

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DAİRESEL PLAKLARIN SONLU FARKLAR İLE ÇÖZÜLMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Alim YILMAZ**

**İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Yapı Mühendisliği Programı**

**HAZİRAN 2016**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DAİRESEL PLAKLARIN SONLU FARKLAR İLE ÇÖZÜLMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Alim YILMAZ  
(501121003)**

**İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Yapı Mühendisliği Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Abdul HAYIR**

**HAZİRAN 2016**



İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 501121003 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Alim YILMAZ, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “DAİRESEL PLAKLARIN SONLU FARKLAR İLE ÇÖZÜLMESİ” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :** **Prof. Dr. Abdul HAYIR** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :** **Prof. Dr. Teoman ÖZER** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Yrd. Doç. Dr. Çağrı MOLLAMAHMUTOĞLU**.....  
Yıldız Teknik Üniversitesi

**Teslim Tarihi** : 2 Mayıs 2016  
**Savunma Tarihi** : 14 Haziran 2016



*Aileme,*





## ÖNSÖZ

Döşemeler binadaki katları oluşturan, üzerine gelen yükleri taşıyarak mesnetlere nakleden yapı elemanlarıdır.

Bu çalışmada plak çeşitleri anlatılarak yaklaşık yöntemler kullanıldığında elde edilen sonuçlar ile gerçek sonuçlar kıyaslanmıştır.

Bu çalışmayı yapmamı sağlayan değerli hocam Prof. Dr. Abdul HAYIR'a teşekkürü borç bilirim. Ayrıca çalışmalarım süresince, gerek teorik gerekse pratik bilgileriyle yardım eden değerli hocam Doç. Dr. Muharrem AKTAŞ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım süresince hem bilgilerini hem de arkadaşlıklarını paylaşan Yük. Müh. Erol DEMİRKİRAN'a ve Ebubekir BALKANLIOĞLU'na en içten teşekkürlerimi sunarım.

Benim bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme bu vesile ile bana desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Haziran 2016

AlimYILMAZ  
(İnşaat Mühendisi)



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER .....	ix
SEMBOLLER .....	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET.....	xvii
SUMMARY .....	xix
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. PLAKLAR .....</b>	<b>3</b>
2.1 Plakların Karakteristiği .....	3
<b>3. DİKDÖRTGEN PLAKLAR .....</b>	<b>5</b>
3.1 Dikdörtgen Plak Denklemleri.....	5
3.2 Sınır Koşulları .....	7
3.2.1 Basit mesnetli kenarlara sahip olanlar .....	7
3.2.2 Ankastre mesnetli kenarlara sahip olanlar .....	9
3.2.3 Serbest uçlu kenara sahip olanlar .....	10
3.3 Basit Mesnetli Kenarları Olan Dikdörtgen Plak Örneği .....	11
<b>4. DAİRESEL PLAKLAR.....</b>	<b>15</b>
4.1 Dairesel Plak Denklemleri .....	15
4.2 Ankastre Kenarlara Sahip Dairesel Plak Örneği .....	19
<b>5. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ.....</b>	<b>21</b>
5.1 Basit Mesnetli Kenarları Olan Kare Plak Örneği.....	24
5.2 Ankastre Kenarlara Sahip Dairesel Plak Örneği .....	26
<b>6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....</b>	<b>35</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>37</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>39</b>



## SEMBOLLER

<b>w</b>	: Düşey yöndeki yerdeğiştirme
<b>P</b>	: Düzgün yayılı yük
<b>a</b>	: Yarıçap
<b>n</b>	: Yüzeyin normali
<b>M<sub>x</sub></b>	: X yönündeki moment
<b>M<sub>y</sub></b>	: Y yönündeki moment
<b>Q<sub>x</sub></b>	: X yönündeki düşey kuvvetler
<b>Q<sub>y</sub></b>	: Y yönündeki düşey kuvvetler
<b>E</b>	: Elastisite Modülü



## ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 5.1 : Yerdeğişirmelerin gösterilmesi .....	32
Çizelge 5.2 : Momentlerin gösterilmesi.....	33
Çizelge 5.3 : Momentlerin gösterilmesi.....	34





## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 2.1: Dikdörtgen plak.....	3
Şekil 2.2: Dairesel plak.....	3
Şekil 3.1: Dikdörtgen plaktaki kuvvetler.....	5
Şekil 3.2: Basit mesnetli dikdörtgen plak.....	7
Şekil 3.3: Ankastre mesnetli dikdörtgen plak.....	9
Şekil 3.4: Serbest uçlu dikdörtgen plak.....	10
Şekil 3.5: Basit mesnetli dikdörtgen plak.....	11
Şekil 4.1: Kutupsal Koordinat Sistemi .....	15
Şekil 4.2: Ankastre Mesnetli Dairesel Plak.....	19
Şekil 5.1: Fonksiyonun grafiği.....	21
Şekil 5.2: Noktaların gösterimi.....	21
Şekil 5.3: Katsayılar şeması.....	23
Şekil 5.4: Plağın şematik bölünmesi.....	24
Şekil 5.5: Dairesel plağın şematik bölünmesi.....	26
Şekil 5.6: Dairesel plağın şematik bölünmesi.....	28
Şekil 5.7: Dairesel plağın şematik bölünmesi.....	29
Şekil 5.8: Sonuçların grafikte gösterimi.....	32
Şekil 5.9: Sonuçların grafikte gösterimi.....	33
Şekil 5.10: Sonuçların grafikte gösterimi.....	34



## DAİRESEL PLAKLARIN SONLU FARKLARLA ÇÖZÜMÜ

### ÖZET

Günümüzde yapılan yapılarda kullanım amacına göre birçok plak (döşeme) yapılmaktadır ve bu plaklar çeşitlerine göre bu yükleri kirişlere ya da direkt kolonlara aktarmaktadır. Plaklar yanında başka bir plak olmasına göre kenarlarından ankastre mesnetlenmiş, basit mesnetlenmiş ve ya bir ucu boşta olacak şekilde görülebilir.

Plakların özelliği üzerine gelen yüklerin eksenine dik doğrultuda olmasıdır. Minimum kalınlığı standartlara göre belirlenen plaklar, yapının mimarisine göre dairesel olabileceği gibi dikdörtgen ya da üçgen olabilirler. Sıklıkla görülmesi de dairesel plaklar yapılarda kullanılabilir. Özellikle hotel, avm gibi büyük yapılarda karşımıza çıkan dairesel plaklar estetik açıdan olağanüstüdür.

Plaklar analitik ve yaklaşık olarak çözülebilir. Analitik çözüm plak denkleminde yola çıkılarak sınır koşulların sağlanmasıyla elde edilen çözümlerdir. Yaklaşık çözümler ise enerji ve nümerik methodlarla bulunur. Enerji methodu toplam potansiyel enerji ve virtüel iş yöntemlerinden oluşur. Nümerik method ise sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır elemanlar yöntemlerinden oluşur.

Sonlu farklar yöntemi herhangi bir şekli iki doğrultuda uzanan doğrularla belirli aralıklarla bölerek, doğruların kesişim noktaları arasındaki bağlantılarla o noktalarda oluşan yer değiştirmelerin bulunmasını sağlamaktadır. Dairesel plak bu ızgara şekliyle bölündüğünde plağın dış yüzündeki ızgaralar dikdörtgen şeklinde olmamaktadır. Hal böyle olunca dairesel plak kendisini en iyi temsil edecek şekle getirilerek plağın dışındaki ızgaralarında dikdörtgen olması sağlanır. Dairesel plak artık bizim için farklı bir şekil olmaktadır ve o şekil sonlu farklar yöntemiyle çözülür. Burada önemli olan yeni şeklin en dıştaki noktalarının dairesel plak sınır noktalarına en yakın olacak biçimde seçilmesidir.

Bu çalışmada var olan bir dairesel plak üzerinde sonlu farklar yöntemi uygulanmaya çalışılmıştır. Dairesel plağı en iyi temsil edecek şekil bulunmaya çalışılmış ve elde edilen yeni şekil sonlu farklar yöntemiyle çözülerek belirli noktalardaki yer değiştirmeler ve moment değerleri elde edilmiştir. Elde edilen yer değiştirmeler ve moment değerleri gerçek sonuçlarla kıyaslanarak yapılan yaklaşımın ne derece doğru olduğu gösterilmiştir. Elde edilen yeni şekil farklı biçimlerde bölünerek sonlu farklar yöntemi uygulanmış ve her iki şekildeki sonuçlar arasındaki bulunmuştur. Bu fark bir grafik üzerine dökülmüş ve elde edilen sonuçlar açık bir şekilde gösterilmiştir.



## **FINITE DIFFERENCE METHOD ON CIRCULAR PLATES**

### **SUMMARY**

Constructures are composed of columns, beams, foundations and plates. All of them have different function. If one piece does not work, constructures can not stand properly.

Plates which is one of important parts can be found in every structures; such as residences, malls and hotels. It is a well known subject that one dimension of plates (thickness) is much smaller the other dimensions. Plates can have either straight or curved lines geometrically. Plates might have fixed, simply supported and free boundary conditions. They could also have elastic restrain and supports, or in some cases, even point supports.(plates without beams)

Static and dynamic loads carried by plates must be perpendicular to the plates surface. These external loads cause internal bending, torsional moments and shear forces.

Plates and plate type structures have acquired special significance and considerably increased applications in last two decades. A great number of structural components in engineering might be classified as plates. Ordinary examples in civil engineering are floor or foundation slabs and bridge deck slabs. Not only civil engineering but also shipbuilding engineering and aerospace industries use plates dramatically. Wings and fuselage of aircraft, for instance, can consist of curved plates. Plates are also constantly parts of machineries and mechanical items.

There are two main options which are analytic or approximate solution in order to solve plates. These methods have been developed by many researchers and engineer throughout history. Sophie German(1810), Lagrange(1811), Kirchoff(1850), Mundlin(1951) are some of them who studied on plates and plates behaviour.

Analytic solution of plates is important one, it is about the loads and boundary conditions. Navier method and Levy method are most common ways to solve plates equations.

Navier first found the solution of flexure problem for simply supported rectangular plates, using double trigonometric series to find out this solution. He has created the solutions for two cases: plates subjected to uniform loading and a concentrated loading at the central point. Fu-fan and others have agreed and developed the Navier, and they solved the problems of elastic equilibrium, stability and vibration for rectangular plates with constant thickness and several boundary conditions, under the action of various types of loading.

The bending problem of rectangular plates, with two opposite edges simply supported and different boundary conditions along the other edges, was easily solved

by Levyin in 1899. After this time, this method employed by many researchers in order to find out static and dynamic analysis of plate structures.

