşüm, değişkenlerin kısmi türevlerinin katsayılarından oluşan matrisin determinantıdır. Kutupsal (polar) koordinatlar için,

$$J \equiv \left| \frac{J(r, \theta)}{\partial(x_1, x_2)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \end{vmatrix}
 \tag{B.4}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{r} & \frac{\cos(\theta)}{r} \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \quad (\text{B.5})$$

$$\left| \frac{J(r, \theta)}{\partial(x_1, x_2)} \right| dx_1 dx_2 = \frac{1}{r} dx_1 dx_2 = dr d\theta \quad (\text{B.6})$$

$$dx_1 dx_2 = r dr d\theta \quad (\text{B.7})$$

Üç boyutlular için $J = \frac{1}{r^2 \sin(\theta_1)}$, dört boyutlular içinde $J = \frac{1}{r^3 \sin^2(\theta_1)} \sin(\theta_2)$ olarak bulunur. Bunu n boyutlu için gösterirsek,

$$\begin{aligned} dx_1 dx_2 &= r dr d\theta \\ dx_1 dx_2 dx_3 &= r^2 \sin(\theta_1) dr d\theta_1 d\theta_2 \\ dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 &= r^3 \sin^2(\theta_1) \sin(\theta_2) dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &\vdots \\ dx_1 \dots dx_n &= r^{n-1} \sin^{n-2}(\theta_1) \sin^{n-3}(\theta_2) \dots \sin(\theta_{n-2}) dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$0 \leq \theta_j \leq \pi \quad (1 \leq j \leq n-2), \quad 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi, \quad 0 \leq r < \infty \quad (\text{B.9})$$

Bu durumda eşitlik,

$$I = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_N}_N = \int_0^R \underbrace{\int_0^\pi \dots \int_0^\pi}_{N-2} \int_0^{2\pi} r^{N-1} \sin^{N-2}\theta_1 \sin^{N-3}\theta_2 \dots \sin\theta_{N-2} dr d\theta_1 \dots d\theta_{N-2} d\theta_{N-1} \quad (\text{B.10})$$

$$\dots \sin\theta_{N-2} dr d\theta_1 \dots d\theta_{N-2} d\theta_{N-1} \quad (\text{B.11})$$

$$I = \int_0^R r^{N-1} dr \int_0^\pi \sin^{N-2}\theta_1 \dots \int_0^\pi d\theta_{N-2} \sin\theta_{N-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{N-1} \quad (\text{B.12})$$

şeklinde olur.

EKLER C

BETA FONKSİYONU

Beta fonksiyonunun integral gösterilimini çıkarmak için aşağıdaki gibi iki faktoriyelin çarpımını yazabiliriz[14].

$$m!n! = \int_0^{\infty} e^{-u} u^m du \int_0^{\infty} e^{-v} v^n dv \quad (C.1)$$

$u = x^2$ ve $v = y^2$ değişken dönüşümleri yapılırsa,

$$\begin{aligned} m!n! &= 4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2m+1} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2n+1} dy \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} x^{2m+1} y^{2n+1} dx dy \end{aligned} \quad (C.2)$$

Kartezyen koordinatlardan polar koordinatlara dönüşüm yapılırsa, $x = r \cos \theta$ ve $y = r \sin \theta$ yazılır.

$$\begin{aligned} m!n! &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} (r \cos \theta)^{2m+1} (r \sin \theta)^{2n+1} r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2m+1+2n+1+1} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} \theta \sin^{2n+1} \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2m+2n+3} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} \theta \sin^{2n+1} \theta d\theta \\ &= 2(m+n+1)! \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} \theta \sin^{2n+1} \theta d\theta \end{aligned} \quad (C.3)$$

Böylece beta fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} B(m+1, n+1) &= B(n+1, m+1) \equiv 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} \theta \sin^{2n+1} \theta d\theta \\ &= \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \end{aligned} \quad (C.4)$$

Argümanlar tekrar yazılırsa,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} \quad (C.5)$$

Genel trigonometrik form,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}^n x \text{Cos}^m x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}(m+1)\right) \quad (\text{C.6})$$

Yukarıdaki eşitlik $u \equiv \text{Cos}^2 \theta$ alınarak polinomlar üzerinden bir integrale dönüştürülebilir.