Approximate methods are composed of energy and numerical methods. Analytic solutions might run into serious mathematical problems and equations when plates have extraordinary buckling loads with complex geometry and mixed boundary conditions. Under these circumstances, solutions of plates become very doubtful and practically impossible. In these conditions, we can use approximate methods to solve plates behaviour.

The energy method developed by Ritz applies the principle of minimum potential energy. According to the Ritz method, the deflection surface of the plate is approximated by a series which consists of some coordinate functions that satisfy individually, at least, the kinematic boundary conditions and unknown constants to be determined from the minimum potential energy principle.

Finite Difference Method, Finite Element Method and Boundary Element Method make up numerical methods. Methods used for solving of established equations, with respect of outline and boundary conditions. One of the numerical methods is Finite Difference Method (FDM) based on replacing of differential equations with corresponding difference equations. When this method is used, the problem comes to solving of system of paired algebraic equations, making the problem more easier for solving.

In this study, plates and plates boundary conditions were expressed shortly. A simply supported rectangular plate was solved both by using Navier Solution and Finite Difference Method. When results were compared to each other, we can realize easily that two solutions are same.

Not only rectangular plates but also circular plates were solved step by step in this study. When circular plates were investigated, situation and process can be more difficult than rectangular plates. In order to use Finite Difference Method, circular plates must be transformed another form. Because of being circular, we can not apply Finite Difference Method properly.

Fixed circular plate with uniformly load was main topic of this study. A circular plate was transformed two form for making the problem more easier in this study. Circularity of plate were annihilated and new forms were used for solution. A new first form of plate is solved and deflection of some point of new first form is determined by dividing uniformly. In first form, circular plate were divided with six horizontal and vertical line uniformly to be solved clearly. Results of this approximation were found out and showed on a graphic.

After the first approximation and results, circular plate were divided with eight horizontal and vertical line uniformly. When Finite Difference Method was applied second form of plate and equations of deflections were solved, new results of determined points on plate were found easily. Deflections of second form were showed on the same graphic.

Exact solution of circular plates were needed to compare with results of Finite Difference Method. Fixed circular plate with uniform load was solved by using

boundary conditions and equation of plate and exact solution were gained. Deflections of determined points on circular plate was demonstrated on the same graphic.

When the graphic was analyzed, it is clear that results of Finite Difference Method and exact solution were close to each others. Results of second new form were more close than first new form. This study demonstrated that circular plates can solve by using Finite Difference Method.





## 1. GİRİŞ

Plaklar, kendi orta düzlemlerine dik yüklenmiş düzlem yüzeysel taşıyıcılardır. İnşaat mühendisliği ile birlikte gemi mühendisliği, uçak sanayi ve makine parçalarında da plakları görebilmekteyiz.

Plaklar analitik ve yaklaşık olarak çözülebilir. Analitik çözüm matematiksel denklemlerin sınır koşullarını sağlayacak biçimde çözülmesiyle yapılır. Plak geometrisi ve sınır koşullarının durumuna göre denklemler elle çözülemeyecek kadar karmaşık hale gelebilir. Bu durumda yaklaşık yöntemlerle çözüme ulaşmak daha akılcı olur.

Yaklaşık yöntemler enerji ve nümerik olmak üzere iki farklı biçimde yapılabilir. Toplam potansiyel enerji ve virtüel iş prensibiyle çözüme kavuşmak mümkündür. Nümerik yöntemde ise sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır elemanlar metotlarıyla çözüm yapılabilir.

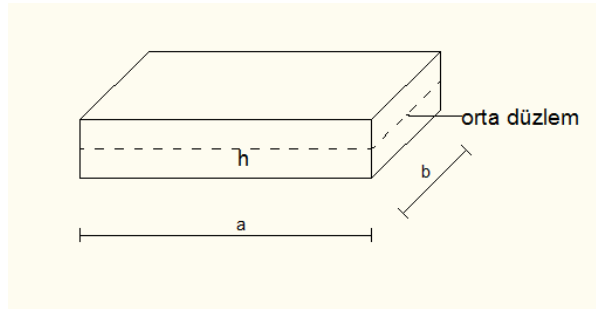
Bu çalışmada dairesel plak sonlu farklar yöntemi kullanılarak 3 kez çözülmüş ve bu çözümlerden doğru sonuca en yakın iki tanesi grafikler üzerinde gösterilmiştir. Yapılan çözümler ile gerçek çözüm kıyaslanmış ve doğru sonuca ne kadar yakın cevaplar bulunduğu açık bir şekilde gösterilmiştir.



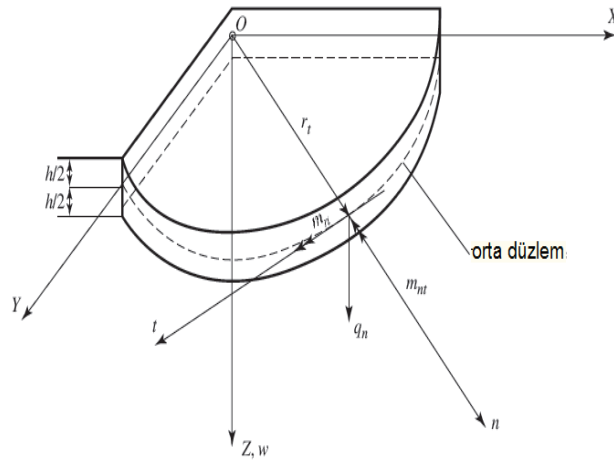
## 2. PLAKLAR

### 2.1 Plakların Karakteristiği

Bir plak; ortasından geđtiđi dűşűnűlen Őekil 2.1 ve Őekil 2.2 'de gűsterildiđi gibi orta dűzlem, kalınlık ve kenarlardan oluşur (Celep, 2008).



Őekil 2.1 : Dikdűrtgen plak.



Şekil 2.2 : Dairesel plak.

Dairesel plaklar çok karŐılaŐılmasada bűyűk ۆlekli projelerde (avm, hotel) gűrűlebilmektedir. Yanında baŐka bir plak bulunmasına gűre ankastre ya da basit mesnetli gibi davranıŐlar gűsterebilir.

Dikdűrtgen plaklarda kalınlığın kenarlara, dairesel plaklarda ise kalınlığın yarıçapa oranı yaklaŐık 0,02 dir (Szilard, 2004).

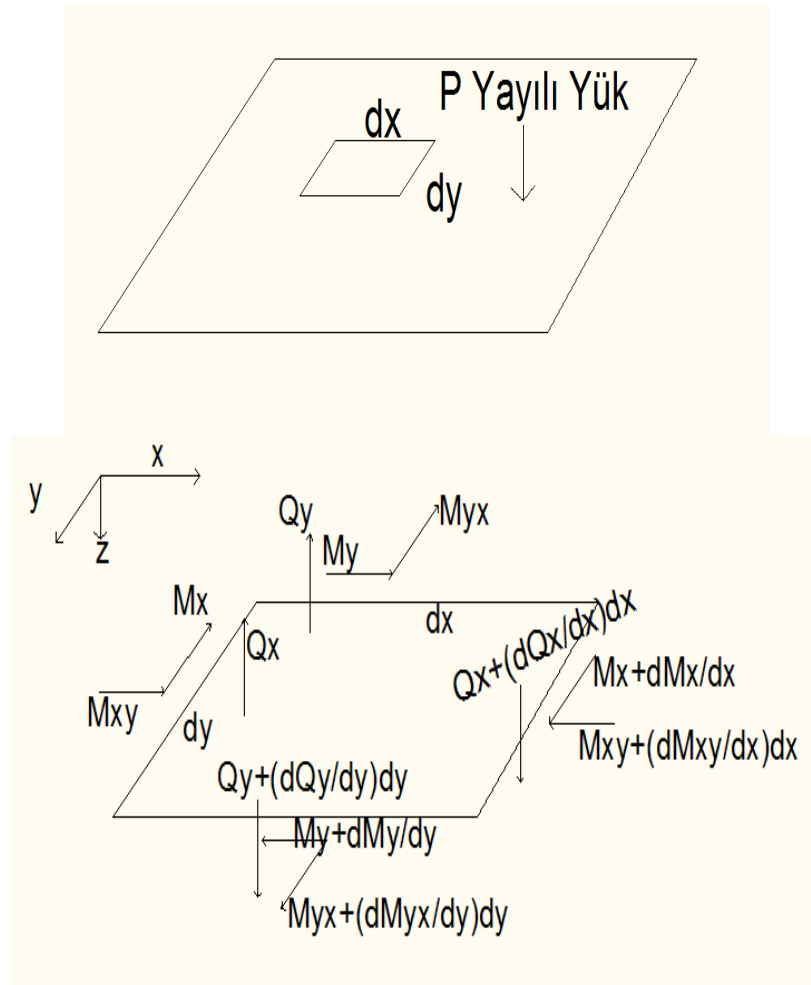


### 3. DİKDÖRTGEN PLAKLAR

Yapılarda genellikle görülen plak çeşididir. Katlarda ve temellerde bu plak çeşidiyle karşılaşmamız olasıdır.

#### 3.1 Dikdörtgen Plak Denklemleri

Şekil 3.1 'de plaktan alınan herhangi bir parça üzerindeki kuvvetler gösterilmiştir. Bu kuvvet dengesine göre eşitlikler yazılacaktır (Timoshenko ve Woinowsky-Krieger, 1959).



Şekil 3.1 : Dikdörtgen plaktaki kuvvetler.

Şekil 3.1 'e göre Y yönünde moment dengesi yazıldığında;

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad (3.1)$$

Şekil 3.1 'e göre X yönünde moment dengesi yazıldığında;

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (3.2)$$

Şekil 3.1 'e göre Z yönünde kuvvet dengesi yazıldığında

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P(x,y) = 0 \quad (3.3)$$

İfadeleri bulunur.