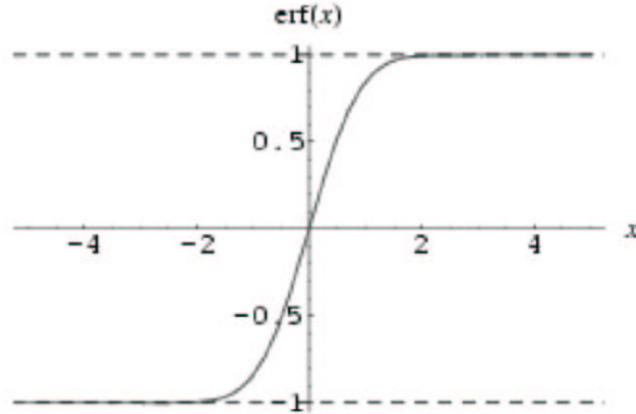
$$B(m+1, n+1) \equiv \frac{m!n!}{(m+n+1)!} = \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{n-1} du \quad (\text{C.7})$$

EKLER D

YANILGI (HATA) FONKSİYONU ve TÜMLEYİCİ YANILGI FONKSİYONU

Yanılgi fonksiyonu ve tümleyici yanılgi fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır[15].

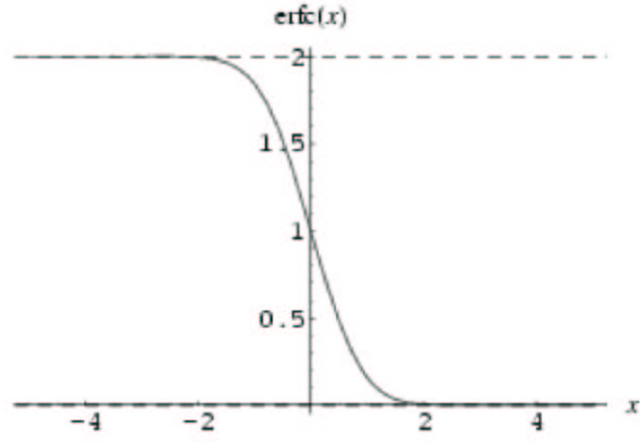
Yanılgi Fonksiyonu:



Şekil D.1: Yanılgi Fonksiyonu[15]

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (\text{D.1})$$

Tümleyici Yanılgı Fonksiyonu:



Şekil D.2: Tümleyici Yanılgı Fonksiyonu[15]

$$erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du \quad (D.2)$$

Yanılgı fonksiyonu ve tümleyici yanılgı fonksiyonu aşağıdaki sonuçları verir.

$$\begin{aligned} erf(0) &= 0 & erfc(0) &= 1 \\ erf(\infty) &= 1 & erfc(\infty) &= 0 \\ erf(-x) &= -erf(x) \end{aligned} \quad (D.3)$$

EKLER E

Eliptik Paraboloid, Hiperbolik Paraboloid ve Elipsoid Yüzeylerinin Çizimi

Yüzeyler MuPad simgesel programlama dilinden yararlanılarak çizildi.

```
//MuPAD-SESSION
plotfunc3d
(BackGround=RGB::White,
ForeGround=RGB::Black,
Axes=Box,
 $x^2/9+y^2/4$ ,
 $x=-3..3,y=-3..3$ )
//EVAL
plotfunc3d
(BackGround=RGB::White,
ForeGround=RGB::Black,
Axes=Box,
 $-x^2+y^2/4$ ,
 $x=-3..3,y=-3..3$ )
//EVAL
plot
(plot::spherical
([2,phi,theta],
phi=-PI..PI,
theta=0..PI,
Grid=[40,40]),
Axes=Box)
//INPUT
```