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.4)$$

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.5)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \gamma) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.6)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \gamma^2)} \quad (3.7)$$

Denklem (3.3) denkleminde, denklem (3.4) (3.5) ve (3.6) ifadeleri yerine yazıldığında;

$$0 = -D \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\Delta w) + P \quad (3.8)$$

$$P = D \Delta \Delta w \quad (3.9)$$

$$\Delta \Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (3.10)$$

Yer değiştirmesi  $w(x,y)$  olan plâgın plak denklemi;

$$P(x,y) = D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] \quad (3.11)$$

$$M_x(x,y) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.12)$$

$$M_y(x, y) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.13)$$

$$M_{xy} = M_{yx}(x, y) = -D(1 - \gamma) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.14)$$

$$Q_x(x, y) = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \quad (3.15)$$

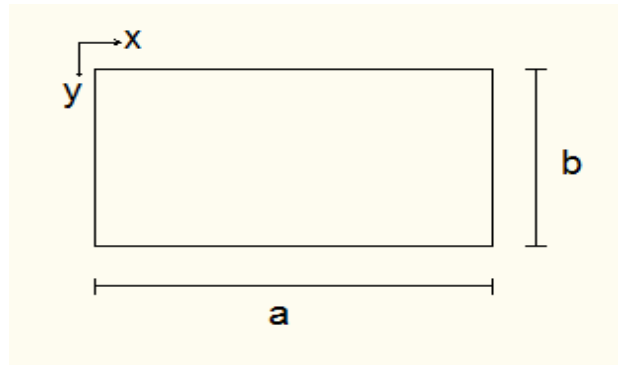
$$Q_y(x, y) = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \quad (3.16)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.17)$$

### 3.2 Sınır Koşulları

#### 3.2.1 Basit mesnetli kenarlara sahip olanlar

Bu plaklar Şekil 3.2 gibi dört tarafında herhangi bir plak olmayan durumlarda görülür (Szilard 2004).



Şekil 3.2 Basit mesnetli dikdörtgen plak.

$x=0$        $0 < y < b$       için

$$w(x=0, y) = 0 \quad (3.18)$$

$$M_x(x=0, y) = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x=0, y) = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x=0, y) \neq 0 \quad (3.21)$$

$$M_{xy}(x=0, y) \neq 0 \quad (3.22)$$

$x=a$        $0 < y < b$     için

$$w(x=a,y)=0 \quad (3.23)$$

$$M_x(x=a,y)=0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x = a, y) = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x = a, y) \neq 0 \quad (3.26)$$

$$M_{xy}(x=a,y) \neq 0 \quad (3.27)$$

$y=0$        $0 < x < a$     için

$$w(x,y=0)=0 \quad (3.28)$$

$$M_y(x,y=0)=0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y = 0) = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x, y = 0) \neq 0 \quad (3.31)$$

$$M_{yx}(x,y=0) \neq 0 \quad (3.32)$$

$y=b$        $0 < x < a$     için

$$w(x,y=b)=0 \quad (3.33)$$

$$M_y(x,y=b)=0 \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y = b) = 0 \quad (3.35)$$

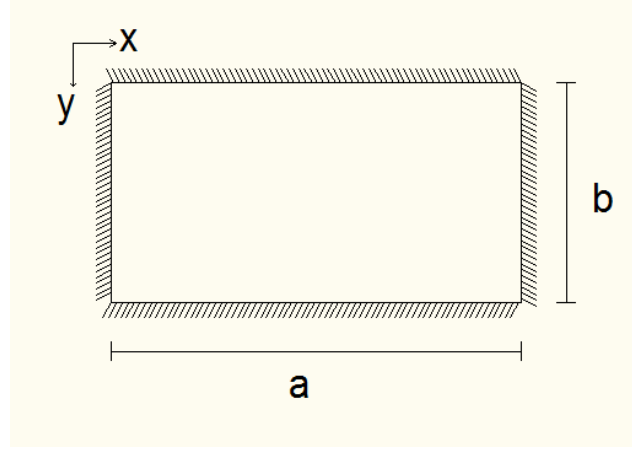
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x, y = b) \neq 0 \quad (3.36)$$

$$M_{yx}(x,y=b) \neq 0 \quad (3.37)$$



### 3.2.2 Ankastre mesnetli kenarlara sahip olanlar

Bu plaklar Şekil 3.3 gibi dört tarafında bir plak olan durumlarda görülür (Szilard, 2004).



Şekil 3.3 : Ankastre mesnetli dikdörtgen plak.

$x=0$   $0 < y < b$  için

$$w(x=0,y)=0 \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x=0,y)=0 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x=0,y)=0 \quad (3.40)$$

$$M_x(x=0,y) \neq 0 \quad (3.41)$$

$$M_{xy}(x=0,y) \neq 0 \quad (3.42)$$

$x=a$   $0 < y < b$  için

$$w(x=a,y)=0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x=a,y)=0 \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x=a,y)=0 \quad (3.45)$$

$$M_x(x=a,y) \neq 0 \quad (3.46)$$

$$M_{xy}(x=a,y) \neq 0 \quad (3.47)$$

$y=0$   $0 < x < a$  için

$$w(x,y=0)=0 \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,y=0) = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x,y=0) = 0 \quad (3.50)$$

$$M_y(x,y=0) \neq 0 \quad (3.51)$$

$$M_{xy}(x,y=0) \neq 0 \quad (3.52)$$

$y=b$        $0 < x < a$       için

$$w(x,y=b)=0 \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,y=b) = 0 \quad (3.54)$$

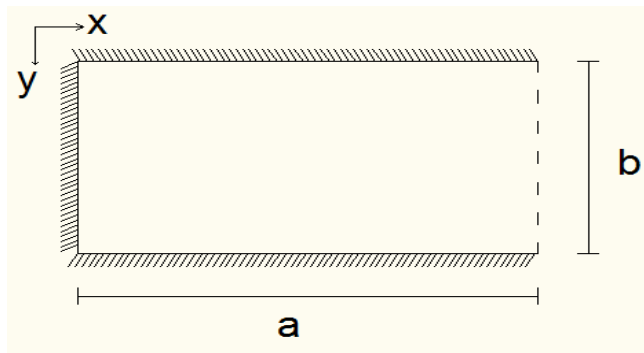
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x,y=b) = 0 \quad (3.55)$$

$$M_y(x,y=b) \neq 0 \quad (3.56)$$

$$M_{xy}(x,y=b) \neq 0 \quad (3.57)$$

### 3.2.3 Serbest uçlu kenara sahip olanlar

Bu plaklar Şekil 3.4 gibi üç tarafında bir plak olan bir tarafında olmayan durumlarda görülür (Szilard, 2004).



Şekil 3.4 : Serbest uçlu dikdörtgen plak.

$x=a$        $0 < y < b$       için

$$w(x=a,y) \neq 0 \quad (3.58)$$

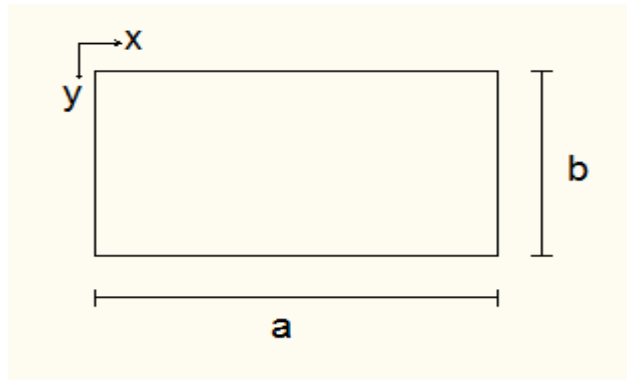
$$\frac{\partial w}{\partial x}(x = a, y) \neq 0 \quad (3.59)$$

$$\frac{d^2 w}{\partial x \partial y}(x = a, y) \neq 0 \quad (3.60)$$

$$M_x(x=a,y) \neq 0 \quad (3.61)$$

### 3.3 Basit Mesnetli Kenarları Olan Dikdörtgen Plak Örneği

Dört tarafında herhangi bir plak olmayan Şekil 3.5 gibi dikdörtgen bir plak ele alalım (Szilard, 2004).



Şekil 3.5 : Basit mesnetli dikdörtgen plak.

$$w(x=0,y)=0 \quad w(x=a,y)=0 \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x = 0, y) = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x = a, y) = 0 \quad (3.63)$$

$$w(x,y=0)=0 \quad w(x,y=b)=0 \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y = 0) = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y = b) = 0 \quad (3.65)$$

$$w = w_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad ij = \text{tamsayı (Szilard, 2004)} \quad (3.66)$$

Denklem (3.66) denkleminin türevleri alınır.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} w_{ij}(x, y) = -\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) w_{ij} \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} w_{ij}(x, y) = -\left(\frac{j\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) w_{ij} \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} w_{ij}(x, y) = \left(\frac{i\pi}{a}\right)^4 \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) w_{ij} \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} w_{ij}(x, y) = \left(\frac{j\pi}{b}\right)^4 \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) w_{ij} \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} w_{ij}(x, y) = \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) w_{ij} \quad (3.71)$$

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] \quad (3.72)$$

Denklem (3.72) ifadesi (3.69) (3.70) (3.71) denklemlerine göre yazılırsa;

$$= D \left[ \left(\frac{i\pi}{a}\right)^4 + 2 \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{b}\right)^4 \right] \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) w_{ij} \quad (3.73)$$

$$= D \left[ \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2 \right]^2 \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) w_{ij} = P_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad (3.74)$$

$$P(x, y) = P_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad (\text{Szilard, 2004}) \quad (3.75)$$

Denklem (3.74) denkleminde denklem (3.66) yazılırsa;

$$w(x, y) = \frac{P_{ij}}{D \left[ \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2 \right]^2} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad (3.76)$$

$$P(x, y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} p_{ij} \left( \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{b} \right) \quad (\text{Szilard, 2004}) \quad (3.77)$$

$$w(x, y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} w_{ij} \left( \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{b} \right) \quad (\text{Szilard 2004}) \quad (3.78)$$

$$P(x, y) = P_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad (3.79)$$

$$\int_{x,y=0}^{a,b} P(x, y) \sin\left(\frac{i'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j'\pi y}{b}\right) dx dy = \int_{x,y=0}^{a,b} \left[ \sum_{i,j=1}^{\infty} P_{ij} \left( \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{b} \right) \right. \\ \left. \left( \sin\frac{j'\pi y}{b} \sin\frac{j'\pi y}{b} \right) \right] dx dy \quad (3.80)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_{x=0}^a \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{i'\pi x}{a}\right) dx \int_{y=0}^b \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{j'\pi y}{b}\right) dy \quad (3.81)$$

$$\int_{x=0}^a \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{i'\pi x}{a}\right) dx \quad (3.82)$$

Denklem (3.82) dönüşüm yöntemleri kullanılarak çözümlerse;

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a}{(i-i')\pi} \sin\left(\frac{(i-i')\pi x}{a}\right) - \frac{a}{(i+i')\pi} \sin\left(\frac{(i+i')\pi x}{a}\right) \right\} = \frac{a}{2} \quad (3.83)$$

$$\int_{y=0}^b \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{j'\pi y}{b}\right) dy = \frac{b}{2} \quad (3.84)$$

Denklem (3.85) ve (3.86); denklem (3.79) eşitliği yazılırsa;

$$\frac{ab}{4} P_{ij} = \int_{x,y=0}^{a,b} p(x,y) \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dx dy \quad (3.85)$$

$$P_{ij} = \frac{4}{ab} \int_{x,y=0}^{a,b} p(x,y) \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dx dy \quad (3.86)$$

$P(x,y) = P_o$  için

$$P_{ij} = \frac{4P_o}{ab} \int_{x,y=0}^{a,b} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dx dy \quad (3.87)$$

Denklem(3.87) x ve y ifadelerine göre çarpanlarına ayrılıp integralleri alınırsa;

$$\int_{x=0}^a \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) dx = \left[ \frac{-a}{i\pi} \cos\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \right]_0^a \quad (3.88)$$

$$= \frac{a}{i\pi} [-\cos i\pi + 1] = \frac{2a}{i\pi} \quad (3.89)$$

Denklem (3.88) ifadesi integrali alındığında denklem (3.89) elde edilir. İntegral, sınırları içerisinde çift sayılarda sıfır sonucunu verir (Szilard, 2004).

$$\int_{y=0}^b \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dy = \frac{2b}{j\pi} \quad (3.90)$$

Denklem (3.89) ve (3.90) denklem (3.87)'de yazılır ve ifade, denklem (3.77)'de yazılırsa;

$$P(x, y) = \frac{16P_o}{\pi^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad (3.91)$$

Denklem (3.91), denklem (3.76)'da yerine yazılırsa;

$$w(x, y) = \frac{16P_o}{D\pi^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{ij \left[ \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2 \right]^2} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad (3.92)$$

Kare Plak İçin maximum yerdeğiştirme plak ortasında olacağından

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{16P_o}{D\pi^2} \frac{1}{ij \left[ \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2 \right]^2} \sin\left(\frac{i\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) \quad (3.93)$$

Tek Terim yaklaşımı yapılırsa (i=1 ; j=1)

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{16P_o a^4}{D\pi^6} \frac{1}{4} = 0,00416 \frac{P_o a^4}{D} \quad (3.94)$$

Dört Terim Yaklaşımı yapılırsa (i=1,3 ; j=1,3)

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{16P_o a^4}{D\pi^6} \left[ \frac{1}{4} 2(-1) \frac{1}{3 \left[ (1)^2 + (3)^2 \right]^2} + \frac{1}{3 + 3 \left[ (3)^2 + (3)^2 \right]^2} \right] \quad (3.95)$$

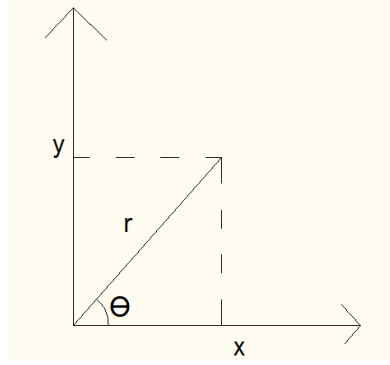
$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0,00405 \frac{P_o a^4}{D} \quad (3.96)$$

Kesin Çözüm =  $0,00406 \frac{P_o a^4}{D}$  (Timoshenko and Woinowsky – Krieger, 1959)

## 4. DAİRESEL PLAKLAR

### 4.1 Dairesel Plak Denklemleri

Merkezden uzaklığı  $r$  olan ve  $x$  eksenine  $\theta$  açısı yapan Şekil 4.1 'deki gibi bir doğru olsun.



Şekil 4.1 : Kutupsal koordinat sistemi.

Şekil 4.1 'e göre  $x$  ve  $y$  uzaklıkları  $r$  ve  $\theta$  cinsinden yazılırsa;

$$x(r,\theta)=r.\cos\theta \quad y(r,\theta)=r.\sin\theta \quad (4.1)$$

$$\theta(x,y) = \arctan\frac{y}{x} \quad r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.2)$$

$$w(x,y)=w[r\cos\theta,r\sin\theta]=w(r,\theta) \quad (4.3)$$

$x$ 'e göre olan türev ifadeleri  $r$  ve  $\theta$  cinsinden bulunursa;

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\theta \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \theta \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \theta \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \cos \theta \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left[ \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right] \quad (4.12)$$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \right] \quad (4.13)$$

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = \left[ \frac{\partial}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta \right] \quad (4.14)$$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \cos \theta \right] \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left[ \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right] \quad (4.16)$$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \cos \theta \right] \quad (4.17)$$

Simetrik Deformasyon durumlarında  $\theta$  terimleri yok olur (Ventsel and Krauthammer 2001).

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (4.22)$$



$$M_r(r, \theta) = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \gamma \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\gamma}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \quad (4.23)$$

$$M_\theta(r, \theta) = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \quad (4.24)$$

$$M_{r\theta}(r, \theta) = -D(1 - \gamma) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \quad (4.25)$$

$$\Delta w(r, \theta) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (4.26)$$

$$Q_r(r, \theta) = -D \frac{\partial}{\partial r} \Delta w \quad (4.27)$$

$$Q_\theta(r, \theta) = -D \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} \Delta w \quad (4.28)$$

$$\Delta \Delta w(r, \theta) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \quad (4.29)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] = \frac{P(r, \theta)}{D} \quad (4.30)$$

Simetrik Deformasyon durumlarında  $\theta$  terimleri yok olur (Ventsel and Krauthammer, 2001).

Denklem (4.23)-(4.30) arasındaki denklemlerde  $\theta$  yok edilirse;

$$P(r, \theta) = P(r) \quad w(r, \theta) = w(r) \quad (4.31)$$

$$M_r(r) = -D \left[ \frac{d^2 w}{dr^2} + \gamma \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] \quad (4.32)$$

$$M_\theta(r) = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \gamma \frac{d^2 w}{dr^2} \right] \quad (4.33)$$

$$M_{r\theta}(r) = 0 \quad Q_\theta(r) = 0 \quad Q_r(r, \theta) = -D \frac{d}{dr} \Delta w(r) \quad (4.34)$$

$$\Delta w(r) = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \quad (4.35)$$

$$\Delta \Delta w(r) = \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] \left[ \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] = \frac{P(r)}{D} \quad (4.36)$$

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] \left[ \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] = \frac{P(r)}{D} \quad (4.37)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right] = \frac{P(r)}{D} \quad (4.38)$$

Düzgün Yayılı Yük Durumunda

$P(r)=P_0=\text{sabit}$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right] = \frac{P_0}{D} \quad (4.39)$$

Denklem (4.39) ifadesinin r cinsinden integrali alınırsa;

$$r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{P_0}{D} \frac{r^2}{2} + c_1 \quad (4.40)$$

Denklem (4.40) ifadesinin r cinsinden integrali alınırsa;

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{P_0}{D} \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2 \quad (4.41)$$

Denklem (4.41) ifadesinin r cinsinden integrali alınırsa;

$$r \frac{dw}{dr} = \frac{P_0}{D} \frac{r^4}{16} + C_1 \frac{r^2}{2} \ln r - C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \frac{r^2}{2} + C_3 \quad (4.42)$$

Denklem (4.42) ifadesinin r cinsinden integrali alınırsa;

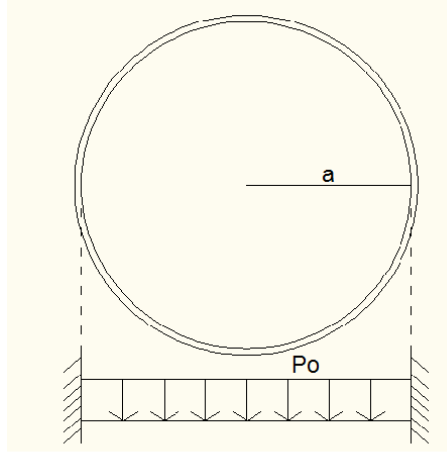
$$w(r) = \frac{P_0}{D} \frac{r^4}{64} + C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 \quad (4.43)$$

Yerdeğiştirmeler sonlu olacak için ln ifadelerinin katsayıları sıfır olmalıdır.

$$w(r) = \frac{P_0}{64D} r^4 + C_2 r^2 + C_4 \quad (\text{Timoshenko and Woinowsky, 1959}) \quad (4.44)$$

## 4.2 Ankastre Kenarlara Sahip Dairesel Plak Örneği

Her tarafından ankastre mesnetlenmiş Şekil 4.2 'deki gibi dairesel bir plak olsun (Szilard, 2004).



Şekil 4.2 : Ankastre mesnetli dairesel plak.

$$w(r=a)=0 \quad (4.45)$$

$$w(r = a) = \frac{P_0}{64D} a^4 + C_2 a^2 + C_4 = 0 \quad (4.46)$$

$$\frac{dw}{dr}(r = a) = 0 \quad (4.47)$$

$$\frac{dw}{dr}(r = a) = \frac{P_0}{16D} a^3 + 2C_2 a = 0 \quad (4.48)$$

$$C_2 = -\frac{P_0}{32D} a^2 \quad C_4 = \frac{P_0}{64D} a^4 \quad (4.49)$$

$$w(r) = \frac{P_0}{64D} r^4 - \frac{P_0}{32D} a^2 r^2 + \frac{P_0}{64D} a^4 \quad (4.50)$$

$$w(r) = \frac{P_0}{64D} (r^4 - 2a^2 r^2 + a^4) \quad (4.51)$$

$$M_r(r) = -D \left[ \frac{d^2 w}{dr^2} + \gamma \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] \quad (4.52)$$

$$M_r(r) = \frac{P_0}{16} [(1 + \gamma)a^2 - (3 + \gamma)r^2] \quad (4.53)$$

$$M_\theta(r) = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \gamma \frac{d^2 w}{dr^2} \right] \quad (4.54)$$

$$M_{\theta}(r) = \frac{P_0}{16} [(1 + \gamma)a^2 - (1 + 3\gamma)r^2] \quad (4.55)$$

$$Max w = w(r = 0) = \frac{P_0}{64D} a^4 = 0,0156 \frac{P_0}{D} a^4 \quad (4.56)$$

$$Max M_r(r = a) = -\frac{P_0 a^2}{8} \quad (4.57)$$

$$Max M_{\theta}(r = 0) = \frac{P_0 a^2}{16} (1 + \gamma) \quad (4.58)$$

Buna göre plağın merkezinden bir kesit alındığında ve (4.51) , (4.53) ve (4.55) denklemlerinde yazıldığında;

$$w_1(r = 0) = 0,0156 \frac{P_0}{D} a^4 \quad (4.59)$$

$$w_2\left(r = \frac{a}{4}\right) = 0,01373 \frac{P_0}{D} a^4 \quad (4.60)$$

$$w_3\left(r = \frac{2a}{4}\right) = 0,00879 \frac{P_0}{D} a^4 \quad (4.61)$$

$$w_4\left(r = \frac{3a}{4}\right) = 0,00299 \frac{P_0}{D} a^4 \quad (4.62)$$

$$M_{r1}(r = 0) = 0,075P_0 a^2 \quad M_{\theta1}(r = 0) = 0,075P_0 a^2 \quad (4.63)$$

$$M_{r2}\left(r = \frac{a}{4}\right) = 0,0625P_0 a^2 \quad M_{\theta2}\left(r = \frac{a}{4}\right) = 0,06875P_0 a^2 \quad (4.64)$$