EKLER F

Üç Boyutta Toplamsallık Ölçenlerinin Hesaplanması

Toplamsallık ölçenleri hesaplamalarında MuPad simgesel programlama dilinden yararlanıldı.

```
//MuPAD-SESSION
birim:=matrix(3,3,[[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]])
//EVAL
u:=matrix(3,1,[1,2,1])
//EVAL
uT:=matrix(1,3,[1,2,1])
//EVAL
A:=20*birim-u*uT
//EVAL
b:=matrix(3,1,[1,2,3])
//EVAL
bT:=matrix(1,3,[1,2,3])
//EVAL
Ai:=numeric::inverse(A)
//EVAL
k1:=bT*Ai*b*(1/4)
//EVAL
c:=-0.2
//EVAL
g:=gamma(1.5)
//EVAL
mu:=1
//EVAL
```

```

t1:=exp(-mu*(0.2321428571-c))
//EVAL
t2:=sqrt(mu*(0.2321428571-c))
//EVAL
t3:=sqrt(3.141/4)*erfc(0.6573757351)
//EVAL
degismez:=g*t1*t2+t3
//EVAL
numeric::gldata(4,DIGITS)
//EVAL
k1:=0.2321428571-c
//EVAL
k2:=sqrt(0.2321428571-c)
//EVAL
f1:=(k2*sqrt(mu)/sqrt(3.141))
*exp(-mu*(k2*0.0694318442)^2)
*(exp(-mu*(k1-c-(k2*0.0694318442)^2))-degismez)^2
//EVAL
f2:=(k2*sqrt(mu)/sqrt(3.141))
*exp(-mu*(k2*0.3300094782)^2)
*(exp(-mu*(k1-c-(k2*0.3300094782)^2))-degismez)^2
//EVAL
f3:=(k2*sqrt(mu)/sqrt(3.141))
*exp(-mu*(k2*0.6699905218)^2)
*(exp(-mu*(k1-c-(k2*0.6699905218)^2))-degismez)^2
//EVAL
f4:=(k2*sqrt(mu)/sqrt(3.141))
*exp(-mu*(k2*0.9305681558)^2)
*(exp(-mu*(k1-c-(k2*0.9305681558)^2))-degismez)^2
//EVAL
birli_1:=0.1739274226*f1
+0.3260725774*f2
+0.3260725774*f3
+0.1739274226*f4
//EVAL
birliler:=2*birli_1
//EVAL
sigma_1:=birliler/degismez
//EVAL

```

```

sigma_1:=sigma_1+degismez
//EVAL
mu:=0.1
//EVAL
t1:=exp(-mu*(0.2321428571-c))
//EVAL
t2:=sqrt(mu*(0.2321428571-c))
//EVAL
t3:=sqrt(3.141/4)*erfc(0.2078804601)
//EVAL
degismez:=g*t1*t2+t3
//EVAL
f1:=(k2*sqrt(mu)/sqrt(3.141))
*exp(-mu*(k2*0.0694318442)^2)
*(exp(-mu*(k1-c-(k2*0.0694318442)^2))-degismez)^2
//EVAL
f2:=(k2*sqrt(mu)/sqrt(3.141))
*exp(-mu*(k2*0.3300094782)^2)
*(exp(-mu*(k1-c-(k2*0.3300094782)^2))-degismez)^2
//EVAL
f3:=(k2*sqrt(mu)/sqrt(3.141))
*exp(-mu*(k2*0.6699905218)^2)
*(exp(-mu*(k1-c-(k2*0.6699905218)^2))-degismez)^2
//EVAL
f4:=(k2*sqrt(mu)/sqrt(3.141))
*exp(-mu*(k2*0.9305681558)^2)
*(exp(-mu*(k1-c-(k2*0.9305681558)^2))-degismez)^2
//EVAL
birli_1:=0.1739274226*f1
+0.3260725774*f2+0.3260725774*f3
+0.1739274226*f4
//EVAL
birliler:=2*birli_1
//EVAL
sigma_1:=birliler/degismez
//EVAL
sigma_1:=sigma_1+degismez
//EVAL
//INPUT

```

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Almanya'da doğdu. Orta ve lise öğrenimini Özel Gürsoy Lisesi'nde tamamladı. 2001 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği bölümünden mezun olduktan sonra İstanbul Teknik Üniversitesi, Bilişim Enstitüsü, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik programında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen bu bölümde öğrenimine devam etmektedir.