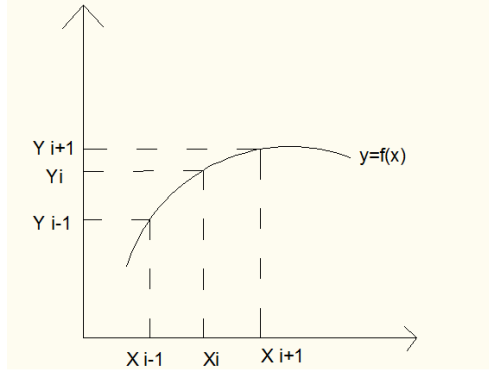
$$M_{r3}\left(r = \frac{2a}{4}\right) = 0,025P_0 a^2 \quad M_{\theta3}\left(r = \frac{2a}{4}\right) = 0,05P_0 a^2 \quad (4.65)$$

$$M_{r4}\left(r = \frac{3a}{4}\right) = -0,0375P_0 a^2 \quad M_{\theta4}\left(r = \frac{3a}{4}\right) = 0,01875P_0 a^2 \quad (4.66)$$

$$M_{r5}(r = a) = -0,125P_0 a^2 \quad M_{\theta5}(r = a) = -0,025P_0 a^2 \quad (4.67)$$

## 5. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Bazı noktalarda değeri bilinen Şekil 5.1 'deki gibi  $f(x)$  fonksiyonu olsun.



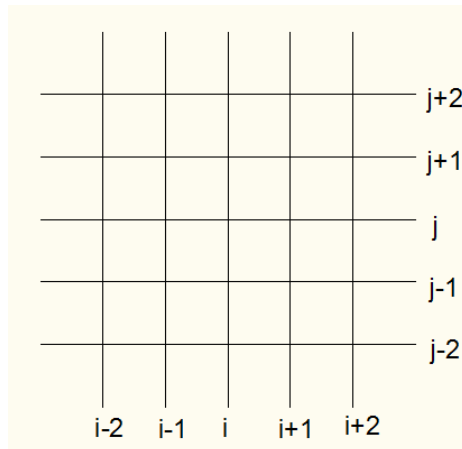
Şekil 5.1 : Fonksiyonun grafiği.

$$f'(x_i) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_i + 1) - f(x_i)}{(x_i + 1) - x_i} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (5.1)$$

$$f'(x_i) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_i) - f(x_i - 1)}{x_i - (x_i - 1)} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (5.2)$$

$$f''(x_i) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_i + 1) - \Delta f(x_i)}{\Delta x^2} = \frac{f(x_i + 1) - 2f(x_i) + f(x_i - 1))}{\Delta x^2} \quad (5.3)$$

Noktaların i ve j cinsinden gösterimleri ve yerleri Şekil 5.2 'de gösterilmiştir.



Şekil 5.2 : Noktaların gösterimi.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{ij} \cong \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{\Delta x} \quad (5.4)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{ij} \cong \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{\Delta y} \quad (5.5)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{ij} \cong \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (5.6)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{ij} \cong \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (5.7)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{ij} \cong \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \quad (5.8)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_{ij} \cong \frac{w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j}}{\Delta x^4} \quad (5.9)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_{ij} \cong \frac{w_{i,j+2} - 4w_{i,j+1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}}{\Delta y^4} \quad (5.10)$$

x ve y yönünde eşi uzunluklarda bölündüğünde

$$f(x, y) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (5.11)$$

$$20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) + 2(w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1}) + w_{i,j+2} + w_{i,j-2} + w_{i+2,j} + w_{i-2,j} = \Delta x^4 f(x, y) \quad (5.12)$$

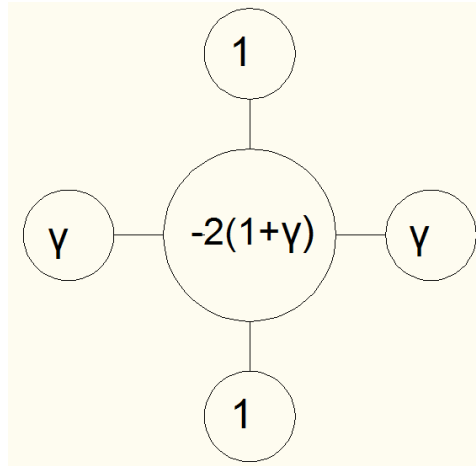
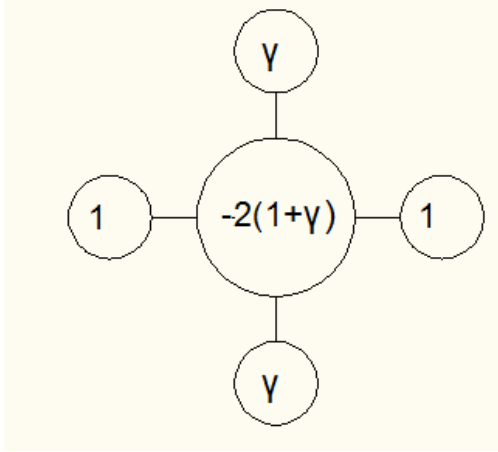
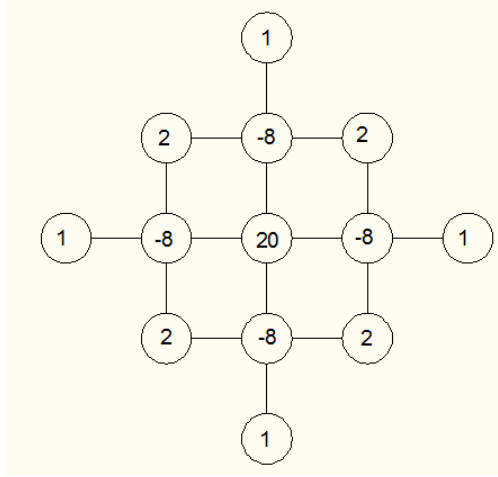
$$M_{xij} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}) + \gamma(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1})] \quad (5.13)$$

$$M_{yij} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}) + \gamma(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j})] \quad (5.14)$$

$$Q_{xij} \cong -\frac{D}{\Delta x^3} [-4w_{i+1,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i+2,j} + w_{i-2,j}] \quad (\text{Ventsel and Krauthammer, 2001}) \quad (5.15)$$

$$Q_{yij} \cong -\frac{D}{\Delta x^3} [-4w_{i,j+1} - 4w_{i,j-1} - w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1} - w_{i,j+2} + w_{i,j-2}] \quad (\text{Ventsel and Krauthammer, 2001}) \quad (5.16)$$

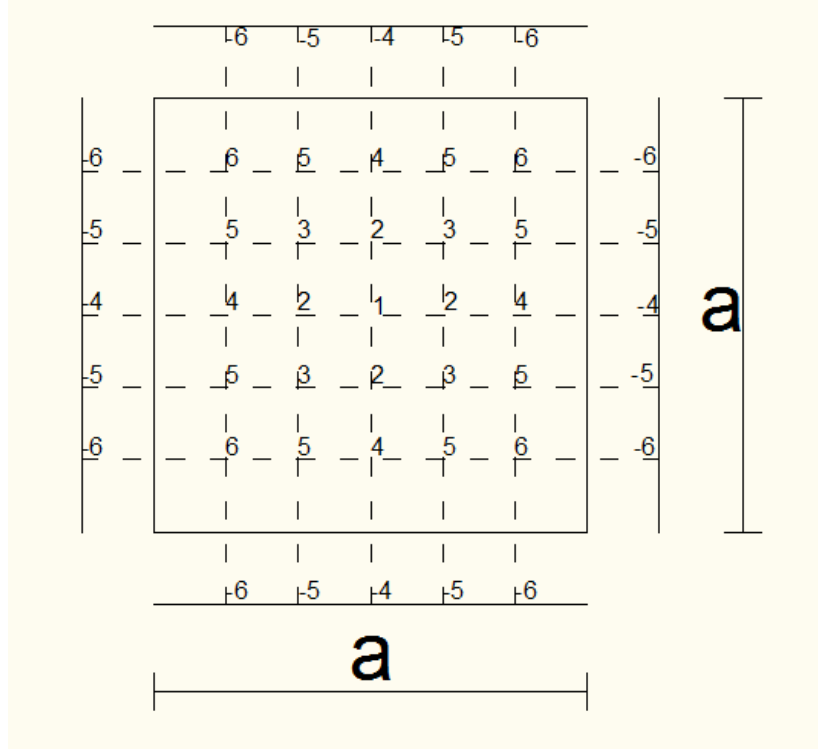
Yerdeğiştirme, x yönündeki moment ve y yönündeki moment ifadelerinin katsayıları Şekil 5.3 'dekiler gibi şema üzerinde toplanırsa (Ventsel ve Krauthammer, 2001).



Şekil 5.3 : Katsayılar şeması.

## 5.1 Basit Mesnetli Kenarları Olan Kare Plak Örneği

Basit mesnetli kare bir plak Şekil 5.4 gibi bölünürse;



Şekil 5.4 Plakın şematik bölünmesi.

Şekil 5.3 kullanılarak denklemler yazılırsa;

$$20w_1 - 8(4w_2) + 2(4w_3) + 4w_4 = \frac{1}{1296} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.17)$$

$$20w_2 - 8(2w_3 + w_4 + w_1) + 2(2w_5 + 2w_4) + 2w_5 + w_2 = \frac{1}{1296} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.18)$$

$$20w_3 - 8(w_5 + w_5 + w_2 + w_2) + 2(w_6 + w_1 + 2w_4) + 2w_3 = \frac{1}{1296} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.19)$$

$$20w_4 - 8(w_5 + w_5 + w_2) + 2(w_3 + w_3) + 2w_6 + w_1 - w_4 = \frac{1}{1296} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.20)$$

$$20w_5 - 8(w_4 + w_6 + w_3) + 2(w_2 + w_5) + w_5 + w_2 - w_5 = \frac{1}{1296} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.21)$$

$$20w_6 - 8(w_5 + w_5) + 2(w_3 + w_3) + w_4 + w_4 - w_6 - w_6 = \frac{1}{1296} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.22)$$



$$20w_1 - 32w_2 + 8w_3 + 4w_4 = \frac{1}{1296} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.23)$$

$$-8w_1 + 25w_2 - 16w_3 - 8w_4 + 6w_5 = \frac{1}{1296} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.24)$$

$$2w_1 - 16w_2 + 22w_3 + 4w_4 - 16w_5 + 2w_6 = \frac{1}{1296} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.25)$$

$$w_1 - 8w_2 + 4w_3 + 19w_4 - 16w_5 + 2w_6 = \frac{1}{1296} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.26)$$

$$3w_2 - 8w_3 - 8w_4 + 22w_5 - 8w_6 = \frac{1}{1296} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.27)$$

$$2w_3 + 2w_4 - 16w_5 + 18w_6 = \frac{1}{1296} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.28)$$

Denklem (5.23)'ten (5.28)'e kadar ifadelerin katsayılar matrisi oluşturulursa;

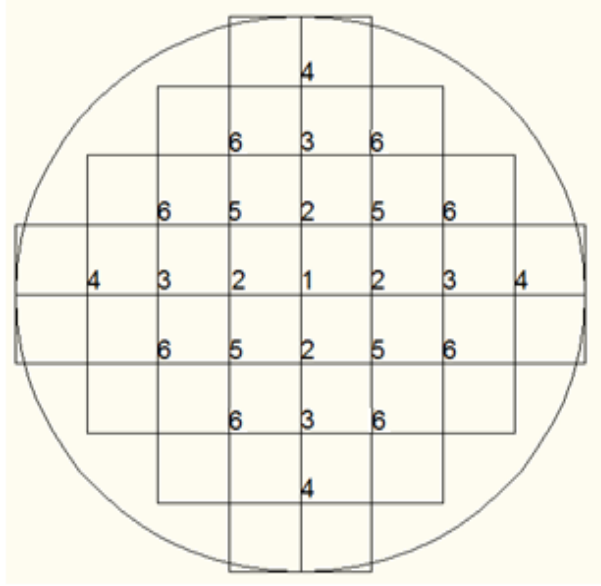
$$\begin{bmatrix} 20 & -32 & +8 & +4 & 0 & 0 \\ -8 & +25 & -16 & -8 & 6 & 0 \\ 2 & -16 & 22 & +4 & -16 & 2 \\ 1 & -8 & 4 & 19 & -16 & 2 \\ 0 & 3 & -8 & -8 & 22 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -16 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000771605 \\ 0,000771605 \\ 0,000771605 \\ 0,000771605 \\ 0,000771605 \\ 0,000771605 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00405 \\ 0,00356 \\ 0,00311 \\ 0,00211 \\ 0,00185 \\ 0,00111 \end{bmatrix} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.30)$$

Double Fourier serisiyle yapılan çözümde bulunan yerdeğiştirme ile sonlu farklar yöntemiyle bulunan yerdeğiştirme aynıdır.

## 5.2 Ankastre Kenarlara Sahip Dairesel Plak Örneği

Ankastre kenarlı dairesel bir plak Şekil 5.5 gibi bölünürse;



Şekil 5.5 : Dairesel plağın şematik bölünmesi.

Şekil 5.3 kullanılarak denklemler yazılırsa;

$$20w_1 - 8(4w_2) + 2(4w_5) + 4w_3 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.31)$$

$$20w_2 - 8(2w_5 + w_3 + w_1) + 2(2w_6 + 2w_2) + 2w_6 + w_4 + w_2 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.32)$$

$$20w_3 - 8(w_6 + w_6 + w_2 + w_4) + 2(2w_5) + w_1 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.33)$$

$$20w_4 - 8(w_3) + 2(2w_6) + w_2 + w_4 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.34)$$

$$20w_5 - 8(2w_6 + 2w_2) + 2(2w_3 + w_1) + 2w_5 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.35)$$

$$20w_6 - 8(w_3 + w_5) + 2(w_2 + w_4 + w_6) + w_2 + w_6 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.36)$$

$$20w_1 - 32w_2 + 8w_5 + 4w_3 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.37)$$

$$-8w_1 + 25w_2 - 8w_3 + 1w_4 - 16w_5 + 6w_6 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.38)$$

$$w_1 - 8w_2 + 20w_3 - 8w_4 + 4w_5 - 16w_6 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.39)$$

$$w_2 - 8w_3 + 21w_4 + 4w_6 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.40)$$

$$2w_1 - 16w_2 + 4w_3 + 22w_5 - 16w_6 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.41)$$

$$3w_2 - 8w_3 + 2w_4 - 8w_5 + 23w_6 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.42)$$

Denklem (5.37)'den (5.42)'e kadar ifadelerin katsayılar matrisi oluşturulursa;

$$\begin{bmatrix} 20 & -32 & 4 & 0 & 8 & 0 \\ -8 & 25 & -8 & 1 & -16 & 6 \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 4 & -16 \\ 0 & 1 & -8 & 21 & 0 & 4 \\ 2 & -16 & 4 & 0 & 22 & -16 \\ 0 & 3 & -8 & 2 & -8 & 23 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

(5.43) matrisinin tersi alınıp 0,00390625 ile çarpılırsa yerdeğistirmeler bulunur.

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00847 \\ 0,00704 \\ 0,00373 \\ 0,00081 \\ 0,00562 \\ 0,00243 \end{bmatrix} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.44)$$

Momentler için ise (5.44) ifadesindeki değerler denklem (5.13) ve (5.14)'te yazılırsa;

$$M_{x_1} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_2 - 2w_1 + w_2) + \gamma(w_2 - 2w_1 + w_2)] = 0,0549Poa^2 \quad (5.45)$$

$$M_{x_2} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_3 - 2w_2 + w_1) + \gamma(w_5 - 2w_2 + w_5)] = 0,03916Poa^2 \quad (5.46)$$

$$M_{x_3} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_4 - 2w_3 + w_2) + \gamma(w_6 - 2w_3 + w_6)] = 0,00208Poa^2 \quad (5.47)$$

$$M_{x_4} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(0 - 2w_4 + w_3) + \gamma(0 - 2w_4 + 0)] = -0,028576Poa^2 \quad (5.48)$$

$$M_{x_5} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_4 - 0 + w_4) + \gamma(0 - 0 + 0)] = -0,02592Poa^2 \quad (5.49)$$

$$M_{y_1} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_2 - 2w_1 + w_2) + \gamma(w_2 - 2w_1 + w_2)] = 0,054912Poa^2 \quad (5.50)$$

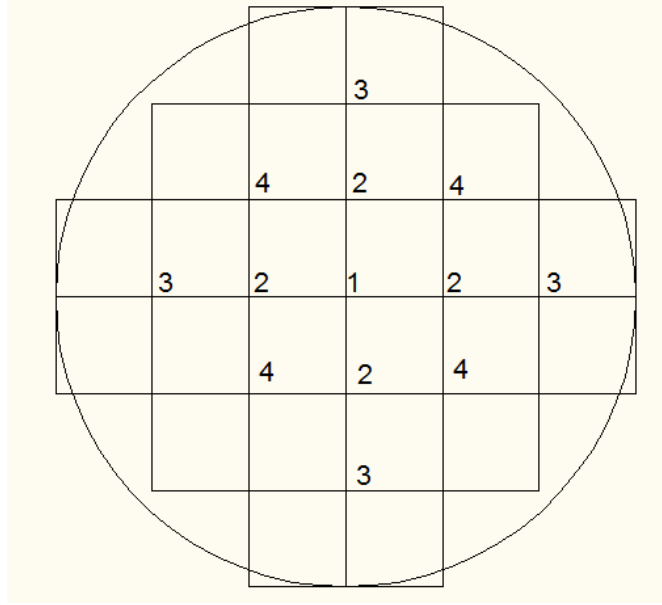
$$M_{y_2} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_5 - 2w_2 + w_5) + \gamma(w_3 - 2w_2 + w_1)] = 0,05145 Poa^2 \quad (5.51)$$

$$M_{y_3} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_6 - 2w_3 + w_6) + \gamma(w_4 - 2w_3 + w_2)] = 0,04035Pa^2 \quad (5.52)$$

$$M_{y_4} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(0 - 2w_4 + 0) + \gamma(0 - 2w_4 + w_3)] = 0,019168Pa^2 \quad (5.53)$$

$$M_{y_5} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(0 - 0 + 0) + \gamma(w_4 - 0 + w_4)] = -0,005184Pa^2 \quad (5.54)$$

Ankastre kenarlı dairesel bir plak Şekil 5.6 gibi bölünürse;



Şekil 5.6 : Dairesel plağın şematik bölünmesi.

Şekil 5.3 kullanılarak denklemler yazılırsa;

$$20w_1 - 8(4w_2) + 2(4w_4) + 4w_3 = \frac{1}{81} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.55)$$

$$20w_2 - 8(2w_4 + w_3 + w_1) + 2(2w_2) + w_2 = \frac{1}{81} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.56)$$

$$20w_3 - 8(w_2) + 2(2w_5) + w_1 + w_3 = \frac{1}{81} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.57)$$

$$20w_4 - 8(2w_2) + 2(2w_3 + w_1) + w_5 + w_5 = \frac{1}{81} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.58)$$

$$20w_1 - 32w_2 + 8w_4 + 4w_3 = \frac{1}{81} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.59)$$

$$-8w_1 + 25w_2 - 8w_3 - 16w_4 = \frac{1}{81} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.60)$$

$$w_1 - 8w_2 + 21w_3 + 4w_4 = \frac{1}{81} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.61)$$

$$2w_1 - 16w_2 + 4w_3 + 22w_4 = \frac{1}{81} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.62)$$

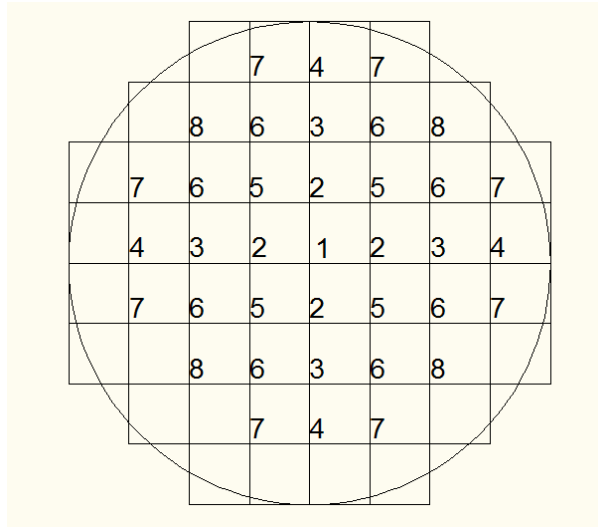
Denklem (5.59)'dan (5.62)'e kadar ifadelerin katsayılar matrisi oluşturulursa;

$$\begin{bmatrix} 20 & -32 & 4 & 8 \\ -8 & 25 & -8 & -16 \\ 1 & -8 & 21 & 4 \\ 2 & -16 & 4 & 22 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

(5.63) matrisinin tersi alınıp 0,0123456 ile çarpılırsa yerdeğiştirmeler bulunur.

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0,01009 \\ 0,00726 \\ 0,00210 \\ 0,00456 \end{pmatrix} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.64)$$

Ankastre kenarlı dairesel bir plak Şekil 5.7 gibi bölünürse;



Şekil 5.7 : Dairesel plağın şematik bölünmesi.

Yarı çapı a olan ve kenarları ankastre mesnetlenmiş dairesel plak şekildeki gibi bölünmüş ve noktalar işaretlenmiştir. Yeni oluşturalan şekilde Şekil 5.3 kullanılarak denklemler yazılırsa;

$$20w_1 - 8(4w_2) + 2(4w_5) + 4w_3 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.65)$$

$$20w_2 - 8(2w_5 + w_3 + w_1) + 2(2w_6 + 2w_2) + 2w_6 + w_4 + w_2 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.66)$$

$$20w_3 - 8(w_6 + w_6 + w_2 + w_4) + 2(2w_7 + 2w_5) + 2w_8 + w_1 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.67)$$

$$20w_4 - 8(2w_7 + w_3) + 2(2w_6) + w_2 + w_4 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.68)$$

$$20w_5 - 8(2w_6 + 2w_2) + 2(2w_3 + w_1 + 2w_8) + 2w_5 + 2w_7 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.69)$$

$$20w_6 - 8(w_3 + w_5 + w_7 + w_8 + 2(w_2 + w_4 + w_6)) + w_2 + w_6 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.70)$$

$$20w_7 - 8(w_9 + w_4 + w_6) + 2(w_8 + w_3) + 2w_7 + w_5 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.71)$$

$$20w_8 - 8(2w_6) + 2(2w_7 + w_5) + 2w_3 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.72)$$

$$20w_1 - 32w_2 + 8w_5 + 4w_3 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.73)$$

$$-8w_1 + 25w_2 - 8w_3 + 1w_4 - 16w_5 + 6w_6 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.74)$$

$$w_1 - 8w_2 + 20w_3 - 8w_4 + 4w_5 - 16w_6 + 4w_7 + 2w_8 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.75)$$

$$w_2 - 8w_3 + 21w_4 + 4w_6 - 16w_7 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.76)$$

$$2w_1 - 16w_2 + 4w_3 + 22w_5 - 16w_6 + 2w_7 + 2w_8 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.77)$$

$$3w_2 - 8w_3 + 2w_4 - 8w_5 + 23w_6 - 8w_7 - 8w_8 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.78)$$

$$2w_3 - 8w_4 + w_5 - 8w_6 + 22w_7 + 2w_8 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.79)$$

$$2w_3 + 2w_5 - 16w_6 + 4w_7 + 20w_8 = \frac{1}{256} \frac{Pa^4}{D} \quad (5.80)$$

Denklem (5.73)'ten (5.80)'e kadar ifadelerin katsayılar matrisi oluşturulursa;

$$\begin{bmatrix} 20 & -32 & 4 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 25 & -8 & 1 & -16 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 4 & -16 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & 21 & 0 & 4 & -16 & 0 \\ 2 & -16 & 4 & 0 & 22 & -16 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -8 & 2 & -8 & 23 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 1 & -8 & 22 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -16 & 4 & 20 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

(5.81) matrisinin tersi alınıp 0,00390625 ile çarpılırsayerdeğişirmeler bulunur.

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0167 \\ 0,0147 \\ 0,0096 \\ 0,0035 \\ 0,0128 \\ 0,008 \\ 0,0026 \\ 0,0038 \end{bmatrix} \frac{\text{Pa}^4}{D} \quad (5.82)$$

Momentler için ise (5.82) ifadesindeki değerler denklem (5.13) ve (5.14)'te yazılırsa;

$$M_{x_1} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_2 - 2w_1 + w_2) + \gamma(w_2 - 2w_1 + w_2)] = 0,0768Poa^2 \quad (5.83)$$

$$M_{x_2} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_3 - 2w_2 + w_1) + \gamma(w_5 - 2w_2 + w_5)] = 0,06304Poa^2 \quad (5.84)$$

$$M_{x_3} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_4 - 2w_3 + w_2) + \gamma(w_6 - 2w_3 + w_6)] = 0,02624Poa^2 \quad (5.85)$$

$$M_{x_4} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(0 - 2w_4 + w_3) + \gamma(w_7 - 2w_4 + w_7)] = -0,03584Poa^2 \quad (5.86)$$

$$M_{x_5} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_4 - 0 + w_4) + \gamma(0 - 0 + 0)] = -0,112Poa^2 \quad (5.87)$$

$$M_{y_1} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_2 - 2w_1 + w_2) + \gamma(w_2 - 2w_1 + w_2)] = 0,0768Poa^2 \quad (5.88)$$

$$M_{y_2} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_5 - 2w_2 + w_5) + \gamma(w_3 - 2w_2 + w_1)] = 0,0711Poa^2 \quad (5.89)$$

$$M_{y_3} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_6 - 2w_3 + w_6) + \gamma(w_4 - 2w_3 + w_2)] = 0,0544Poa^2 \quad (5.90)$$

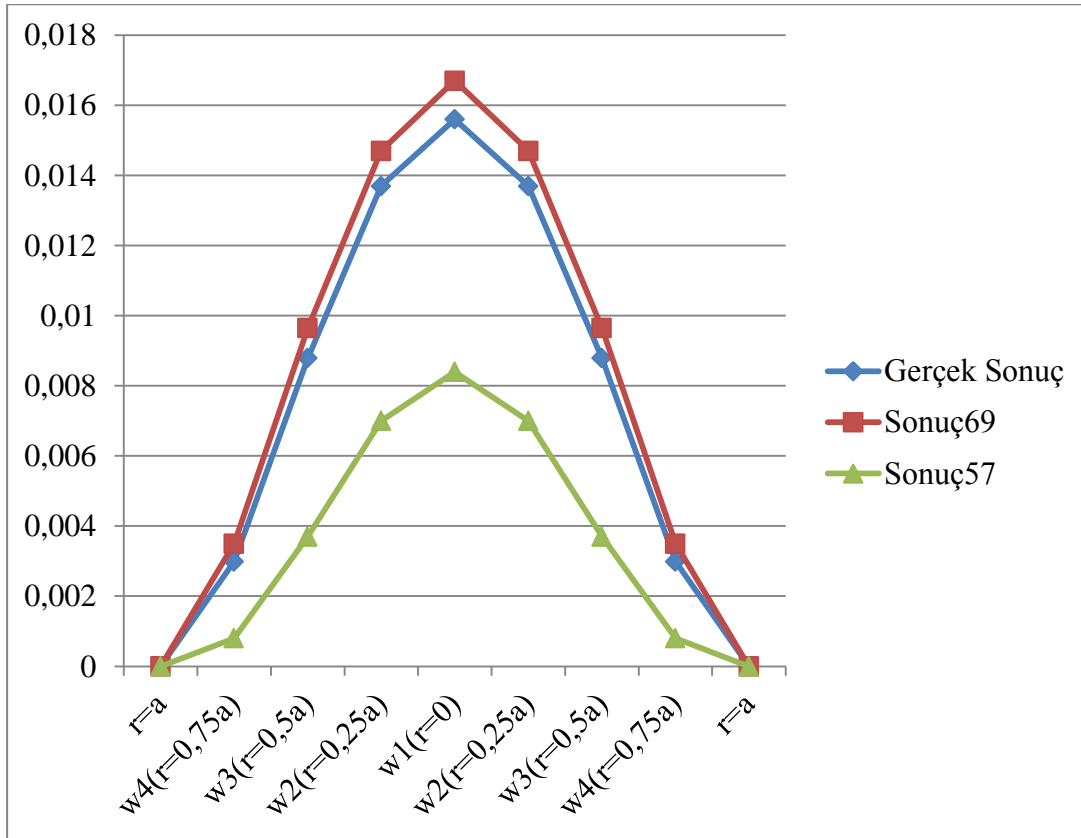
$$M_{y_4} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(w_7 - 2w_4 + w_7) + \gamma(0 - 2w_4 + w_3)] = 0,02048Poa^2 \quad (5.91)$$

$$M_{y_5} \cong -\frac{D}{\Delta x^2} [(0 - 0 + 0) + \gamma(w_4 - 0 + w_4)] = -0,0224Poa^2 \quad (5.92)$$

Yerdeğiştirmeler Tablo 5.1 'de sayısal, Şekil 5.8 'de grafiksel olarak gösterilirse;

	r=0	w4	w3	w2	w1	w2	w3	w4	r=0
GERÇEK SONUÇ	0	0,0030	0,0087	0,0137	0,0156	0,0137	0,0087	0,0030	0
SON57	0	0,0008	0,0037	0,0070	0,0084	0,0070	0,0037	0,0008	0
SON69	0	0,0035	0,0096	0,0147	0,0167	0,0147	0,0096	0,0035	0

**Tablo 5.1:**Yerdeğiřtirmelerin tablosu.



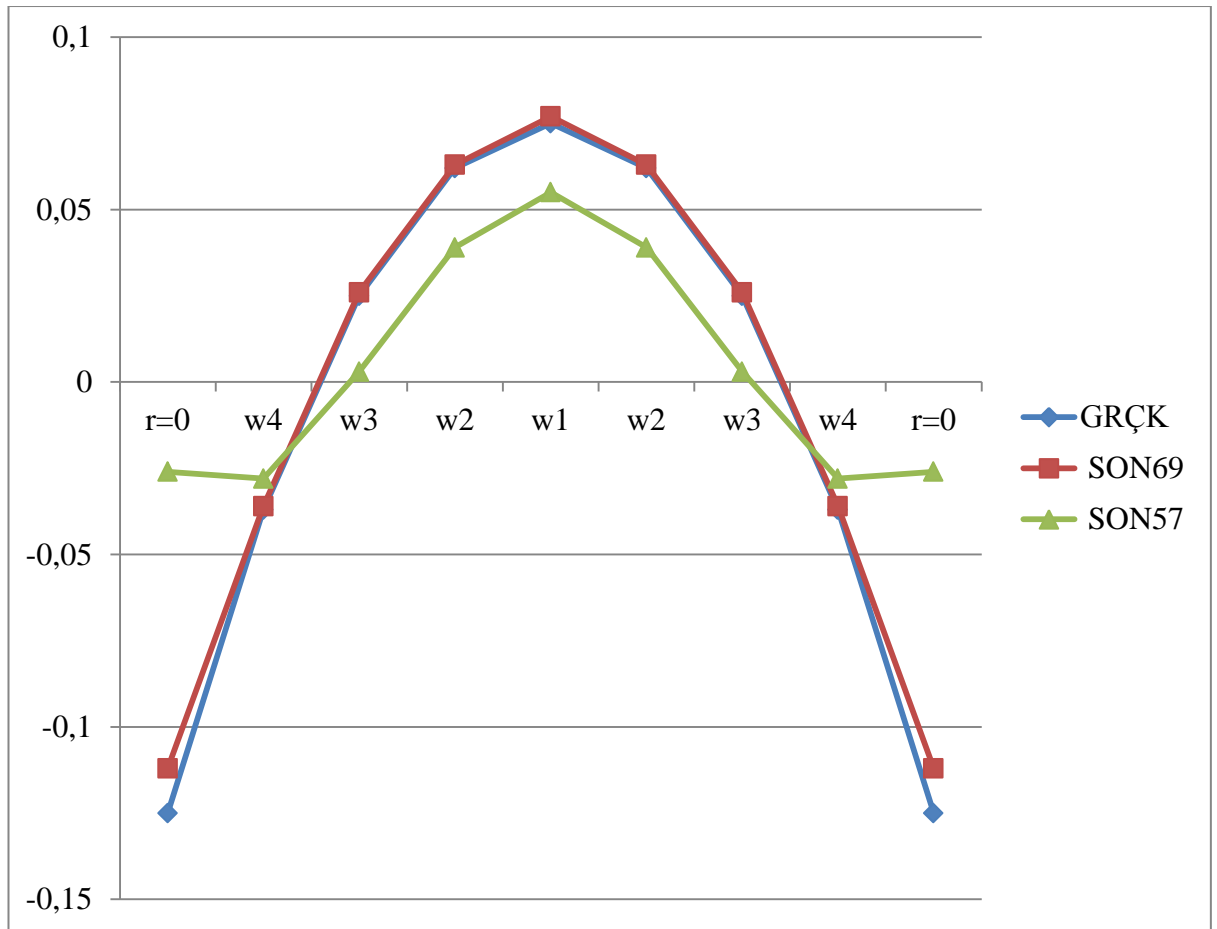
**Şekil 5.8 :** Sonuçların grafikte gösterilmesi.



Momentler (X) Tablo 5.2 'de sayısal, Şekil 5.9 'da grafiksel olarak gösterilirse;

	r=0	w4	w3	w2	w1	w2	w3	w4	r=0
GRÇK	-0,125	-0,037	0,025	0,062	0,075	0,062	0,025	-0,037	-0,125
SON69	-0,112	-0,036	0,026	0,063	0,077	0,063	0,026	-0,036	-0,112
SON57	-0,026	-0,028	0,003	0,039	0,055	0,039	0,003	-0,028	-0,026

**Tablo 5.2 :** Momentler tablosu.

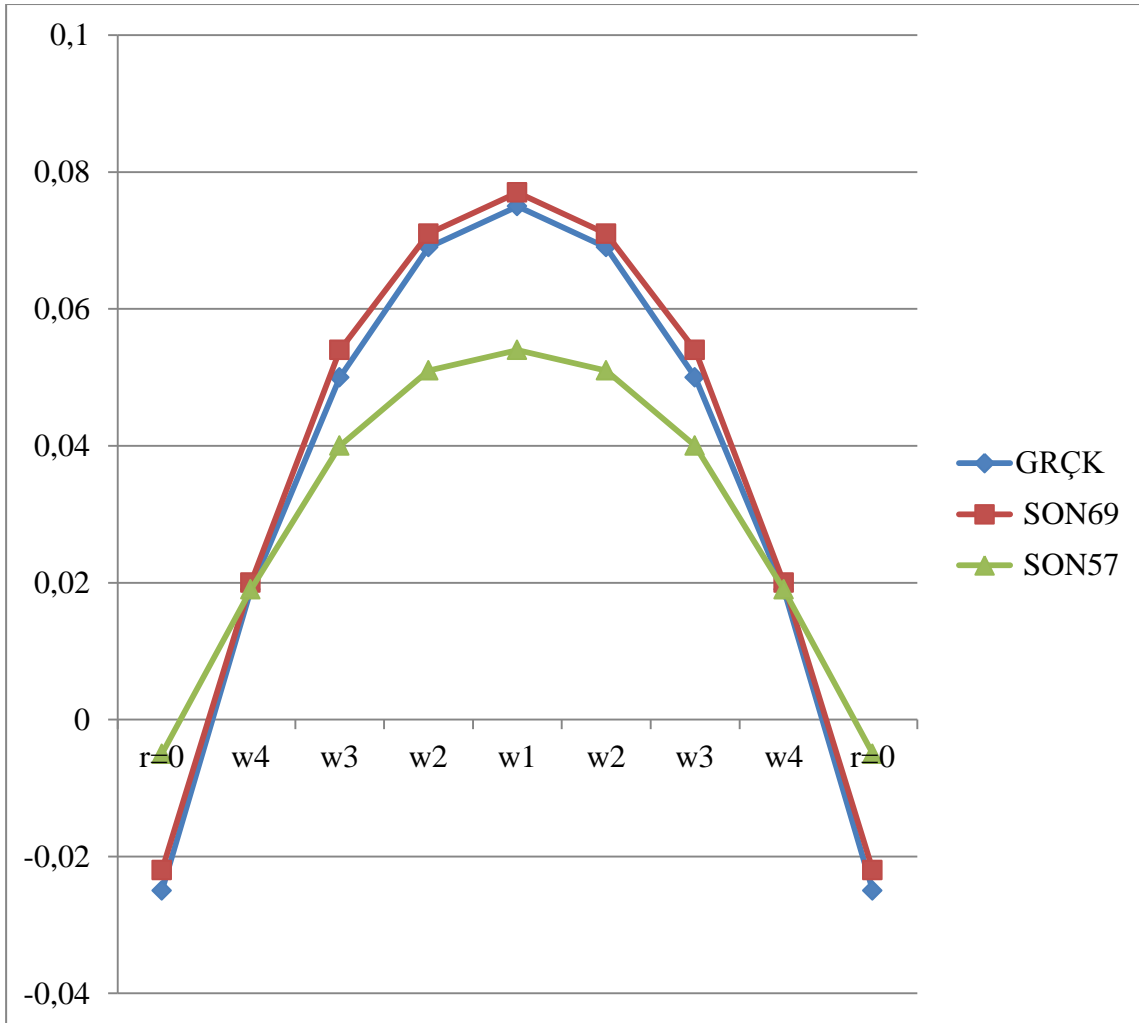


**Şekil 5.9 :** Sonuçların grafikte gösterilmesi.

Momentler (Y) Tablo 5.3 'de sayısal, Şekil 5.10 'da grafiksel olarak gösterilirse;

	r=0	w4	w3	w2	w1	w2	w3	w4	r=0
GRÇK	-0,025	0,019	0,05	0,069	0,075	0,069	0,05	0,019	-0,025
SON69	-0,022	0,02	0,054	0,071	0,077	0,071	0,054	0,02	-0,022
SON57	-0,005	0,019	0,04	0,051	0,054	0,051	0,04	0,019	-0,005

**Tablo5.3** : Momentlerin tablosu.



**Şekil 5.10** : Sonuçların grafikte gösterilmesi.

## 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışma da dairesel plağın sonlu farklar yöntemiyle çözümü ele alınmış ve yapılan bu çözüm gerçek çözümle kıyaslanmıştır. Dairesel plaklarda sonlu farklar yönteminin uygulanabilmesi için sınır koşullarındaki ovalliğin giderilmesi ve plağı en iyi şekilde temsil edebilecek yeni bir şeklin bulunması gerekmektedir. Bu yaklaşım yapılırken en yakın sonucun bulunması amacıyla dairesel plak iki farklı şekle evrilmiş ve bu iki şekil ayrı ayrı çözülmüştür. Yapılan çözümler ve kesin çözüm bir grafik üzerinde gösterilmiş ilk çözüm olmasa da ikinci çözümün yeterince yakın değerler verdiği tespit edilmiştir.



## **KAYNAKLAR**

**Celep, Z. ve Kumbasar, N.,**(2001). *Yapı Dinamiği* (3. baskı), İstanbul.

**Celep, Z. ve Kumbasar, N.,**(2004). *Deprem Mühendisliğine Giriş* (3. baskı), İstanbul.

**Celep, Z.,**(2008). *Betonarme Taşıyıcı Sistemlerde Doğrusal Olmayan Davranış ve Çözümleme* (2. baskı), İstanbul.

**Çağdaş, S.,**(2006). *Yapı Mekaniği'nde Nümerik Metodlar ve Matris-Deplasman Yöntemi*, İstanbul.

**Çakıroğlu, A., Özden E. ve Özmen, G.,**(1970). *Yapı Sistemlerinin Hesabı için Matris Metodları ve Elektronik Hesap Makinası Programları*, İstanbul.

**Timoshenko, S. ve Woinowsky-Krieger, S.,**(1959) *Theory of Plates and Shells*, New York.

**Szillard, R.,**(2004). *Theories and Applications of Plate Analysis*, New Jersey.

**Ventsel, E. ve Krauthammer E.,**(2001). *Thin Plates and Shells*, New York.



## **ÖZGEÇMİŞ**

**Ad Soyad :** Alim YILMAZ

**Doğum Yeri ve Tarihi :** Kars - 1989

**Adres :** İstanbul

**E-Posta :** alimyilmz@gmail.com

**Lisans :** Sakarya Üniversitesi (2008-2012)

**Yüksek Lisans :** İstanbul Teknik Üniversitesi (2012- ---)

**Mesleki Deneyim ve Ödüller:** 2008 yılında Sakarya Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nü kazanan Alim YILMAZ buradaki eğitimini 2012 yılı Mayıs ayında ikincilikle bitirdi.

Lisans eğitiminin ardından Gül İnşaat Kalekent ve Makyol İnşaat Yaşam Projelerinde İnşaat Mühendisi olarak görev yapmıştır.